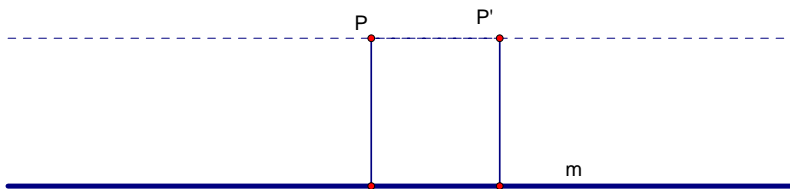
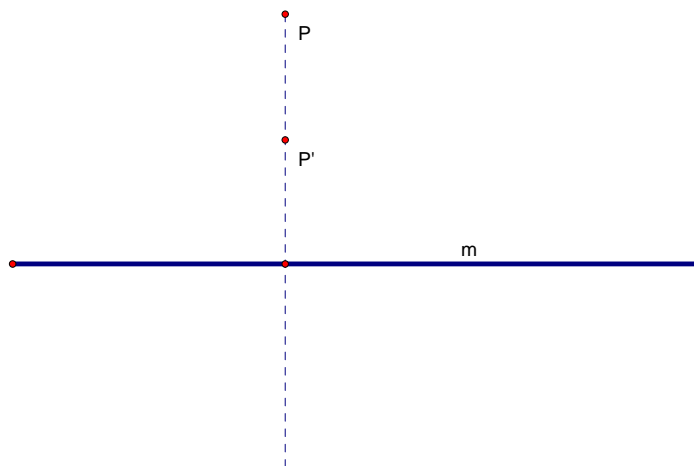


Algumas definições necessárias para a resolução dos exercícios 53 e 54:

Um shear, S_m , com eixo a recta m é a aplicação afim que fixa m e envia um ponto P em P' tal que $\overline{PP'} \parallel m$.



Um strain, T_m , com eixo a recta m é a aplicação afim que fixa m e envia um ponto P em P' tal que $\overline{PP'} \perp m$.



Exercício 54 : Verifique a seguinte igualdade:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{21} & b_1 \\ a_{21} & a_{11} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com $j = \frac{(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})}{a_{11}^2 + a_{21}^2}$, $k = \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{11}^2 + a_{21}^2}$, não nulos porque $|A| \neq 0$

Resolução:

Atendendo à associatividade do produto matricial, vamos começar a verificação pelo produto das duas últimas matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & j & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})}{a_{11}^2 + a_{21}^2} & 0 \\ 0 & \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{11}^2 + a_{21}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De seguida,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{21} & b_1 \\ a_{21} & a_{11} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})}{a_{11}^2 + a_{21}^2} & 0 \\ 0 & \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{11}^2 + a_{21}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \frac{(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})}{a_{11}^2 + a_{21}^2} - a_{21} \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{11}^2 + a_{21}^2} & b_1 \\ a_{21} & a_{21} \frac{(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})}{a_{11}^2 + a_{21}^2} + a_{11} \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{11}^2 + a_{21}^2} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{array}{l|l}
a_{11} \frac{(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})}{a_{11}^2 + a_{21}^2} - a_{21} \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{11}^2 + a_{21}^2} = & a_{21} \frac{(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})}{a_{11}^2 + a_{21}^2} + a_{11} \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{11}^2 + a_{21}^2} = \\
\frac{a_{11}(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}) - a_{21}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{11}^2 + a_{21}^2} = & \frac{a_{21}(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}) + a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{11}^2 + a_{21}^2} = \\
\frac{a_{11}^2a_{12} + a_{11}a_{21}a_{22} - a_{11}a_{21}a_{22} + a_{12}a_{21}^2}{a_{11}^2 + a_{21}^2} = & \frac{a_{11}a_{12}a_{21} + a_{21}^2a_{22} + a_{11}^2a_{22} - a_{11}a_{12}a_{21}}{a_{11}^2 + a_{21}^2} = \\
\frac{a_{12}(a_{11}^2 + a_{21}^2)}{a_{11}^2 + a_{21}^2} = & \frac{a_{22}(a_{11}^2 + a_{21}^2)}{a_{11}^2 + a_{21}^2} = \\
a_{12} & a_{22}
\end{array}$$

Assim,

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \frac{(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})}{a_{11}^2 + a_{21}^2} - a_{21} \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{11}^2 + a_{21}^2} & b_1 \\ a_{21} & a_{21} \frac{(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})}{a_{11}^2 + a_{21}^2} + a_{11} \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{11}^2 + a_{21}^2} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

EXERCÍCIO 55: Provar que um shear no eixo dos xx , S_x , se pode escrever como um produto de strains e similitudes.

