

Exercício 24 (nº 68) Conclusão da prova do Teorema de Leonardo

(...) O subgrupo de G das isometrias directas, G_d , consiste num número finito de rotações de centro c . É fácil provar que G_d é cíclico, gerado pela rotação ρ de menor ângulo: considere-se o subgrupo cíclico gerado por ρ : como tem de ser finito é da forma $\langle \rho \rangle = \{\rho, \rho^2, \dots, \rho^n = 1\}$ em que n é o menor natural tal que $\rho^n = 1$; ρ é então uma rotação de ângulo $2\pi/n$; resta ver que $G_d = \langle \rho \rangle$: seja $f = R(0, \theta)$ um elemento arbitrário de G_d ; se fosse $f \notin \langle \rho \rangle$, então $\theta \neq j(2\pi/n)$, $\forall j = 1, 2, \dots, n$, logo existiria $1 \leq k \leq n$ tal que $(k-1)(2\pi/n) < \theta < k(2\pi/n)$. Mas então G_d , sendo grupo, conteria o produto $\rho^k f^{-1}$ que é uma rotação de ângulo $k(2\pi/n) - \theta < 2\pi/n$, o que é absurdo pela escolha de ρ como rotação de ângulo mínimo. Se $G = G_d \simeq C_n$ então G é cíclico; caso contrário contém m reflexões em rectas por c : $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$; seja $\sigma = \sigma_1$ uma dessas reflexões: como os n elementos $\rho\sigma, \rho^2\sigma, \dots, \rho^n\sigma$, que são reflexões, são todos distintos temos que $m \leq n$; por outro lado $\sigma\sigma_1, \sigma\sigma_2, \dots, \sigma\sigma_m$ são m rotações distintas, logo $n \leq m$; temos então $n = m$ e portanto ρ e σ geram G , isto é, $G \simeq D_n$.

Nota: o facto de haver tantas isometrias directas como inversas em $G \leq I(\mathbb{R}^n)$, $|G_d| = |G - G_d|$, no caso de ser $G \neq G_d$, é um caso particular de um facto geral para grupos: se tivermos um grupo Γ com um subgrupo $\Delta \leq \Gamma$ de índice 2, $[\Gamma : \Delta] = 2$, então, para qualquer subgrupo $G \leq \Gamma$, ou $G = G \cap \Delta$, isto é $G \subset \Delta$, ou o índice de $G \cap \Delta$ em G é também dois, $[G : G \cap \Delta] = 2$, e portanto há tantos elementos em $G \cap \Delta$ como em $G - (G \cap \Delta)$. No nosso caso, $\Gamma = I(\mathbb{R}^n)$ e $\Delta = I_d(\mathbb{R}^n)$ é o subgrupo das isometrias directas: recorde-se (ver exercício nº 34) que $I(\mathbb{R}^n) \rightarrow \{\pm 1\}$ dada pelo determinante da parte ortogonal é um homomorfismo cujo núcleo é $I_d(\mathbb{R}^n)$.

Se $[\Gamma : \Delta] = 2$ então Δ é normal e podemos tomar o grupo quociente, $\Gamma/\Delta \cong \{\pm 1\}$, que é um grupo que tem como elementos as duas classes à esquerda (que coincidem com as classes à direita) de Δ em Γ : o próprio Δ , como elemento neutro, e o seu complementar, $\Gamma - \Delta = b\Delta$, $\forall b \in \Gamma - \Delta$. Dados dois elementos arbitrários $a, b \in \Gamma$: se ambos pertencem a $\Gamma - \Delta$, temos $(a\Delta)(b\Delta) = (ab)\Delta = \Delta \Leftrightarrow ab \in \Delta$; se $a \in \Delta$ e $b \in \Gamma$, $(a\Delta)(b\Delta) = (ab)\Delta = \Gamma - \Delta \Leftrightarrow ab \in \Gamma - \Delta$; finalmente, se ambos pertencem a Δ , que é subgrupo e portanto fechado, o seu produto também pertence a Δ . No nosso caso, isto traduz-se no facto do produto de duas isometrias directas ou o produto de duas isometrias inversas ser uma isometria directa, e o produto de uma isometria directa com uma isometria inversa ser uma isometria inversa.

