

**Exercício 22 (nº 62)** Seja  $l \subset \mathbb{R}^2$  uma recta; queremos mostrar que  $S(l) \leq I(\mathbb{R}^2)$  contém um subgrupo normal com dois elementos cujo quociente é isomorfo a  $I(l) \simeq I(\mathbb{R})$  e concluir que  $S(l)$  não é isomorfo a  $I(l) \simeq I(\mathbb{R})$ .

Seja  $\phi : S(l) \longrightarrow I(l)$  dada pela restrição a  $l$ : para  $f \in S(l)$ ,  $\phi(f) = f|_l$ . Pela definição de  $S(l)$ , é claro que a função está bem definida e é um homomorfismo; além disso é sobrejectiva pelo exercício nº 13; o núcleo  $\ker(\phi)$  consiste das isometrias cuja restrição a  $l$  é a identidade:  $\ker(\phi) = \{f \in S(l) : f|_l = id_l\}$ ; pela classificação das isometrias de  $\mathbb{R}^2$ , se  $f|_l = id_l$  então  $f = id$  ou  $f = R_l$ , isto é,  $\ker(\phi) = \langle R_l \rangle = \{id, R_l\}$  é um grupo de dois elementos; pelo teorema fundamental do homomorfismo para grupos,  $\ker(\phi)$  é normal e  $S(l)/\ker(\phi) \cong I(l)$ .

Para ver que  $S(l)$  não é isomorfo a  $I(l)$  podemos mostrar que  $I(l) \simeq I(\mathbb{R})$  não contém nenhum subgrupo normal com dois elementos; da caracterização das isometrias dada pelo exercício nº 12, temos que os elementos de  $I(\mathbb{R})$  são da forma  $f = T_a L$  em que  $L \in O(1)$  é a identidade ou a aplicação  $x \longrightarrow -x$ , isto é,  $f(x) = a + x$  ou  $f(x) = a - x$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . É claro que o centro de  $I(\mathbb{R})$  é o subgrupo trivial: se  $f(x) = a + x$  e  $f$  comuta com todos os elementos do grupo, em particular temos, que para  $g(x) = a - x$

$$\begin{aligned} gf(x) &= fg(x) \Leftrightarrow a - (a + x) = a + (a - x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x = 2a - x \Leftrightarrow a = 0 \end{aligned}$$

logo  $f = id$  ou  $f(x) = -x$ , mas é claro que a aplicação  $x \longrightarrow -x$  não comuta com nenhuma translação não trivial:  $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ,  $a - x \neq -(a + x)$ . Ora, num grupo  $G$ , se  $H = \{e, \sigma\}$  é um subgrupo com dois elementos ( $e$  o elemento neutro de  $G$ ),  $H$  é normal sse  $\sigma \in Z_G$ :

$$\begin{aligned} H \trianglelefteq G &\Leftrightarrow \forall g \in G, g\sigma g^{-1} \in H \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g\sigma g^{-1} = \sigma \Leftrightarrow g\sigma = \sigma g \\ (\sigma &\neq e \Rightarrow g\sigma g^{-1} \neq e) \end{aligned}$$

**Exercício 23 (nº 63)** Seja  $X = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y) : \|y\| \leq 1\}$ , a união do eixo dos  $xx$  com o segmento do eixo dos  $yy$  de extremidades  $(0, -1)$  e  $(0, 1)$ . Se  $f \in S(X) \cong I(X)$  ( $X$  contém três pontos independentes afim...) é claro que  $f(0, 0) = (0, 0)$ , logo  $f \in O(2)$ :  $f|_X$  sendo uma isometria é um homeomorfismo de  $X$ ; ora, o ponto  $(0, 0)$  é o único ponto de  $X$  que o separa em quatro componentes conexas, todos os outros o separam em duas componentes conexas, excepto  $(0, -1)$  e  $(0, 1)$  que não o separam; ora se  $h \in \text{Homeo}(X)$  e  $h(a) = b$ , então  $h|_{X - \{a\}}$  é um homeomorfismo de  $X - \{a\}$  em  $X - \{b\}$  e portanto os dois espaços têm o mesmo número de componentes conexas. Temos portanto que terá de ser  $f(0, 0) = (0, 0)$ . Por outro lado, é claro que  $f$  tem de enviar o eixo dos  $xx$  nele próprio e o segmento do eixo dos  $yy$  também nele próprio: portanto, como  $f(0, 0) = (0, 0)$ , a restrição de  $f$  ao eixo dos  $xx$  ou é a identidade ou a aplicação  $(x, 0) \longrightarrow (-x, 0)$  e a restrição de  $f$  ao eixo dos  $yy$  ou é a identidade ou a aplicação  $(0, y) \longrightarrow (0, -y)$ : designando a base canónica de  $\mathbb{R}^2$  por  $\{i, j\}$ , temos assim que  $f(i) = \pm i$  e  $f(j) = \pm j$ : temos portanto quatro possibilidades, incluindo a identidade:  $f = id$ ,  $f = R_x$ ,  $f = R_y$ ,  $f(X) = -X$  em que  $R_x$  e  $R_y$  são as reflexões nos eixos coordenados; temos um grupo de quatro elementos todos idempotentes, que é por isso isomorfo ao grupo de Klein.