

1 Automorfismos de $\mathbb{I}^{[2]}$...

Sendo $I = [0, 1]$, designamos por $\mathbb{I}^{[2]}$ o subconjunto do quadrado $I^2 = I \times I$ definido por

$$\mathbb{I}^{[2]} = \{(a, b) \in I^2 : a \leq b\}$$

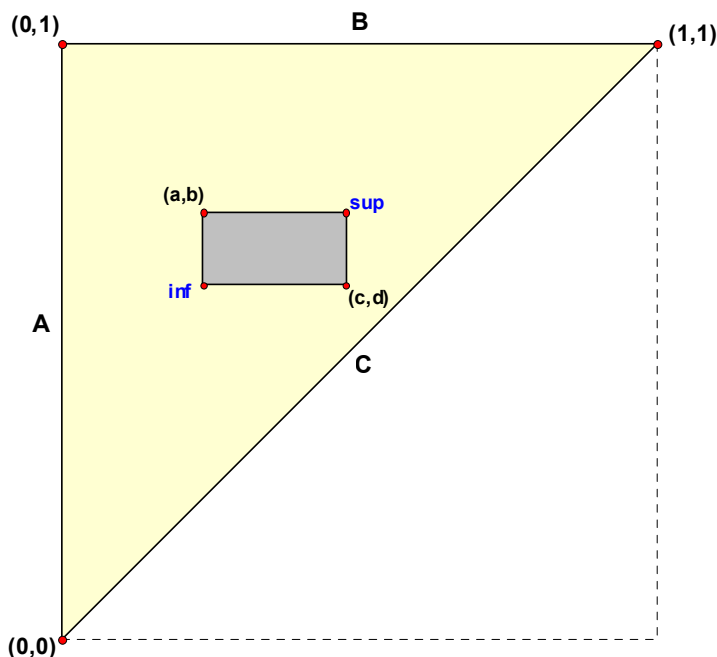
Consideramos em \mathbb{I}^2 a seguinte relação de ordem:

$$(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \text{ e } b \leq d$$

Verifica-se facilmente que esta relação define de facto uma ordem parcial (não total), que torna $\mathbb{I}^{[2]}$ um *reticulado completo*: o ínfimo e o supremo são dados por

$$\begin{aligned} (a, b) \wedge (c, d) &= (a \wedge c, b \wedge d) \\ (a, b) \vee (c, d) &= (a \vee c, b \vee d) \end{aligned}$$

Em termos geométricos, o ínfimo e o supremo correspondem aos cantos inferior esquerdo e superior direito, respectivamente, do rectângulo de lados paralelos aos eixos coordenados e que tem (a, b) e (c, d) como vértices:



Vamos considerar os *automorfismos* de $\mathbb{I}^{[2]}$, aplicações bijectivas $f : \mathbb{I}^{[2]} \longrightarrow \mathbb{I}^{[2]}$ que preservam a ordem:

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

Designamos por $Aut(\mathbb{I}^{[2]})$ o conjunto destes automorfismos.

Queremos mostrar o seguinte resultado:

Teorema 1 *Seja $f \in Aut(\mathbb{I}^{[2]})$; então f é contínua (e portanto um homeomorfismo) e é da forma $f(a, b) = (g(a), g(b))$ em que $g : I \longrightarrow I$ é um automorfismo de (I, \leq) (i.e. uma bijecção crescente de I).*

Nota 2 *É possível provar a segunda afirmação do teorema, que $f = g \times g$, $g \in \text{Aut}(I)$, sem qualquer referência a questões de continuidade (ver [1, pag.133-134]); que, então, f é contínua, decorre de considerações fáceis com o Teorema dos Valores Intermédios (de Bolzano): de facto, se $f = g \times g$, então $f \in \text{Aut}(\mathbb{I}^{[2]})$ sse $g \in \text{Aut}(I)$, e, pelo teorema de Bolzano, se $g : I \rightarrow I$ é crescente e bijectiva então g é contínua: por outro lado, como é sabido, dadas aplicações entre espaços métricos, $g : X \rightarrow M$ e $h : Y \rightarrow N$, a aplicação produto $f = g \times h : X \times Y \rightarrow M \times N$ definida por $f(a, b) = (g(a), h(b))$, é contínua sse g e h são contínuas.*

Mas o que queremos é deixar um testemunho de como um topólogo (geómetra), colocado na situação de pensar pela primeira vez em automorfismos de $\mathbb{I}^{[2]}$, poderia proceder: a primeira questão que abordaria seria a da continuidade; mas fá-lo-ia em termos gerais, muito antes de colocar sequer a hipótese da segunda afirmação, aparentemente bem mais forte, se poder verificar...

