Exercício 55

Mostre que um shear, S_x, se pode escrever como um produto de similitudes e strains.

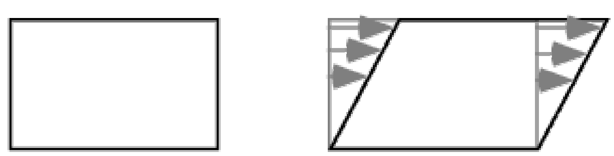
Algumas definições para uma melhor compreensão deste exercício:

Transformação afim:

Uma transformação afim é uma aplicação afim injectiva, ou seja, é uma transformação que preserva a colinearidade (isto é, todos os pontos inicialmente sobre uma recta, continuam sobre essa mesma após as transformações) e raios de distâncias (exemplo: o ponto médio de um segmento continua a sê-lo depois da transformação). Uma transformação afim de $\Re^n$ será do tipo $f = T_b L$ em que L $\in$ $GL(n,\Re)$ é um isomorfismo linear.

Shear:

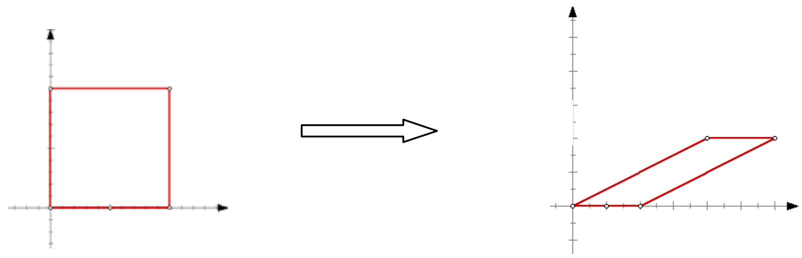
Um shear (uma transformação afim), S_m, com eixo a recta m é a aplicação afim que fixa m e envia um ponto P em P' tal que $\overline{PP'} \parallel$ m.



M M

Para um shear S_m com m o eixo dos xx, representado por S_x, temos as seguintes equações: $\begin{cases} x' = x + Ky \\ y' = y \end{cases}$.

Para melhor visualizarmos um shear no eixo dos xx vamos visualizar a transformação de um quadrado de lado dois em que um dos vértices está na origem ao qual é aplicado o shear de equação $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = y \end{cases}$:



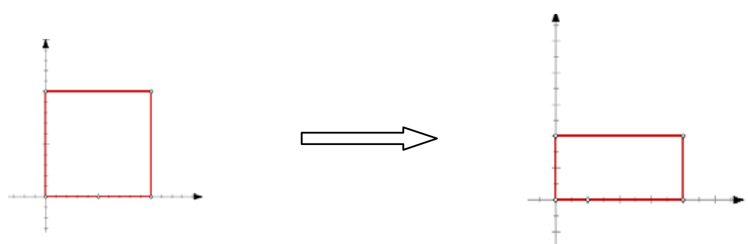
Strain:

Um shear (uma transformação afim), $\hat{T}_m$, com eixo a recta m é a aplicação afim que fixa m e envia um ponto P em P' tal que $\overline{PP'} \perp$ m.

(Nota: Definiremos o strain no eixo dos yy pois será o usado no exercício.)

Para um strain $\hat{T}_m$ com m o eixo dos yy, $\hat{T}_y$, temos as seguintes equações: $\begin{cases} x' = Kx \\ y' = y \end{cases}$.

Analogamente ao Shear, representamos o strain $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases}$:



Resolução do exercício

Vamos verificar que o shear $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases}$ pode ser factorizado na composta da similitude $\begin{cases} x' = \dfrac{5-\sqrt{5}}{20}x + \dfrac{5-3\sqrt{5}}{20}y \\ y' = \dfrac{-5+3\sqrt{5}}{20}x + \dfrac{5-\sqrt{5}}{20}y \end{cases}$ seguido do strain $\begin{cases} x' = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}x \\ y' = y \end{cases}$ e da similitude $\begin{cases} x' = 2x + (1+\sqrt{5})y \\ y' = -(1+\sqrt{5})x + 2y \end{cases}$.

$$\begin{bmatrix} \frac{5-\sqrt{5}}{20} & \frac{5-3\sqrt{5}}{20} \\ \frac{-5+3\sqrt{5}}{20} & \frac{5-\sqrt{5}}{20} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1+\sqrt{5} \\ -(1+\sqrt{5}) & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ Para o shear $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases}$ (shear de K=1) a factorização a cima é verificada.

