

Exercício 26 (nº 74) Na definição de **parafuso**, $T_a R(l, \alpha)$, é $a \parallel l$. Queremos ver que, em geral, a composição $T_a R(l, \alpha)$ é um parafuso, excepto se $a \perp l$, caso em que é ainda uma rotação $R(m, \alpha)$ com $m \parallel l$.

Começamos por notar que os argumentos do exercício nº 36, que dão a caracterização das translações e das rotações do plano como produto de duas reflexões em rectas, se adaptam naturalmente ao caso tridimensional para dar caracterizações análogas:

Lema Uma translação T_a pode ser escrita como $T_a = R_H R_K$ em que H, K são dois quaisquer planos ortogonais a a (portanto paralelos) e que distam entre si $\|a\|/2$:

$$a \perp H, a \perp K, H = K + a/2 = \{k + a/2 : k \in K\}$$

Uma rotação $R(l, \alpha)$ pode ser escrita como $R(l, \alpha) = R_H R_K$ em que H, K são dois quaisquer planos por l (isto é, $H \cap K = l$) e que fazem entre si um ângulo de $\alpha/2$.

Seja agora $T_a R(l, \alpha)$ uma rotação seguida de uma translação por um vector $a \perp l$. Como $a \perp l$, podemos escrever $T_a = R_H R_K$ escolhendo K tal que $l \subset K$; podemos agora escrever $R(l, \alpha) = R_L R_J$ em que J, L fazem entre si um ângulo de $\alpha/2$ e $J \cap L = l$, escolhendo $L = K$. Temos então $T_a R(l, \alpha) = (R_H R_K)(R_K R_J) = R_H R_J$; como $H \parallel K$, $J \cap H = m$ é uma recta paralela a l e J faz com H o mesmo ângulo $\alpha/2$; portanto $R_H R_J = R(m, \alpha)$. É claro que um argumento idêntico vale para o caso da rotação ser precedida pela translação, $R(l, \alpha)T_a$. No caso geral, decomponos $a = b + c$ com $b \parallel l$ e $c \perp l$: temos então, pelo caso anterior, $T_a R(l, \alpha) = T_b(T_c R(l, \alpha)) = T_b R(m, \alpha)$, com $m \parallel l$ logo $b \parallel m$, que é um parafuso. Um argumento idêntico aplica-se ao caso $R(l, \alpha)T_a$.

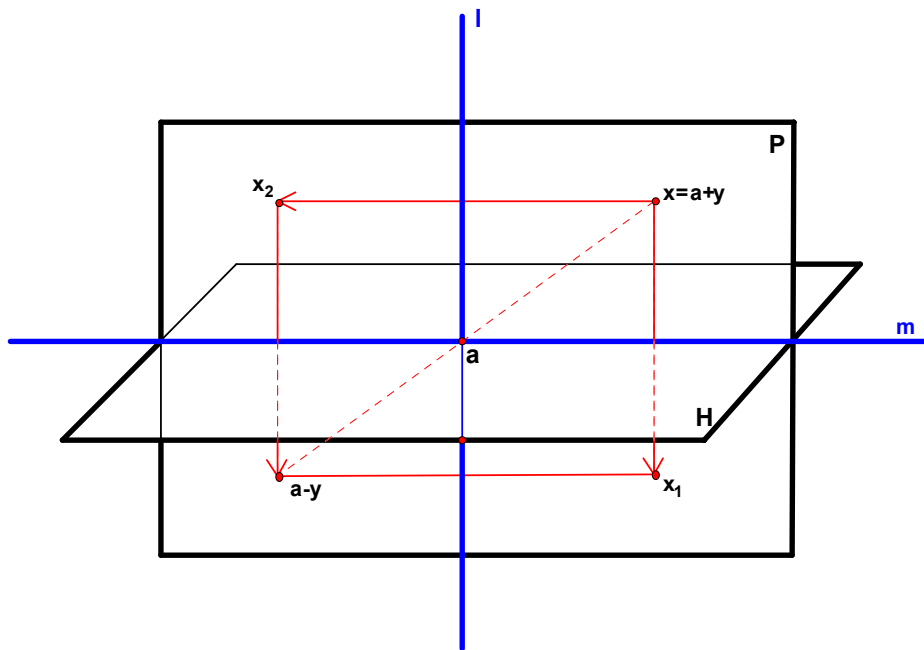
Exercício 27 (nº 75) Na definição de **reflexão deslizante**, $T_a R_H$, é $a \parallel H$. Queremos ver que, em geral, $T_a R_H$ é uma reflexão deslizante, excepto se $a \perp H$, caso em que é uma reflexão, $R_{H'}$, com $H' \parallel H$.