Introduzimos agora alguma **notação**.

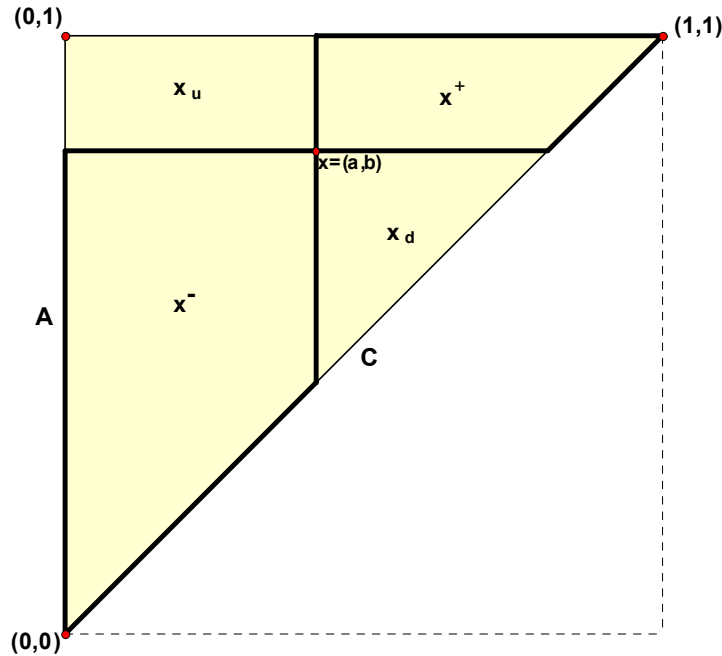
Designamos por A, B, C as partes do bordo de $\mathbb{I}^{[2]}$ indicadas na figura anterior:

$$C = \Delta(I^2) = \{(c, c) : c \in I\}$$

$$A = \{(0, b) : b \in I\}$$

$$B = \{(a, 1) : a \in I\}$$

Dado um ponto arbitrário $x = (a, b) \in \mathbb{I}^{[2]}$ e designando por p_1 e p_2 as projecções na primeira e segunda coordenadas, respectivamente, temos (ver figura seguinte)



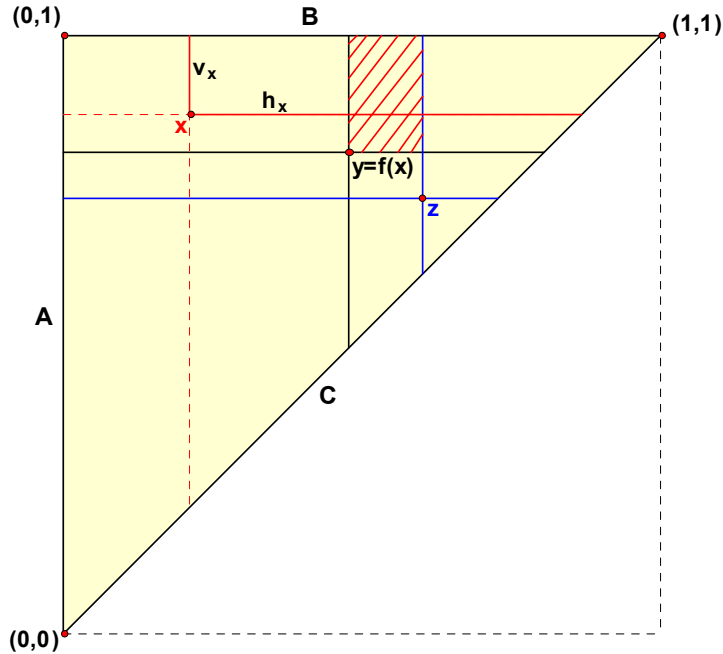
$$\begin{aligned}
x^+ &= \{y \in \mathbb{I}^{[2]} : x \leq y\} \\
x^- &= \{y \in \mathbb{I}^{[2]} : y \leq x\} \\
x' &= \mathbb{I}^{[2]} - (x^+ \cup x^-) \\
x_d &= \{y \in x' : p_1(y) > a\} = \{y \in x' : p_2(y) < b\} \\
&= \{y \in x' : p_1(y) < a\} = \{y \in x' : p_2(y) > b\}
\end{aligned}$$