Para resolvermos o exercício recorreremos ao livro Martin, George E., *Transformation Geometry – Na Introduction to Symmetry*, Springer-Verlag

É-nos dada pelo autor a seguinte factorização:

$$S_x = L_1 \circ T_y \circ L_2$$

$$S_x : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases} \quad (\text{shear})$$

$$L_1 : \begin{cases} x' = \frac{5 - \sqrt{5}}{20}x + \frac{5 - 3\sqrt{5}}{20}y \\ y' = \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{20}x + \frac{5 - \sqrt{5}}{20}y \end{cases} \quad (\text{similitude})$$

$$T_y : \begin{cases} x' = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}x \\ y' = y \end{cases} \quad (\text{strain})$$

$$L_2 : \begin{cases} x' = 2x + (1 + \sqrt{5})y \\ y' = -(1 + \sqrt{5})x + 2y \end{cases} \quad (\text{similitude})$$

A confirmação matricial da factorização será apresentada no final do exercício. Por agora vamos debruçar sobre o seu significado geométrico.

Representação geométrica de S_x :

$$S_x : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases} \text{ tem a seguinte representação matricial: } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

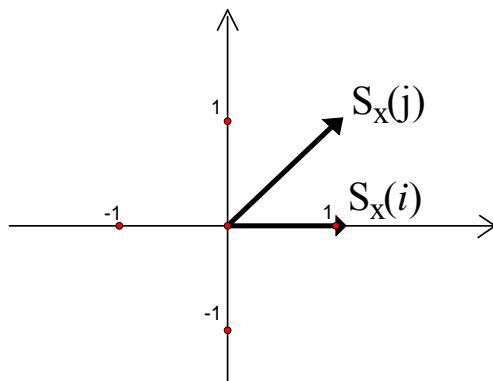
Sejam $i = (1,0)$ e $j = (0,1)$ vectores da base canónica de \mathfrak{R}^2

$$S_x(i) : \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (1,0)$$

$$S_x(j) : \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (1,1)$$

e portanto:

S_x :



Representação geométrica de L_1 :

$$L_1 \text{ é uma similitude de equações: } \begin{cases} x' = \frac{5 - \sqrt{5}}{20}x + \frac{5 - 3\sqrt{5}}{20}y \\ y' = \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{20}x + \frac{5 - \sqrt{5}}{20}y \end{cases}$$

Vamos escrever L_1 como o produto de uma rotação $R(0, \alpha)$ por uma homotetia $D(0, k)$, por isso será necessário calcular α e κ .

Comecemos por κ .

A forma mais simples de calcularmos κ , seria considerarmos o comprimento de $L_1(i)$ ou $L_1(j)$. A norma de $L_1(i)$, $\|L_1(i)\|$ é igual à norma de $D(0, k)(i)$, $\|D(0, k)(i)\|$, visto que $R(0, \alpha)$ é uma isometria, logo preserva distâncias.

$$L_1(i) = L_1(1, 0) = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{20}, \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{20} \right)$$

$$\|L_1(i)\| = \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{20}\right)^2 + \left(\frac{-5 + 3\sqrt{5}}{20}\right)^2} = \sqrt{\frac{25 + 5 - 10\sqrt{5} + 25 + 45 - 30\sqrt{5}}{20^2}} = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{20}}$$

$$\text{Logo, } \|L_1(i)\| = \|D(0, k)(i)\| = k \cdot 1 = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{20}}$$

$$\therefore k = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{20}}$$

Como $L_1 = R(0, 2) \circ D(0, k)$ então

$$k + \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5 - \sqrt{5}}{20} & \frac{5 - 3\sqrt{5}}{20} \\ \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{20} & \frac{5 - \sqrt{5}}{20} \end{pmatrix} \quad (\text{representação matricial de } L_1)$$

e portanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} k \cdot \cos \alpha = \frac{5 - \sqrt{5}}{20} \\ k \cdot \operatorname{sen} \alpha = \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{20} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{20}} \cdot \cos \alpha = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{20} \\ \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{20}} \cdot \operatorname{sen} \alpha = \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{20} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{\frac{5 - \sqrt{5}}{20}}{\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{20}}} \\ \operatorname{sen} \alpha = \frac{\frac{-5 + 3\sqrt{5}}{20}}{\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{20}}} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \arccos \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}} \right) \\ \alpha = \operatorname{arcsen} \left(\frac{-5 + 3\sqrt{5}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}} \right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \cong 31,71^\circ \vee \alpha \cong -31,71^\circ \\ \alpha \cong 31,71^\circ \vee \alpha \cong 121,71^\circ \end{array} \right.$$

$$\therefore \alpha \cong 31,7^\circ$$

$$L_1 = R(0,2) \circ D(0,k), \quad k = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{20}}, \quad \alpha \cong 31,71^\circ$$

Estamos agora em condições de representar geometricamente $L_1(i)$ e $L_1(j)$:

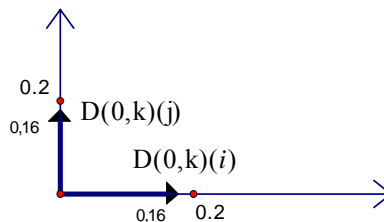
$$L_1(i) = R(0,2) \circ D(0,k)(i)$$

$$L_1(j) = R(0,2) \circ D(0,k)(j)$$

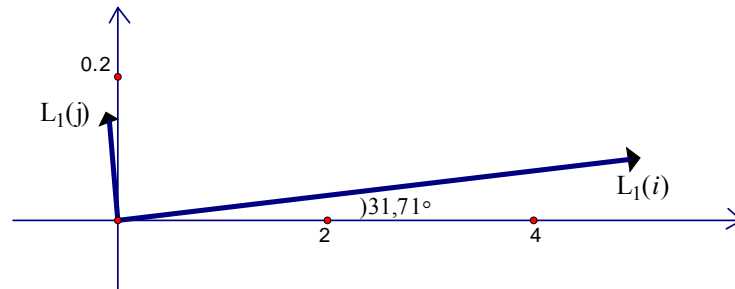
$$D(0,k)(i) = k \cdot (1,0) = \left(\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{20}}, 0 \right) \cong (0,16,0)$$

$$D(0,k)(j) = k \cdot (0,1) = \left(0, \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{20}} \right) \cong (0,0,16)$$

O que equivale à seguinte representação:



Rodando a figura um ângulo de $31,71^\circ$, obtemos uma aproximação do que será a representação geométrica de L_1 :



$$L_1(i) = L_1(1,0) = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{20}, \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{20} \right) = (a_1, a_2)$$

$$L_1(j) = L_1(0,1) = \left(\frac{5 - 3\sqrt{5}}{20}, \frac{5 - \sqrt{5}}{20} \right) = (b_1, b_2)$$

Representação geométrica de L_2 :

$$L_2 \text{ é uma similitude de equações: } \begin{cases} x' = 2x + (1 + \sqrt{5})y \\ y' = -(1 + \sqrt{5})x + 2y \end{cases}$$

Vamos escrever L_1 como o produto de uma rotação $R(0, \alpha')$ por uma homotetia $D(0, k')$.

O cálculo de α' e k' é efectuado de forma análoga ao cálculo em L_1 . Portanto:

$$L_2(i) = L_2(1,0) = (2, -(1 + \sqrt{5}))$$

$$\|L_2(i)\| = \sqrt{4 + (-(1 + \sqrt{5}))^2} = \sqrt{4 + 1 + 5 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = k'.1$$

$$\square k' = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

Como $L_2 = R(0, \alpha')$ o $D(0, K')$,

$$\text{então, } k' \times \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 + \sqrt{5} \\ -(1 + \sqrt{5}) & 2 \end{pmatrix} \text{ (representação matricial de } L_2)$$

$$\begin{cases} k' \cdot \cos \alpha' = 2 \\ k' \cdot \operatorname{sen} \alpha' = -(1 + \sqrt{5}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \cdot \cos \alpha' = 2 \\ \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \cdot \operatorname{sen} \alpha' = -(1 + \sqrt{5}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha' = \frac{2}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \\ \operatorname{sen} \alpha' = \frac{-(1 + \sqrt{5})}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

e portanto:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' = \arccos \frac{2}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \\ \alpha' = \operatorname{arcsen} \frac{-(1 + \sqrt{5})}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' \cong 58,28^\circ \vee \alpha' = -58,28^\circ \\ \alpha' \cong -58,28^\circ \vee \alpha' = -148,2^\circ \end{cases}$$

$$\therefore \alpha' \cong -58,28^\circ$$

$$L_2: R(0, \alpha') \circ D(0, k'), \quad k' = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \quad \alpha' \cong -58,28^\circ$$

