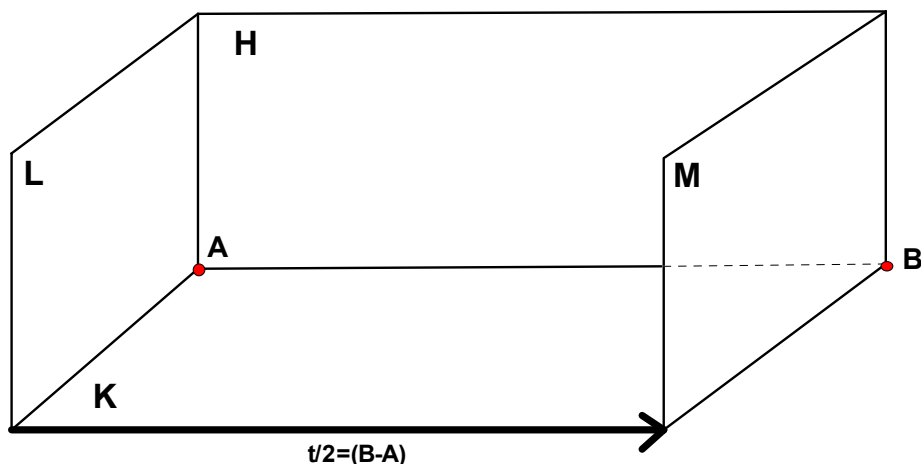


Exercício 32 (nº 81) Sejam I_A e I_B duas inversões, com $A \neq B$ (se $A = B$, $I_A I_B = n$); pelo exercício nº 76, podemos escrever cada uma das inversões como produto de reflexões em três planos mutuamente ortogonais. Sejam H, K dois planos ortogonais que contenham a recta $l = \overleftrightarrow{AB}$ e sejam L e M dois planos ortogonais a l (e portanto paralelos e ambos ortogonais a H e K) pelos pontos A e B , respectivamente: ver a figura seguinte (A e B aparecem como cantos de um paralelepipedo)



Podemos escrever $I_B = R_M R_K R_H$ e $I_A = R_H R_K R_L$; então $I_B I_A = (R_M R_K R_H)(R_H R_K R_L) = R_M R_L$. Como M, L são ortogonais ao vector $B - A$ e distam entre si $\|B - A\|$, $I_B I_A = R_M R_L = T_t$ em que $t = 2(B - A)$.

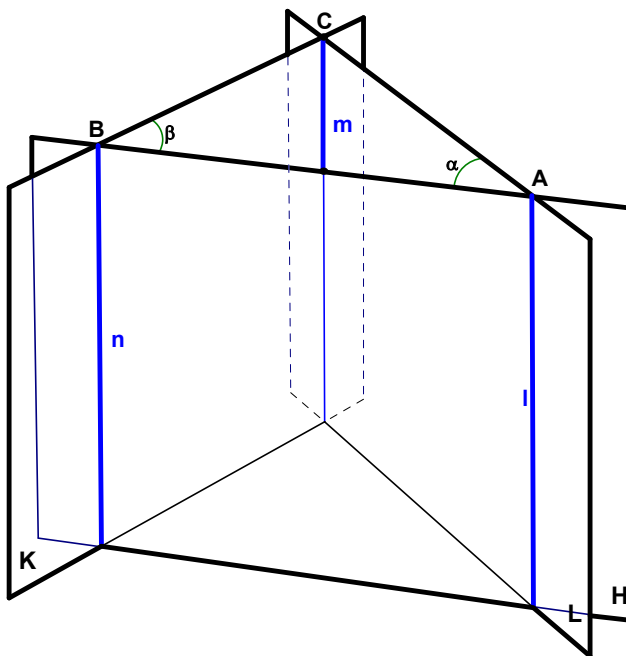
O argumento mostra também que o recíproco se verifica: dada uma translação qualquer T_t , podemos escrever $T_t = I_B I_A$ em que A é um ponto arbitrário dado, fazendo $B = A + (t/2)$, ou em que B é um ponto arbitrário dado, fazendo $A = B - (t/2)$.

