Exercício 17 (n^o 36) *Neste exercício, classificamos as isometrias de* $\mathbb{R}^2$ *em quatro tipos; pelo Teorema 32,* $f \in I(\mathbb{R}^2)$ *escreve-se como o produto de* $r \leq 3$ *reflexões em rectas: analisamos as várias possibilidades para* $r = 1, 2, 3$.

Se $r = 1$*, nada a dizer:* $f = R_l$ *é precisamente uma reflexão numa recta!*

Se $r = 2$*,* $f = R_n R_m$*, distinguimos dois casos conforme as rectas* n *e* m *são ou não paralelas:*

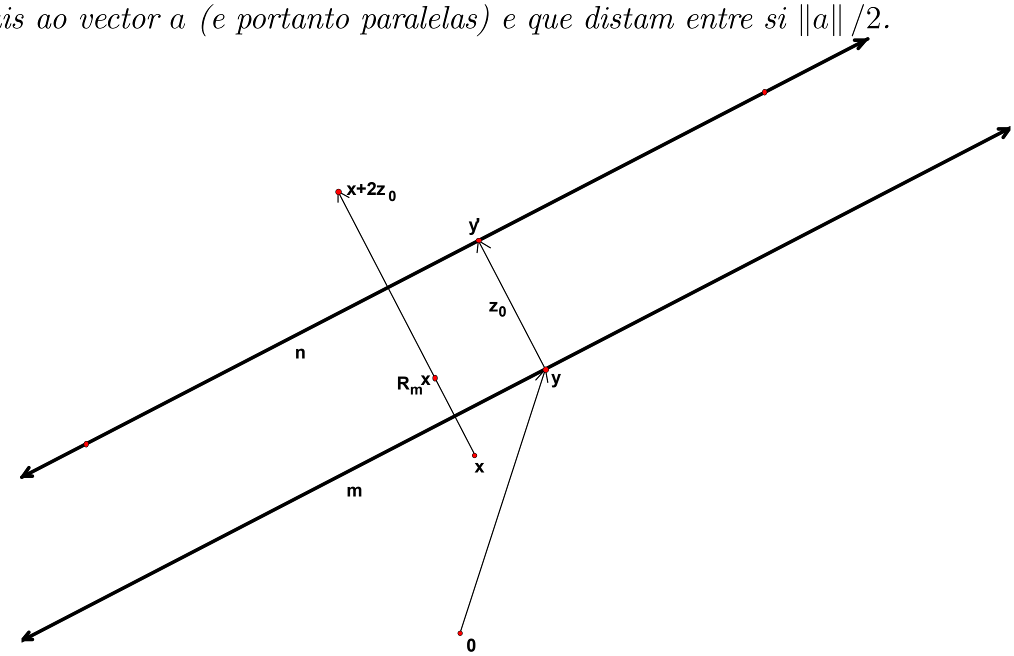
a) *Se* $n \parallel m$ *, é fácil ver (pela resolução do exercício n^o 26) que têm um vector comum ortogonal,* z_0*, tal que* $\forall y' \in n$ *existe um (único)* $y \in m$ *tal que* $y' = y + z_0$*: claro que* $\|z_0\| = d(m, n)$*. Dado um* $x \in \mathbb{R}^2$*, arbitrário, seja* $x = y + z$ *com* $y \in m$ *e* $z \perp (m - y)$*; podemos escrever* $z = z_0 + z'$*(* $z' = z - z_0$ *é também ortogonal às rectas); por definição,*

$$\begin{aligned} x' &= R_m x = y - z = y - (z_0 + z') = y - z_0 - z' = \\ &= (y + z_0) - 2z_0 - z' = y' + \underbrace{(-2z_0 - z')}_{z'' \perp (l - y')} = \end{aligned}$$