Com referência à figura anterior, notem-se os seguintes casos particulares que ela não representa:

$$\begin{aligned}
x_d &= \emptyset \Leftrightarrow x \in C \\
x_u &= \emptyset \Leftrightarrow x \in A \cup B \\
x \in A &\Leftrightarrow x^- \subset A \Leftrightarrow \text{Int}(x^-) = \emptyset \\
x \in B &\Leftrightarrow x^+ \subset B \Leftrightarrow \text{Int}(x^+) = \emptyset
\end{aligned}$$

em que $\text{Int}(X)$ designa o *interior* de X . Nos dois últimos casos, os conjuntos x^- e x^+ reduzem-se, respectivamente, aos *segmentos* de $(0,0)$ a x , contido em A , e de x a $(1,1)$ contido em B . É claro que para todo $x \in \mathbb{I}^{[2]}$, x^- e x^+ são *fechados* e x_d, x_u são *abertos*.

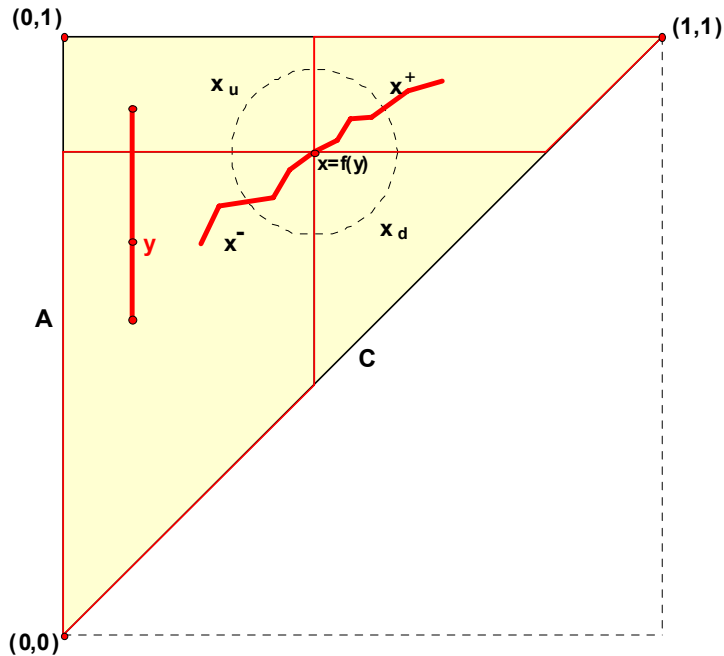
Seja $f \in \text{Aut}(\mathbb{I}^{[2]})$; pela definição de automorfismo, temos que para todo $x \in \mathbb{I}^{[2]}$ $f(x^+) = f(x)^+$ e $f(x^-) = f(x)^-$. Suponhamos que f é descontínua num ponto x e seja $f(x) = y = (a, b)$: então existe uma sucessão convergente para x , $x_n \rightarrow x$, tal que a sucessão $y_n = f(x_n)$ converge para um ponto $z = (c, d) \neq y$.



É geometricamente claro que se $x_n \rightarrow x$, a correspondente sucessão de conjuntos x_n^+