Exercício 33 (nº 82) Considere-se o produto de três inversões, $I_A I_B I_C$. Pelo exercício anterior, $I_A I_B = T_t$ em que $t = 2(A - B)$ e, além disso, T_t pode ser escrita como produto de duas inversões em que um dos pontos pode ser escolhido à partida: escolhendo o ponto C , podemos escrever $T_t = I_D I_C$ em que $D = C + (t/2) = C + (A - B)$. Temos então que $I_A I_B I_C = I_D I_C I_C = I_D id = I_D$. A relação $D = C + (A - B)$ mostra que, no caso de A, B, C não serem colineares, $\square ABCD$ é um paralelogramo; se trocarmos a ordem da composição e considerarmos agora $I_C I_B I_A$, obtemos, de forma simétrica, $I_C I_B I_A = I_{D'}$ em que $D' = A + (C - B)$, logo $D' = D$.

Exercício 34 (nº 83) Neste exercício analisamos o produto de duas rotações $R(l, \alpha), R(n, \beta)$; separamos os três casos de l e n serem concorrentes, paralelas ou enviesadas.

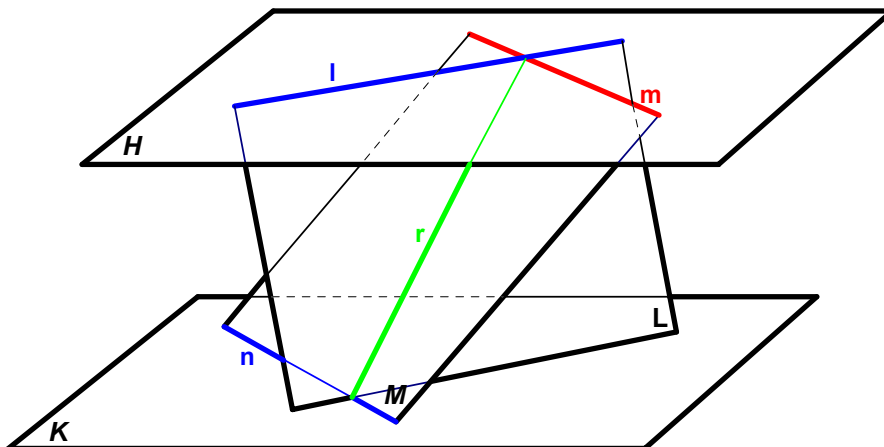
- Se são concorrentes, com $l \cap n = \{a\}$, já vimos, na resolução do exercício nº 78 (ver aí também a figura), que $R(l, \alpha)R(n, \beta) = R(m, \theta)$ em que m é uma recta por a (note que não há uma relação simples - como a soma - entre θ e α, β)
- Se $l \parallel n$: a situação aqui é perfeitamente análoga à do plano; a restrição a cada plano H , ortogonal às duas rectas, é o produto de duas rotações em torno dos pontos de

intersecção, $A = l \cap H, B = n \cap H$, que é uma rotação de ângulo $\alpha + \beta$, num terceiro ponto C , bem determinado (Exercício nº 2.1-23), excepto se $\alpha + \beta = 0 \pmod{2\pi}$, caso em que temos uma translação: assim temos que $R(l, \alpha)R(n, \beta) = R(m, \alpha + \beta)$ em que m é uma recta paralela às outras duas ($m \cap H = C$), ou que $R(l, \alpha)R(n, \beta) = T_a$, se $\alpha + \beta = 0 \pmod{2\pi}$.



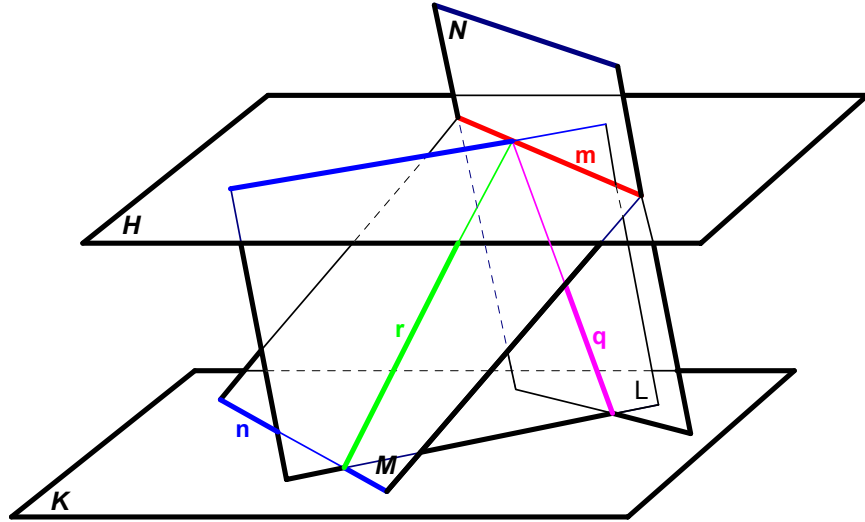
Concretizando: tal como no caso do plano, temos (ver figura) que $R(l, \alpha) = R_H R_L$ e $R(n, \beta) = R_K R_H$ em que H é o plano definido por l e n : então $R(n, \beta)R(l, \alpha) = R_K R_L = R(m, \alpha + \beta)$ em que $K \cap L = m$ (portanto $m \parallel l, n$); se $\alpha + \beta = 0 \pmod{2\pi}$ então L, K são paralelos e temos uma translação.