O argumento é em tudo análogo ao caso das reflexões deslizantes do plano, usando o Lema do exercício anterior. No caso de ser $a \perp H$, escreva-se $T_a = R_K R_H$, $K = H + a/2$; então $T_a R_H = (R_K R_H)R_H = R_K(R_H R_H) = R_K$, temos portanto uma reflexão num plano paralelo a H (e a uma distância de $\|a\|/2$). No caso geral escrevemos $a = b + c$, com $b \parallel H$ e $c \perp H$: então, pelo caso anterior, $T_a R_H = T_b(T_c R_H) = T_b R_K$, com $K \parallel H$ logo $b \parallel K$, e temos assim uma reflexão deslizante. O caso $R_H T_a$ é perfeitamente análogo.

Exercício 28 (nº 76) Recorde-se que a **inversão** no ponto a , I_a , é a transformação que envia cada ponto b no ponto c tal que a é o ponto médio do segmento \overline{bc} : equivalentemente I_a envia o ponto $x = a + y$ em $a - y$, isto é, $I_a(x) = 2a - x$. Queremos ver que a inversão em a é o produto das reflexões em três quaisquer planos mutuamente ortogonais cuja intersecção seja a . Vejamos duas resoluções, uma mais geométrica e outra mais geral e abstracta (mas que pode ser adaptada a qualquer dimensão):

a) Nas notas do curso, a inversão I_a aparece como um tipo especial de **reflexão rotativa**, as de ângulo π : $R_H R(l, \pi) = R(l, \pi)R_H$, em que $l \perp H$ e $a = l \cap H$. Dado um ponto arbitrário $x \notin l$, seja P o plano definido por x e pelo eixo da rotação l (se $x \in P$

a situação é clara: $R_H R(l, \pi)x = R_H x$ que é o ponto de l diametralmente oposto a x relativamente a a : é claro que $P \perp H$; seja $m = P \cap H$ (veja-se a figura seguinte)



Como o ângulo da rotação é π , $R(l, \pi)(P) = P$ e a imagem de x , $x_2 = R(l, \pi)x$, corresponde, dentro do plano P , à reflexão de x na recta l ; como $P \perp H$, $R_H(P) = P$ e a imagem de $R_H x_2$ corresponde, também dentro do plano P , à reflexão na recta m ; temos assim que a imagem de x pela reflexão rotativa $R_H R(l, \pi)$, é a mesma que a do produto, no plano P , das duas reflexões, $R_m R_l$, que por serem duas rectas ortogonais corresponde a uma rotação de π : por isso essa imagem é o ponto $a - y$ de P , diametralmente oposto a x relativamente ao centro de rotação a . Isto completa a descrição da inversão I_a como um tipo especial de reflexão rotativa.

Se H_1, H_2, H_3 são três planos por a , mutuamente ortogonais, tomando o produto das três reflexões nesses planos, temos, pelo Lema do exercício nº 4: $R_{H_3} R_{H_2} R_{H_1} = R_{H_3} R(l, \pi)$, em que $l = H_1 \cap H_2$; como H_3 é ortogonal a ambos os planos, é ortogonal à intersecção, $l \perp H_3$: temos então uma reflexão rotativa de ângulo π que é, como vimos, uma inversão.