aproxima o conjunto x^+ , no seguinte sentido: para todo $u \in \text{Int}(x^+)$, existe uma ordem $N \in \mathbb{N}$ tal que $u \in x_n^+, \forall n \geq N$ e para todo $v \in \mathbb{I}^{[2]} - x^+$ existe uma ordem $N \in \mathbb{N}$ tal que $v \notin x_n^+, \forall n \geq N$; de forma análoga x_n^- *aproxima* o conjunto x^- . Se $z \neq y$, ou uma das coordenadas de z é maior do que a correspondente coordenada de y , e então $\text{Int}(y^+ - z^+) \neq \emptyset$, ou uma das coordenadas de z é menor do que a correspondente coordenada de y e então $\text{Int}(y^- - z^-) \neq \emptyset$; suponhamos que se verifica a primeira condição (o argumento é perfeitamente análogo para o outro caso). A figura anterior representa a situação em que $c > a$ e $d < b$ pelo que se verificam ambas as condições $\text{Int}(y^+ - z^+) \neq \emptyset$ e $\text{Int}(y^- - z^-) \neq \emptyset$: o primeiro destes conjuntos está marcado por linhas oblíquas. Como $y_n \rightarrow z, y_n^+ = f(x_n^+)$ aproxima z^+ no sentido atrás descrito; como para todo $u \in \text{Int}(x^+)$, existe uma ordem a partir da qual $u \in x_n^+$ e para todo $v \in \mathbb{I}^{[2]} - z^+$ existe uma ordem a partir da qual $v \notin y_n^+ = f(x_n^+)$, então $f(u) \in z^+$, isto é, $f(\text{Int}(x^+)) \subset z^+$; mas como $f(x^+) = y^+, y^+ - z^+$, que tem interior não vazio, terá de ser imagem da fronteira de x^+ que é constituída pelos dois segmentos v_x e h_x ; é aqui que aparece a ideia geométrica simples que procurávamos:

Ideia Básica: A imagem pelo automorfismo de um segmento vertical ou de um segmento horizontal (ou, mais geralmente, de um número finito destes) - que são totalmente ordenados pela ordem induzida - não pode preencher um conjunto de interior não vazio.



Dado um subconjunto $X \subset \mathbb{I}^{[2]}$, de interior não vazio, seja $B(x, \epsilon)$ uma bola aberta contida em X , como se representa na figura. Dado um segmento vertical (ou horizontal), S , e $y \in S$ um ponto tal que $f(y) = x$, é claro que todos os pontos $z \in S$ tais que $y \leq z$ são enviados em x^+ e todos os pontos $w \in S$ tais que $w \leq y$ são enviados em x^- ; portanto as partes de $B(x, \epsilon)$ que estão em $x_u \cup x_d$ são disjuntas de $f(S)$; como têm interior não vazio, o argumento pode ser repetido de novo para um

segundo segmento S' : portanto a imagem por f de um número *finito* de segmentos verticais ou horizontais não pode preencher X .

Concluimos assim que f não pode ser descontínua num ponto x interior a $\mathbb{I}^{[2]}$ e o argumento adapta-se de forma imediata ao caso dos pontos do bordo, $x \in A \cup B \cup C$: como f é contínua e bijectiva e $\mathbb{I}^{[2]}$ é compacto, f é, portanto, um *homeomorfismo*.

Mas a propriedade geométrica que acabámos de verificar permite-nos concluir de imediato algumas outras propriedades:

Como $Int(x^-) = \emptyset$ se e só se $x \in A$, caso em que x^- é o segmento vertical entre $(0, 0)$ e x , e como $f(x^-) = f(x)^-$, terá de ser $Int(f(x)^-) = \emptyset$, ou seja $f(x) \in A$; portanto $f(A) = A$. Analogamente, como $Int(x^+) = \emptyset$ se e só se $x \in B$, caso em que x^+ é o segmento horizontal entre x e $(1, 1)$, concluimos que $f(B) = B$; em particular, como $(0, 1)$ pertence a A e a B , temos $f((0, 1)) = (0, 1)$.

Dado um ponto arbitrário $x \in \mathbb{I}^{[2]}$, como $f(x^+) = f(x)^+$ e $f(x^-) = f(x)^-$, temos que $f(x_u \cup x_d) = f(x)_u \cup f(x)_d$; mas na verdade $f(x_u) = f(x)_u$, e portanto $f(x_d) = f(x)_d$ (as imagens dos pontos das duas partes não se misturam...): se $y = (a, b) \in x_u$, então $z = (a, 1) \in x_u \cap B$ e como $f(B) = B$, $f(z) \in f(x)_u$; como $y \leq z$, terá de ser $f(y) \leq f(z)$, logo $f(y) \in f(x)_u$ (não pode ser $f(y) \in f(x)_d$ porque os pontos de duas partes w_d e w_u não estão relacionados). Em particular, um ponto x tal que $x_d = \emptyset$ tem que ser enviado num ponto y tal que $y_d = \emptyset$: ora $x_d = \emptyset \Leftrightarrow x \in C$, logo $f(C) = C$.