Estamos agora em condições de representar geometricamente $L_2(i)$ e $L_2(j)$

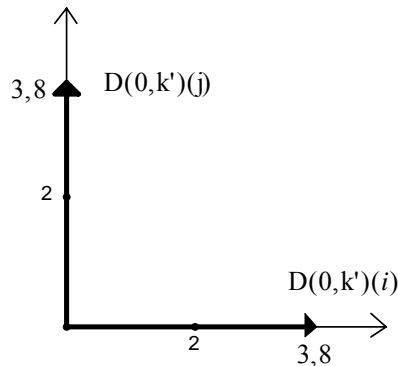
$$L_2(i) = R(0, \alpha') \circ D(0, k')(i)$$

$$L_2(j) = R(0, \alpha') \circ D(0, k')(j)$$

$$D(0, k')(i) = k'(1, 0) = (\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, 0) \cong (3,8 ; 0)$$

$$D(0, k')(j) = k'(0, 1) = (0, \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}) \cong (0 ; 3,8)$$

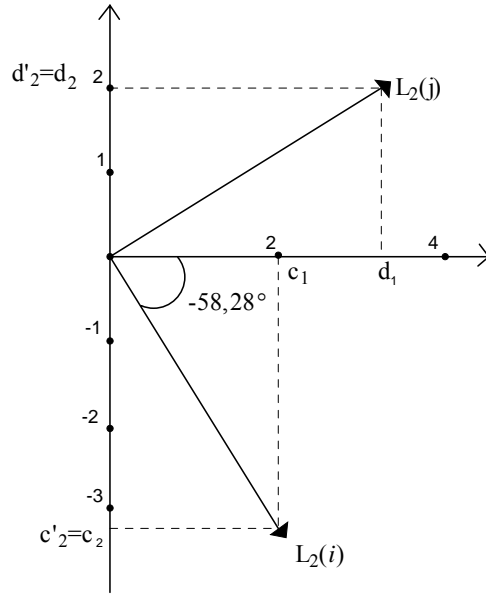
O que equivale à seguinte representação:



Rodando a figura anterior de um ângulo de $\cong -58,28^\circ$, obtemos uma aproximação do que será a representação geométrica de L_2 :

$$L_2(i) = L_2(1, 0) = (2, -(1 + \sqrt{5})) = (c_1, c_2)$$

$$L_2(j) = L_2(0, 1) = (1 + \sqrt{5}, 2) = (d_1, d_2)$$



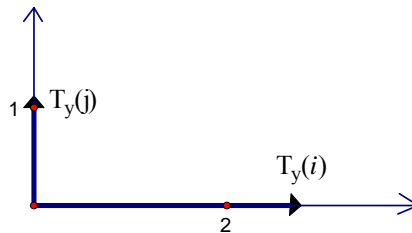
Representação geométrica de T_y o L_2 :

T_y é um strain no eixo dos yy com as seguintes equações: $x' = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \cdot x$
 $y' = y$

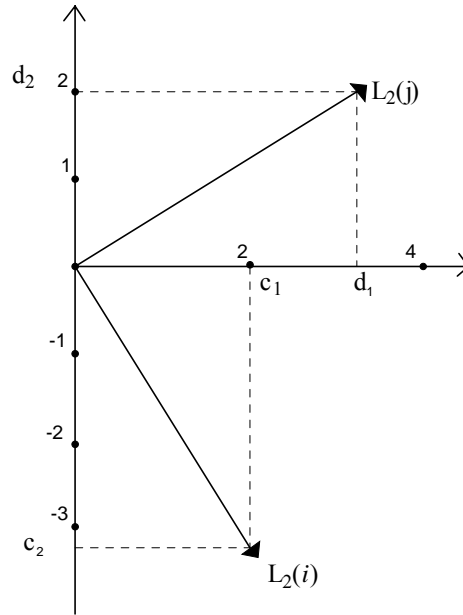
$$T_y(i) = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, 0 \right)$$

$$T_y(j) = (0, 1)$$

e portanto T_y pode ser representado graficamente desta forma:



O que quer dizer que se se aplicar T_y a um vector v , a componente horizontal de v será multiplicada por $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ao passo que a componente vertical do vector v não irá sofrer qualquer alteração. E se atendermos ao gráfico de L_2 :



Componente horizontal de $L_1(i) = a_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{20} \cong \cos(31,71^\circ) \times 0,16$, e portanto, componente

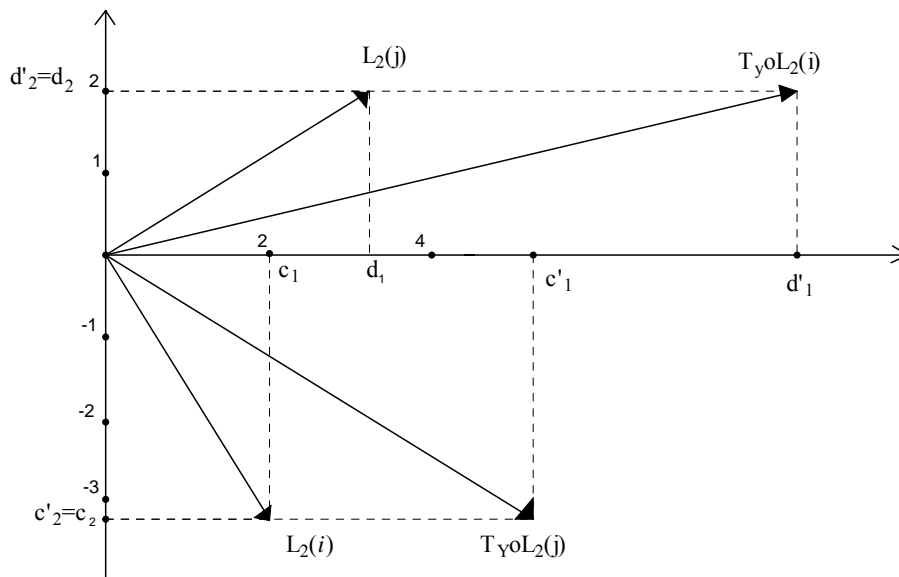
horizontal T_y o $L_2(i) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \times 2 = 3+\sqrt{5}$.

Como a componente vertical de T_y o $L_2(i)$ permanece inalterada, temos que T_y o $L_2(i) = (c'_1, c'_2) = (3+\sqrt{5}, -1-\sqrt{5}) = (c'_1, c'_2)$.

Do mesmo modo, componente horizontal de T_y o $L_2(j) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \times d_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \times (1+\sqrt{5})$.

Como a componente vertical de T_y o $L_2(j)$ permanece inalterada, temos que T_y o $L_2(j) = (d'_1, d'_2) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \times (1+\sqrt{5}), 2 \right) = (d'_1, d'_2)$.

Portanto, T_y o L_2 terá a seguinte representação gráfica:



Para finalizar a 1ª parte do exercício, falta aplicar a T_y o L_2 , a similitude L_1 .

$L_1 = R(0, \alpha)$ o $D(0, k)$ com $k = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20}}$, $\alpha = \arccos\left(\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{5}}}\right)$, $\alpha \in 1^\circ Q$, portanto, $\alpha \cong 31,71^\circ$.

Aplicar L_1 a T_y o L_2 significa multiplicar por k os vectores T_y o $L_2(i)$ e T_y o $L_2(j)$ e em seguida aplicar aos vectores uma rotação de α em torno da origem. E portanto:

$$\begin{aligned} D(0, K) \text{ o } T_y \text{ o } L_2(i) &= k \cdot (3 + \sqrt{5}, -1 - \sqrt{5}) = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20}} (3 + \sqrt{5}, -1 - \sqrt{5}) = \\ &= \left(\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20}} (3 + \sqrt{5}), \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20}} (-1 - \sqrt{5}) \right) = (e_1, e_2) \cong (0,85; -0,52) \end{aligned}$$