- b) Sejam H_1, H_2, H_3 três planos por a , mutuamente ortogonais; para cada $i = 1, 2, 3$ seja $K_i = H_i - a$ o plano pela origem paralelo a H_i : é claro que K_1, K_2, K_3 são também mutuamente ortogonais. É fácil verificar que a reflexão em H_i é conjugada à reflexão em K_i : $R_{H_i} = T_a R_{K_i} T_{-a}$; recorde-se, da definição de reflexão em hiperplanos, que todo o x se escreve de forma única como $x = y + z$ em que $y \in H_i$ e $z \perp H_i - y$ (ou seja, já que $H_i - y = H_i - a = K_i$, $z \perp K_i$) e que $R_{H_i} x = y - z$; temos então que $x - a = (y - a) + z$ com $y - a \in K_i$ e $z \perp K_i$, logo $R_{K_i} T_{-a} x = R_{K_i}(x - a) = (y - a) - z$

e portanto $T_a R_{K_i} T_{-a} x = T_a(y - a - z) = y - z = R_{H_i} x$. Temos então que

$$\begin{aligned} R_{H_3} R_{H_2} R_{H_1} &= (T_a R_{K_3} T_{-a})(T_a R_{K_2} T_{-a})(T_a R_{K_1} T_{-a}) = \\ &= T_a(R_{K_3} R_{K_2} R_{K_1}) T_{-a} \end{aligned}$$

Bastará agora verificar que $R_{K_3} R_{K_2} R_{K_1}$ é a inversão na origem, $x \longrightarrow -x$: nesse caso, dado $x = a + y$, temos

$$R_{H_3} R_{H_2} R_{H_1} x = T_a(R_{K_3} R_{K_2} R_{K_1}) T_{-a} x = T_a(R_{K_3} R_{K_2} R_{K_1}) y = -y + a = a - y$$

e portanto $R_{H_3} R_{H_2} R_{H_1} = I_a$.

Sejam para cada $i = 1, 2, 3$, n_i um vector unitário, ortogonal a K_i : como os K_i são mutuamente ortogonais, $\{n_1, n_2, n_3\}$ é uma base ortonormada; é claro, da definição de reflexão, que $R_{K_i} n_j = (-1)^{\delta_{ij}} n_j$, ou seja $R_{K_i} n_j = \mp n_j$ consoante $i = j$ ou $i \neq j$ (neste caso, $n_j \in K_i$ e fica portanto fixo pela reflexão em K_i); portanto $R_{K_3} R_{K_2} R_{K_1} n_j = -n_j$, $j = 1, 2, 3$, isto é, a matriz de $R_{K_3} R_{K_2} R_{K_1}$ relativamente a esta base é a matriz $-I$. Seja L a matriz de $R_{K_3} R_{K_2} R_{K_1}$ relativamente à base canónica e M a matriz de mudança de base, que tem como vectores coluna os vectores n_i . Então temos $M^{-1} L M = -I$ e portanto $L = M(-I)M^{-1} = -(M M^{-1}) = -I$: $R_{K_3} R_{K_2} R_{K_1}$ é portanto a aplicação $x \longrightarrow -x$.