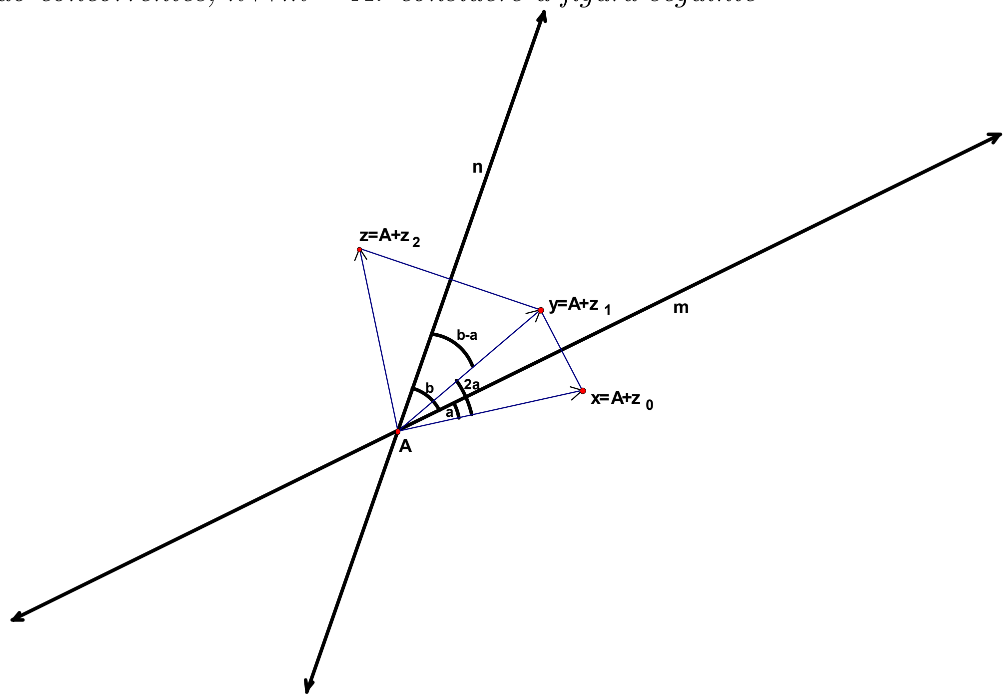
Então

$$\begin{aligned} R_n R_m x &= R_n x' = y' - z'' = y' + 2z_0 + z' = \\ &= (y' - z_0) + 2z_0 + z_0 + z' = y + 2z_0 + z_0 + (z - z_0) \\ &= (y + z) + 2z_0 = x + 2z_0 \end{aligned}$$

Concluímos assim que neste caso $f = T_{2z_0}$ *é uma* translação *por um vector ortogonal às duas rectas e de norma o dobro da distância entres as rectas: é claro que o argumento mostra, mais geralmente que dada uma translação qualquer,* T_a*, ela pode ser escrita como o produto* $R_n R_m$ *em que* m *e* n *são duas quaisquer rectas ortogonais ao vector* a *(e portanto paralelas) e que distam entre si* $\|a\| / 2$.