Verifiquemos a afirmação, em cima, de que $[G : G \cap \Delta] = 2$ no caso de ser $G - G \cap \Delta \neq \emptyset$: recorde-se que a relação (de equivalência) que define as classes à esquerda de $G \cap \Delta$ em G , é $x \sim y \Leftrightarrow x^{-1}y \in G \cap \Delta$; para ver que $[G : G \cap \Delta] = 2$ basta ver que $G - G \cap \Delta$ é uma classe, ou seja que dois quaisquer dos seus elementos estão relacionados: se $x, y \in G - G \cap \Delta$, então, como por hipótese $[\Gamma : \Delta] = 2$ e portanto $\Gamma - \Delta$ é uma classe, temos que $x^{-1}y \in \Delta$; mas como G é subgrupo também temos que $x^{-1}y \in G$, logo $x^{-1}y \in G \cap \Delta$.

Exercício 25 (nº 69) Argumento alternativo - mais complicado mas mais elementar - ao do centroide, para mostrar que existe um ponto que é fixo por todas as isometrias de um subgrupo finito $G \leq I(\mathbb{R}^2)$.

- a) Se G contém uma translação, T_a , então G contém o subgrupo cíclico gerado por T_a , que é infinito, $\langle T_a \rangle = \{T_{na} : n \in \mathbb{Z}\}$, logo G é infinito.

- b) Se G contém uma reflexão deslizante, $\alpha = T_b R_m = R_m T_b$ com $b \parallel m$, então G contém $\alpha^2 = T_{2b}$, logo por a) é infinito.
- c) Se G contém duas rotações de centros distintos, $\rho_1 = R(A, \theta)$ e $\rho_2 = R(B, \phi)$, $A \neq B$, então pelo Teorema da Adição de Ângulos (Exercício 2.1 - 23) ou $\theta + \phi = 0 \pmod{2\pi}$, e então $\rho_2 \rho_1$ é uma translação, ou temos que $\alpha = \rho_2 \rho_1 = R(C, \theta + \phi)$; neste caso, temos também que $\beta = \rho_2^{-1} \rho_1^{-1} = R(D, -\theta - \phi)$ e pela prova geométrica do Teorema, $C \neq D$: então, de novo pelo Teorema, $\beta \alpha$ é uma translação. Concluindo, se G contém rotações de centros distintos, então contém uma translação e por a) é infinito.
- d) Se G contém uma rotação, $\rho = R(A, \theta)$, e uma reflexão, $\sigma = R_l$, numa recta l que não passa por A : escrevendo $\rho = R_n R_m$ em que n, m são duas rectas por A , fazendo entre si um ângulo de $\theta/2$, podemos escolher $m \parallel l$ e então $\rho \sigma = R_n R_m R_l = R_n T_b$, que, pela classificação das isometrias (exercício nº 36), ou é uma translação (se $b \perp n$) ou uma reflexão deslizante; em qualquer dos casos, por a) ou b), G é infinito.

Podemos agora concluir: se $G \leq I(\mathbb{R}^2)$ é finito, então por a) e b) só pode conter rotações ou reflexões e por c) todas as suas rotações têm o mesmo centro, digamos A ; se G só contém rotações, isto é $G = G_d$, então o ponto A é o ponto pretendido; se G contém reflexões, ou só contém uma, isto é, $G = \{id, R_m\}$ e então todos os pontos de m são fixos pelas (duas) isometrias de G , ou contém mais do que uma e então contém isometrias directas não-triviais que serão rotações, todas com o mesmo centro A ; por d) qualquer reflexão de G terá como eixo uma recta por A , logo A será fixo por todos os elementos de G .