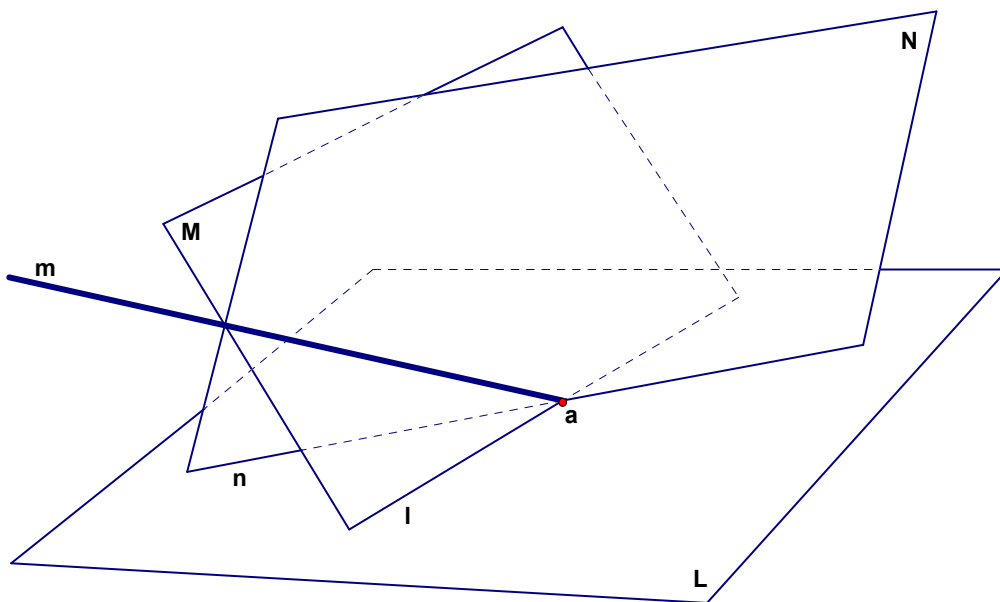
Nota: os planos H_i são dados por $H_i = \{x : \langle x, n_i \rangle = t_i\}$; podíamos também usar a expressão para as reflexões, deduzida no exercício nº 28, e calcular directamente, para $x = a + y$, $R_{H_3} R_{H_2} R_{H_1} x = a - y$, mas são cálculos um pouco fastidiosos...

Exercício 29 (nº 77) Seja $f = R(l, \alpha) I_a = I_a R(l, \alpha)$ uma **inversão rotativa**; escrevendo I_a como $I_a = R(l, \pi) R_H$ com $l \perp H$ e $l \cap H = \{a\}$ (pelo exercício anterior sabemos que podemos escolher quaisquer l e H que verifiquem aquelas condições) temos $f = R(l, \alpha) I_a = R(l, \alpha) R(l, \pi) R_H = R(l, \alpha + \pi) R_H$ que é portanto uma reflexão rotativa. Reciprocamente, dada uma reflexão rotativa, $R(l, \beta) R_H$, e sendo $l \cap H = \{a\}$, escrevendo $\alpha = \beta - \pi$, temos $R(l, \beta) R_H = R(l, \alpha + \pi) R_H = R(l, \alpha) R(l, \pi) R_H = R(l, \alpha) I_a$ que é uma inversão rotativa: o caso particular das reflexões R_H , quando $\beta = 0$, está incluído.

Exercício 30 (nº 78) Queremos ver que se tivermos $f = R_H R(l, \alpha)$ em que H não é ortogonal a l , ainda temos, em geral, uma **reflexão rotativa**: excepto nos casos de ser $l \subset H$ ou $l \parallel H$. Vejamos primeiro estes dois casos:

- Suponhamos que é $l \subset H$: podemos escrever $R(l, \alpha) = R_H R_L$ em que L é um plano por l que faça com H um ângulo de $\alpha/2$; temos então que $f = R_H R(l, \alpha) = R_H (R_H R_L) = R_L$, que é uma reflexão.
- Se $l \parallel H$: podemos escrever $R(l, \alpha) = R_M R_L$, em que L, M são planos por l fazendo um ângulo de $\alpha/2$ e com $M \parallel H$: temos então $f = R_H R(l, \alpha) = R_H (R_M R_L) = (R_H R_M) R_L = T_a R_L$: como $a \perp M$, então a não é ortogonal a R_L e portanto temos uma reflexão deslizante.