b) *Se n e m são concorrentes, $n \cap m = A$: considere a figura seguinte*

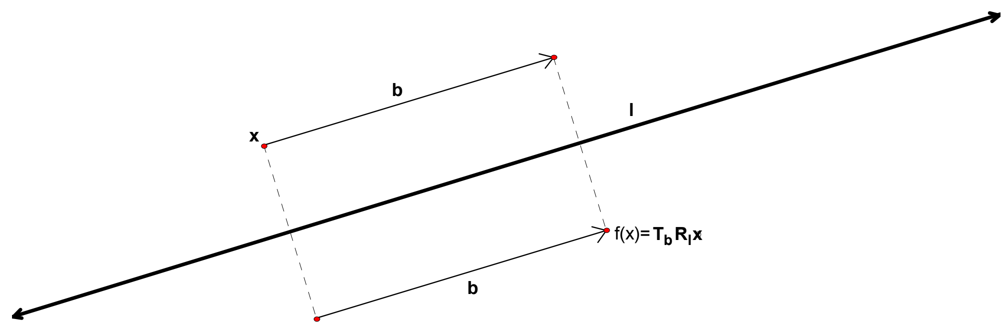


Dado um ponto arbitrário, x, escreva-se $x = A + z_0$; seja a o ângulo orientado do vector z_0 para a recta m e b o ângulo orientado da recta m para a recta n: medimos os ângulos orientados segundo a convenção usual de considerar positivos os que estão orientados no sentido directo e negativos os de sentido retrógrado. Seja $R_m x = y = A + z_1$: é claro pela definição de reflexão numa recta que os triângulos rectângulos que têm um cateto comum na recta m e vértices A, x, y são congruentes,logo $\|z_1\| = \|z_0\|$ e o ângulo de z_0 para z_1 é igual a $2a$: então o ângulo de z_1 para l é $b-a$. De forma análoga, sendo $z = R_n y = A + z_2$, temos que$\|z_2\| = \|z_1\| = \|z_0\|$ e o ângulo de n para z_2 é também $b-a$. Temos então que o ângulo de z_1 para z_2 é igual a $2a + (b-a) + (b-a) = 2b$: a isometria $f = R_n R_m$ é uma rotação de ângulo $2b$ e centro A: $f = R(A, 2b)$. Note-se que, tal como no caso anterior das translações, uma rotação $f = R(A, \theta)$ pode ser escrita como $f = R_n R_m$ em que m e n são duas quaisquer *rectas por A tais que o ângulo de m para n seja igual a $\theta/2$.*

Se $r = 3$, $f = R_n R_m R_l$, seja $g = R_n R_m$: pelo caso anterior g é uma translação, $g = T_a$, ou g é uma rotação, $g = R(A, \theta)$ em que θ é o dobro do ângulo entre as rectas m e n; neste segundo caso,como vimos, podemos escrever g como o produto de duas reflexões em duas quaisquer rectas por A que façam entre si um ângulo de $\theta/2$: podemos escolher a primeira dessas rectas paralela a l, isto é, supor, sem perda de generalidade, que $m \parallel l$; ora, neste caso, sabemos que $R_m R_l$ é uma translação T_b em que $\|b\|$ é o dobro da distância entre m e n. Temos, então, que se uma isometria se escreve como o produto de $r = 3$ reflexões, ela é uma reflexão seguida ou precedida de uma translação: $f = T_a R_m$ ou $f = R_m T_a$. Distinguimos agora dois casos, conforme $a \perp m$ ou não:

a) *Se $a \perp m$: podemos escrever T_a como o produto de duas reflexões em duas quaisquer rectas paralelas, ortogonais a a, e que distem entre si $\|a\|/2$: como $a \perp m$, podemos supor que uma dessas rectas é precisamente m; se $f = T_a R_m$ temos então que $f = (R_l R_m) R_m = R_l$, ou seja, f é uma reflexão numa recta paralela a m e que dista dela $\|a\|/2$; o caso $f = R_m T_a$ é análogo: $f = (R_m R_m) R_l = R_l$*

b) *No outro caso escrevemos $a = b + c$ com $b \parallel m$ e $c \perp m$: temos que $T_a = T_{b+c} = T_b T_c = T_c T_b$. Se $f = T_a R_m$, $f = (T_b T_c) R_m = T_b (T_c R_m)$: como vimos no caso anterior, como $c \perp m$, $T_c R_m = R_l$, em que l é paralela a m e dista dela $\|c\|/2$, portanto $f = T_b R_l$ com $b \parallel l$; o caso $f = R_m T_a$ é análogo: $f = (R_m T_c) T_b = R_l T_b$. Concluimos, assim, que f é uma reflexão deslizante: uma reflexão numa recta, seguida ou precedida de translação por um vector paralelo à recta: $f = T_b R_l = R_l T_b$ (verifica-se facilmente a comutatividade)*



Para concluir a classificação falta apenas verificar que os quatro tipos descritos são de facto distintos: uma isometria não pode ser de dois tipos diferentes. Observe-se, primeiro, que uma isometria ou é directa ou é inversa e não pode ser dos dois tipos: isso decorre da definição de isometrias directas como aquelas cuja parte ortogonal tem determinante 1 (é ortogonal especial) e da unicidade *da decomposição $f = T_a L$, $L \in O(n)$. Pelo exercício nº 34, as translações e as rotações são isometrias directas e as reflexões e reflexões deslizantes são inversas; por outro lado, uma translação não tem pontos fixos e uma rotação fixa um ponto e uma reflexão deslizante não tem pontos fixos e uma reflexão fixa os pontos da recta de reflexão.*