c) Se são enviesadas: consideremos a figura seguinte



H e K são (os) dois planos paralelos por l e n , respectivamente. Seja $f = R(n, \beta)R(l, \alpha)$; vamos considerar $g = T_{2a}f$ em que a é um vector da forma $a = y - x$, com $x \in l$ e $y \in n$, de norma mínima, isto é, $\|a\|$ é igual à distância entre as duas

rectas e a é ortogonal a ambas, e portanto aos planos H e K . Podemos escrever $R(l, \alpha) = R_H R_L$, $R(n, \beta) = R_K R_M$ e $T_{2a} = R_H R_K$; temos então $g = T_{2a} f = (R_H R_K)(R_K R_M) R(l, \alpha) = (R_H R_M) R(l, \alpha)$; ora $R_H R_M$ é uma rotação $R(m, \gamma)$ em que m é uma recta em H , paralela a n , e portanto intersecta l (porque l e n são enviesadas); ora, como já vimos, o produto de duas rotações em eixos que se intersectam é uma rotação numa recta que passa pelo ponto de intersecção: $R(m, \gamma) R(l, \alpha) = R(q, \theta)$ em que $q \cap l = m \cap l$: na verdade, podemos escrever $R(m, \gamma) = R_N R_H$ em que o ângulo entre N e H é suplementar do ângulo entre M e H , que é $\gamma/2$ (ver a figura seguinte)



Então $R(m, \gamma) R(l, \alpha) = (R_N R_H)(R_H R_L) = R_N R_L = R(q, \theta)$. Como $f = T_{-2a} g = T_{-2a} R(q, \theta)$ e o vector a não é ortogonal ao eixo q (se não q seria paralelo a K e $H...$) temos que f é um parafuso.

Note-se que no caso particular de termos $\alpha = \beta = \pi$, isto é, as rotações dadas são meios-giros, os planos M e L são ortogonais a K e H : então $N = M$ e temos que a recta $q = r = M \cap L$ é ortogonal aos planos K, H e portanto paralela ao vector a ; o ângulo de rotação θ é, neste caso, o dobro do ângulo entre as rectas l e n , que é o ângulo entre os planos L e M . A situação é claramente reversível: dado um parafuso de eixo r , ângulo de rotação θ e passo $b = -2a$, podemos escrevê-lo como o produto de dois meios-giros em duas rectas l e n perpendiculares a r , que distam entre si $\|a\|$ e que fazem entre si um ângulo de $\theta/2$. Isto responde, no que diz respeito aos parafusos, à última parte do exercício em que se pede para verificar que qualquer isometria directa é produto de dois meios-giros; os casos das translações e das rotações é bastante mais fácil: se $T_a = R_H R_L$ com $H \parallel L$, podemos escrever $T_a = R_H R_K R_K R_L$ em que K é um qualquer plano ortogonal a H, L ; então $T_a = (R_H R_K)(R_K R_L) = R(m, \pi) R(l, \pi)$, $m = H \cap K$, $l = L \cap K$; analogamente se $R(l, \alpha) = R_H R_L$, $H \cap L = l$, podemos escrever $R(l, \alpha) = R_H R_K R_K R_L$ em que K é um qualquer plano ortogonal a H, L e temos também $R(l, \alpha) = R(m, \pi) R(l, \pi)$, $m = H \cap K$, $l = L \cap K$.