- c) No caso geral, $l \cap H = \{a\}$: pelo exercício anterior, podemos escrever a reflexão R_H como uma inversão rotativa em a , $R_H = I_a R(n, \beta)$ (em que $n \perp H$, $n \cap H = \{a\}$ e $\beta = \pi$); temos então que $f = R_H R(l, \alpha) = I_a R(n, \beta) R(l, \alpha)$; vejamos que o produto das duas reflexões nas rectas n e l por a é ainda uma rotação numa recta por a : podemos escrever $R(n, \beta) = R_N R_L$ e $R(l, \alpha) = R_L R_M$ em que escolhemos L como o plano definido pelas duas rectas n, l ; temos então que $R(n, \beta) R(l, \alpha) = R_N R_L R_L R_M = R_N R_M$: como N e M intersectam L nas rectas n e l , respectivamente, temos que $N \cap M = m$ em que $m \cap L = \{a\}$ (figura seguinte)



Logo $R(n, \beta) R(l, \alpha) = R_N R_M = R(m, \gamma)$ (note-se que não é $\gamma = \alpha/2 + \beta/2$. Concluimos que $f = I_a R(m, \gamma)$, com $a \in m$, é uma inversão rotativa, logo, pelo exercício anterior, é uma reflexão rotativa.

Em qualquer das três alíneas anteriores, o argumento adapta-se de forma trivial ao caso de termos $f = R(l, \alpha) R_H$.

Nota: na última alínea demos parte da resolução do exercício nº 83, sobre produtos de duas rotações: o produto de duas rotações em rectas que se intersectam num ponto a é ainda uma rotação numa recta por a ; não é válido contudo, nesta situação, a aditividade dos ângulos de rotação.

Exercício 31 (nº 80) Classificação das Isometrias de \mathbb{R}^3 :

Temos que $f \in I(\mathbb{R}^3)$ se escreve como produto de $r \leq 4$ reflexões em (hiper)planos. Analisamos os casos para os quatro valores de r :

$r = 1$ Neste caso temos simplesmente que $f = R_H$ é uma reflexão.

$r = 2$ Como já vimos (Lema do exercício nº 74), se $f = R_H R_L$, então f é uma translação ou uma rotação, consoante os planos H e L são paralelos ou se intersectam, respectivamente.

$r = 3$ Seja $f = R_M R_L R_H$; consideremos $g = R_L R_H$: pelo caso anterior, g ou é uma translação ou uma rotação; se $g = T_a$, então (Exercício nº 75), $f = R_M T_a$ é uma reflexão ou uma reflexão deslizante, consoante a é ou não ortogonal a M ; se g é uma rotação, $g = R(l, \alpha)$, então, pelo exercício anterior, $f = R_M R(l, \alpha)$ é uma reflexão, uma reflexão deslizante ou uma reflexão rotativa, consoante se verifique, $l \subset M$, $l \parallel M$ ou $l \cap M = \{a\}$, respectivamente.

$r = 4$ Consideremos primeiro o caso de f ter algum ponto fixo: neste caso, pelo Teorema 32 (um ponto é um subespaço afim de dimensão 0), f escreve-se como produto de $r \leq 3$ reflexões, mas como f , sendo o produto de 4 reflexões, é uma isometria directa, então f escreve-se como produto de 2 reflexões e portanto é uma rotação ou uma translação. Se f não tem nenhum ponto fixo, consideremos $g = T_{-b} f$ em que $b = f(a)$ para um qualquer a ; então g é uma isometria directa que tem um ponto fixo, a , e portanto é uma translação ou uma rotação: $g = T_c$ ou $g = R(l, \alpha)$; temos então que $f = T_b T_c = T_{b+c}$ é uma translação, ou $f = T_b R(l, \alpha)$ e neste caso (pelo Exercício nº 74) é uma rotação ou um parafuso, consoante b é ou não ortogonal a l .

A conclusão da classificação passa por mostrar que os seis tipos de isometrias são de facto distintos, o que pode ser feito de modo análogo ao caso do plano: separamos as isometrias em directas e inversas e, em cada um dos dois tipos, distinguimo-las através do conjunto dos pontos que são fixos.