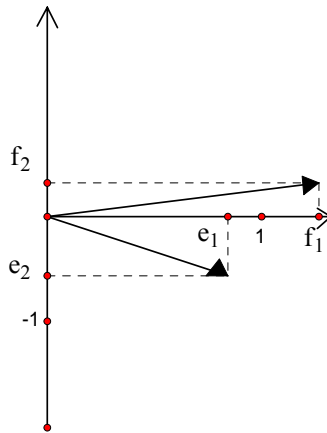
$$\begin{aligned} D(0, K) \text{ o } T_y \text{ o } L_2(j) &= k \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \times (1 + \sqrt{5}), 2 \right) = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20}} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \times (1 + \sqrt{5}), 2 \right) = \\ &= \left(\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \cdot (1 + \sqrt{5}), 2 \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20}} \right) = (f_1, f_2) \cong (1,376; 0,32) \end{aligned}$$

Como a rotação $R(0, \alpha)$ é uma isometria, a norma dos vectores (e_1, e_2) e (f_1, f_2) permanecerão inalteradas com a aplicação da rotação em causa. Podemos desta forma avançar para o cálculo das normas em questão:

$$\begin{aligned} \|L_1 \circ T_y \circ L_2(i)\| &= \|D(0, K) \circ T_y \circ L_2(i)\| = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20}} \cdot (3+\sqrt{5})\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20}} \cdot (-1-\sqrt{5})\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20} \cdot (9+5+6\sqrt{5}) + \frac{5-2\sqrt{5}}{20} \cdot (1+5+2\sqrt{5})} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20} (9+5+6\sqrt{5}+1+5+2\sqrt{5})} = \\ &= \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20} (20+8\sqrt{5})} = \sqrt{\frac{100+40\sqrt{5}-40\sqrt{5}-80}{20}} = 1 \end{aligned}$$

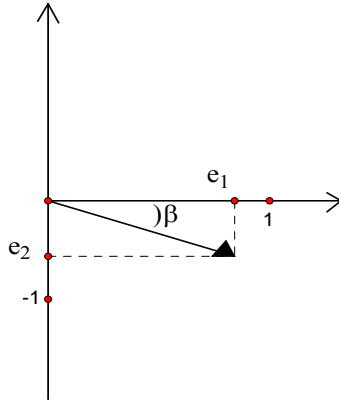
$$\begin{aligned} \|L_1 \circ T_y \circ L_2(j)\| &= \|D(0, K) \circ T_y \circ L_2(j)\| = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20}} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot (1+\sqrt{5})\right)^2 + \left(2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20} \cdot \left(\frac{9+5+6\sqrt{5}}{4}\right) \cdot (1+5+2\sqrt{5}) + 4 \cdot \frac{5-2\sqrt{5}}{20}} = \\ &= \sqrt{\frac{(45+25+30\sqrt{5}-18\sqrt{5}-10\sqrt{5}-60)(6+2\sqrt{5})}{80} + \frac{5-2\sqrt{5}}{20}} = \sqrt{\frac{(10+2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{80} + \frac{5-2\sqrt{5}}{20}} = \\ &= \sqrt{\frac{60+20\sqrt{5}+12\sqrt{5}+20}{80} + \frac{80-32\sqrt{5}}{80}} = \sqrt{\frac{160}{80}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

E assim, podemos representar $D(0, k) \circ T_y \circ L_2$ da seguinte forma:



$$\text{com } \|(e_1, e_2)\| = 1 \text{ e } \|(f_1, f_2)\| = \sqrt{2}$$

Antes de aplicar a rotação, vamos calcular o ângulo que o vector (e_1, e_2) faz com o eixo dos xx :



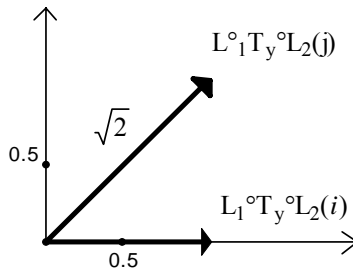
β como ângulo orientado $\in 4^\circ$ quadrante.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \beta &= \frac{e_2}{\|(e_1, e_2)\|} = \frac{e_2}{1} = e_2 = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20}} (-1-\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}(-1-\sqrt{5})}{\sqrt{20}} \times \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \\ &= \frac{(5-2\sqrt{5}) \cdot (-1-\sqrt{5})}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{-5-5\sqrt{5}+2\sqrt{5}+10}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{5-3\sqrt{5}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{5-2\sqrt{5}}} = -\operatorname{sen} \alpha \end{aligned}$$

Como $\alpha \in 1^\circ$ quadrante, então $\alpha = -\beta$.