Em conclusão: a observação daquela propriedade geométrica simples permite-nos concluir que

$$f(A) = A, \quad f(B) = B, \quad f(C) = C \quad (1)$$

Alternativamente, mas de modo menos elementar, poderíamos argumentar do seguinte modo: como f é um homeomorfismo, envia o bordo $\partial\mathbb{I}^{[2]} = A \cup B \cup C \cong S^1$ em si próprio; como $f(0, 0) = (0, 0)$ e $f(1, 1) = (1, 1)$, para estabelecer aquelas igualdades basta verificar que $f(0, 1) = (0, 1)$; ora $(0, 1)^+ = B$, $(0, 1)^- = A$ e $(0, 1)$ é o único ponto $x \in \mathbb{I}^{[2]}$ tal que $Int(x^+) = Int(x^-) = \emptyset$; como um homeomorfismo envia conjuntos de interior vazio em conjuntos de interior vazio, terá de ser $f(0, 1) = (0, 1)$.

Finalmente, é clara a seguinte propriedade de

Preservação dos níveis: Um automorfismo, $f \in Aut(\mathbb{I}^{[2]})$, envia segmentos verticais em segmentos verticais e segmentos horizontais em segmentos horizontais:

Como $f(C) = C$, f induz um automorfismo $g \in Aut(I)$, dado, para cada $a \in I$, por $f(a, a) = (g(a), g(a))$. Dado um segmento vertical, S , do ponto $x = (a, a) \in C$ ao ponto $y = (a, 1) \in B$, f envia homeomorficamente o triângulo x^+ no triângulo z^+ , $z = f(x) = (g(a), g(a))$, enviando portanto o bordo de x^+ no bordo de z^+ : como $f(C) = C$ e $f(B) = B$, f envia a hipotenusa na hipotenusa e o cateto horizontal no cateto horizontal, logo envia o cateto vertical, S , no segmento vertical entre $z = (g(a), g(a))$ e $(g(a), 1)$. Um argumento análogo, substituindo B por A , funciona para os segmentos horizontais: temos portanto que $f(a, b) = (g(a), g(b))$, como queríamos.

Notas finais:

1. Observe-se que uma vez descoberta (ou "*vista*"...) a **Ideia Básica**, assim chamada em cima, e estabelecida, a partir dela, a relação (1) das partes do bordo, deduz-se muito facilmente a segunda parte do teorema - que $f(a, b) = (g(a), g(b))$, $g \in \text{Aut}(I)$ - sem passar pela propriedade de preservação dos níveis e sem qualquer referência a questões topológicas, como é feito em [1]:

Para todo $x = (a, b) \in \mathbb{I}^{[2]}$, temos que

$$x = (a, a) \vee ((b, b) \wedge (0, 1))$$

logo, como $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ e $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a, a) \vee (f(b, b) \wedge f(0, 1)) = \\ &= (g(a), g(a)) \vee ((g(b), g(b)) \wedge (0, 1)) = \\ &= (g(a), g(b)) \end{aligned}$$

2. Apesar dos argumentos de carácter topológico serem bastante mais longos e indirectos do que a prova em [1], parecem (pelo menos aos olhos suspeitos de um topólogo!) adaptar-se melhor às generalizações, em particular ao estudo dos automorfismos do quadrado inteiro, I^2 :

Seja $f \in \text{Aut}(I^2)$. Então f é um *homeomorfismo* e $f = g \times g$ ou $f = (g \times g) \circ \Delta$ em que $g \in \text{Aut}(I)$ e $\Delta(x, y) = (y, x)$, $\forall (x, y) \in I^2$ é a reflexão na diagonal (note que no segundo caso a propriedade de "preservação dos níveis" permuta segmentos verticais e horizontais)

Deixamos a prova deste resultado como exercício, bem como o estudo das generalizações a dimensões superiores.

Referências

- [1] Nguyen, Hung T. and Walker, Elbert A., *A First Course in FUZZY LOGIC* (2nd edition), Chapman & Hall/CRC (2000)