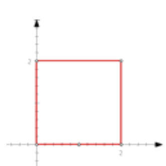
Como temos a composição de um shear de K=1, em similitudes e strains, para obtermos qualquer shear(de K qualquer), basta reduzirmos o K a um, operar a factorização verificada a cima, e voltar ao K inicial. Assim se operarmos inicialmente a factorização do shear de K=1 pelo strain $\begin{cases} x' = \frac{1}{k}x \\ y' = y \end{cases}$ e no final da factorização pelo strain $\begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases}$ obtemos o shear desejado.

$$\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

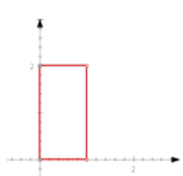
$\therefore$ Um shear é o produto de 2 similitudes e 3 strains.

Interpretação Geométrica

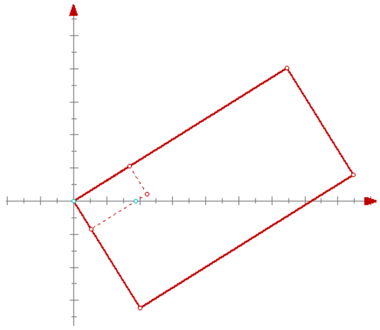
Geometricamente já vimos o que acontece quando aplicando um shear a um quadrado. Agora vamos tentar desenhar um shear aplicando o produto de strains e similitudes observado cada transformação.



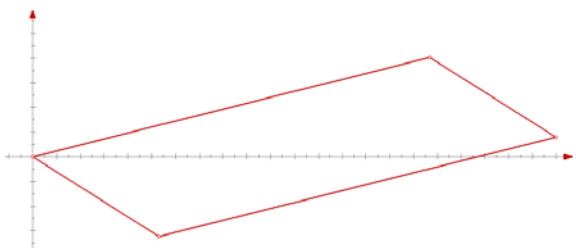
Aplicamos aos pontos do quadrado o strain $\begin{cases} x' = \frac{1}{k}x \\ y' = y \end{cases}$



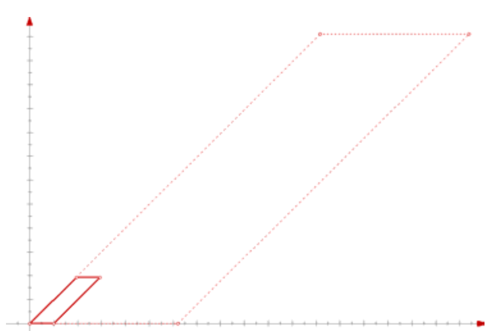
Aplicamos a primeira similitude $\begin{cases} x' = 2x + (1+\sqrt{5})y \\ y' = -(1+\sqrt{5})x + 2y \end{cases}$, executando uma rotação esticada com ponto fixo (0,0).



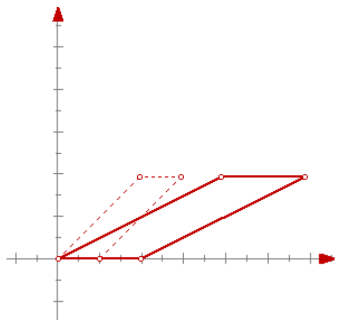
É operada o strain da fatorização $\begin{cases} x' = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}x \\ y' = y \end{cases}$, havendo um estição de factor $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ segundo o eixo dos xx.



É efectuada a segunda similitude, $\begin{cases} x' = \dfrac{5-\sqrt{5}}{20}x + \dfrac{5-3\sqrt{5}}{20}y \\ y' = \dfrac{-5+3\sqrt{5}}{20}x + \dfrac{5-\sqrt{5}}{20}y \end{cases}$, uma rotação esticada de ponto fixo (0,0), que vai "compensar" a rotação esticada e o strain anteriores levando a recta l, para o eixo dos xx, e encolhendo-a para o valor obtido na primeira etapa (quando aplicamos ao quadrado o primeiro strain).



É aplicado o último strain $\begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases}$ que leva a figura aos valores de K iniciais, pois na primeira etapa reduzimos os pontos a um factor K=1, para podermos aplicar a factorização conhecida, voltando agora para o K desejado.



$\therefore$ Concluímos geometricamente o já visto analiticamente, que um shear é o produto de strains e similitudes.

Trabalho realizado por:

Dóris Sá (010301060)
Elisabete Alves (930301122)
Helena Santos (010301035)
Letícia Silva (010301009)