Pelo que a rotação $R(0, \alpha)$ irá rodar em torno da origem o vector (e_1, e_2) até este se tornar num vector horizontal (paralelo ao eixo dos xx).

Estamos portanto em condições de representar graficamente a aplicação $L_1 \circ T_y \circ L_2$



Pelo facto de $L_1 \circ T_y \circ L_2(i)$ ser um vector paralelo ao eixo dos xx , com norma 1, tendo como o ponto de aplicação a origem, posso concluir que $L_1 \circ T_y \circ L_2(i) = (1, 0)$

$\|L_1 \circ T_y \circ L_2(j)\| = \sqrt{2}$ e portanto para mostrar que $L_1 \circ T_y \circ L_2$ representa o shear S_x : $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, é necessário que a componente vertical e horizontal do vector $L_1 \circ T_y \circ L_2(j)$ tenha o valor 1, ou seja, $L_1 \circ T_y \circ L_2(j) = (1, 1)$.

Como $\| L_1 \circ T_y \circ L_2 (j) \| = \sqrt{2}$, é suficiente provarmos que uma das coordenadas do vector em questão tenha valor 1 (pelo teorema de Pitágoras $(\sqrt{2})^2 = 1^2 + c_2^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow c_2^2 = 1$).

$$D(0,k) \circ T_y \circ L_2 (j) = \left(\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot (1+\sqrt{5}), 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20}} \right)$$

$R(0, \alpha)$ tem a seguinte representação matricial: $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

$$\text{Pelo que } \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot (1+\sqrt{5}) \\ 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20}} \end{pmatrix} = L_1 \circ T_y \circ L_2 (j)$$

$$h(L_1 \circ T_y \circ L_2 (j)) = \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{20} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot (1+\sqrt{5}) - \operatorname{sen} \alpha \cdot 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20}}$$

com:

$$\cos \alpha = \frac{(5-\sqrt{5})}{\sqrt{5-2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{20}} \quad ; \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{-5+3\sqrt{5}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$

Portanto a componente horizontal do vector $L_1 \circ T_y \circ L_2 (j) =$

$$= \frac{(5-\sqrt{5})}{\sqrt{5-2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{20}} \cdot \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot (1+\sqrt{5}) + \frac{5-3\sqrt{5}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{5-2\sqrt{5}}} \cdot 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20}} =$$

$$= \frac{(5-5\sqrt{5}) \cdot \sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}} \cdot 20} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot (1+\sqrt{5}) + \frac{(5-3\sqrt{5})}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{5-2\sqrt{5}}} \cdot \frac{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{20}} =$$

$$= \frac{(5-\sqrt{5}) \cdot \sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}} \cdot 20} \cdot \frac{(3+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{2} + \frac{2(5-3\sqrt{5})}{20} =$$

$$= \frac{(5-\sqrt{5}) \cdot (3+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{20} + \frac{2(5-3\sqrt{5})}{20} = \frac{(5-\sqrt{5})(8+4\sqrt{5})}{40} + \frac{2(5-3\sqrt{5})}{20} =$$

$$= \frac{40 + 12\sqrt{5} - 20}{40} + \frac{2 \cdot (5 - 3\sqrt{5})}{20} = \frac{20 + 12\sqrt{5}}{40} + \frac{2(5 - 3\sqrt{5})}{20} =$$

$$= \frac{10 + 6\sqrt{5}}{20} + \frac{2(5 - 3\sqrt{5})}{20} = \frac{10 + 6\sqrt{5} + 10 - 6\sqrt{5}}{20} = 1$$

Logo, como foi dito anteriormente, a componente horizontal do vector $L_1 \circ T_y \circ L_2(j) = 1$.

Pelo que $L_1 \circ T_y \circ L_2(j) = (1,1)$ e portanto fica provado geometricamente que $S_x = L_1 \circ T_y \circ L_2$.

Generalizando o resultado, o autor considera que o shear S_x' cuja representação

matricial é: $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, pode ser obtido da seguinte forma: $S_x' = T_y' \circ S_x \circ T_y''$ em que:

T_y' representa o strain no eixo dos yy de razão k

S_x representa o shear descrito anteriormente (shear no eixo dos xx de razão 1)

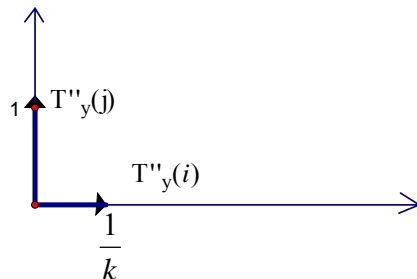
T_y'' representa o strain no eixo dos yy de razão $1/k$

Representação geométrica de T_y'' :

T_y'' é representado pelas equações: $\begin{cases} x' = x/k \\ y' = y \end{cases}$

pelo que $T_y''(i) = T_y''(1,0) = (1/k, 0)$ e $T_y''(j) = T_y''(0,1) = (0,1)$

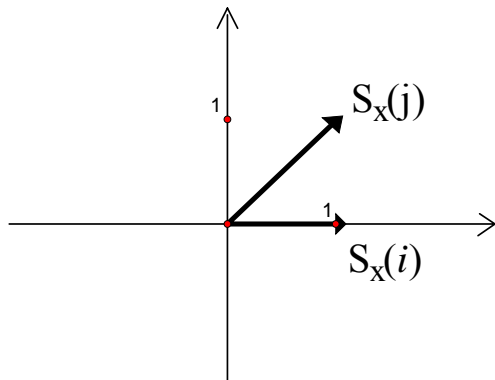
Assim, T_y'' pode ser representado da seguinte forma:



(Neste caso, $k > 1$ mas também poderia considerar $k < 1$)

Graficamente considero $k > 1$ mas os cálculos algébricos abrangem $k \in \mathbb{R}^+$.

Como foi feito no início do exercício, $S_x : \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pode ser representado da seguinte forma:



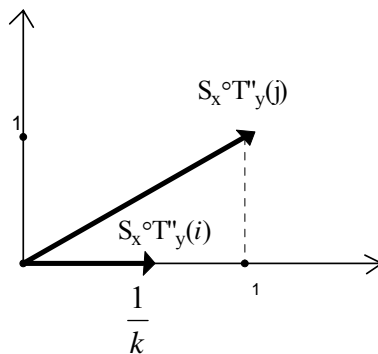
com $S_x(i) = (1,0)$

$S_x(j) = (1,1)$

e mais geralmente $S_x(x, y) = (x + y, y)$

Portanto, $S_x \circ T_y''(i) = S_x(1/k, 0) = (1/k, 0)$ e $S_x \circ T_y''(j) = S_x(1, 0) = (1, 1)$

Assim, $S_x \circ T_y''$ tem a seguinte representação geométrica:

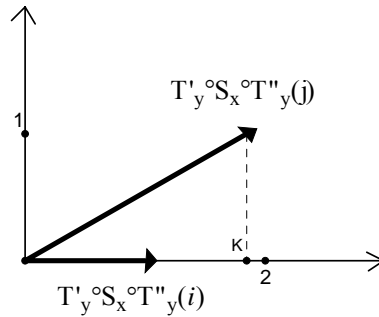


Tendo em conta que T_y' é representado por : $\begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases}$,

$T_y' \circ S_x \circ T_y''(i) = T_y'(1/k, 0) = (1, 0)$

$T_y' \circ S_x \circ T_y''(j) = T_y'(1, 1) = (k, 1)$

e portanto $T_y' \circ S_x \circ T_y''$ pode ser representado da seguinte forma:



que também corresponde ao gráfico de um strain T'_y no eixo dos xx de razão k .

Fica assim provado que um shear no eixo dos xx de razão k , S_x , pode ser factorizado da seguinte forma: $S_x = T'_y \circ S_x \circ T''_y$. Como $S_x = L_1 \circ T_y \circ L_2$, então $S_x = T'_y \circ L_1 \circ T_y \circ L_2 \circ T''_y$, ficando assim provado que um shear no eixo dos xx de razão k pode ser factorizado como um produto de strains e similitudes.

Em seguida e para finalizarmos o exercício iremos apresentar a confirmação matricial do que foi feito, que era precisamente o que o autor do livro pedia no início da prova.

Hélder Sampaio - 980301070

Iva Leite - 990301048

Sara Miriam - 010301022

Sofia Silva - 920301071

Telmo Ferreira - 000301112

Vanessa Melo - 990301121