REPRESENTAÇÕES NA APRENDIZAGEM DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Sandra Nobre
Escola Professor Paula Nogueira
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
sandraggnobre@gmail.com

Nélia Amado
FCT - Universidade do Algarve
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
nmpamado@hotmail.com

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo

Este trabalho analisa as representações utilizadas por alunos do 9.º ano na resolução de uma tarefa integrada no estudo dos sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas. O seu objectivo é (i) perceber como é que os alunos abordam a tarefa do ponto de vista algébrico, isto é, recorrem ou não simbolismo algébrico e que tipo de relações estabelecem entre os dados e (ii) compreender como é que esta tarefa pode servir de suporte à aprendizagem de métodos formais algébricos permitindo o desenvolvimento do pensamento algébrico. A análise de dados incide nas resoluções dos alunos e nos diálogos entre os alunos e a professora que ocorreram durante a discussão da tarefa. Verificamos que a maioria dos alunos recorre a modos de representação aritméticos na resolução dos problemas e consideramos que este tipo de representação proporciona uma base sustentável de processos informais para a aprendizagem de métodos formais de resolução de sistemas de equações do 1.º grau.

Palavras-chave: Álgebra, Pensamento algébrico, Representações, Sistemas de equações.

Introdução

O 9.º ano de escolaridade constitui um momento de transição do ensino básico para o secundário. Os alunos que pretendem prosseguir estudos necessitam de um conhecimento mais profundo de Álgebra, mas simultaneamente a compreensão de conceitos algébricos que requer maior abstracção é difícil para muitos deles.

O desenvolvimento do pensamento algébrico é uma das grandes finalidades no ensino da Matemática (Ponte et al., 2007). O *Programa de Matemática do Ensino Básico* apresenta como propósito principal do ensino da Álgebra:

> Desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos. (Ponte et al., 2007, p. 55)

Sabe-se que as representações escritas produzidas pelos alunos, em particular, na resolução de problemas são poderosas ferramentas que devem ser desenvolvidas por constituírem uma componente essencial da aprendizagem, possibilitando a organização e a comunicação de ideias. Em particular, constituem um meio para a aprendizagem progressiva de métodos formais algébricos, que são umas das componentes importantes do trabalho em Álgebra. Neste artigo procuramos olhar para o pensamento algébrico envolvido na resolução de problemas através das representações dos alunos e perceber como é que estas representações podem servir de suporte para a aprendizagem de métodos formais.

O desenvolvimento do pensamento algébrico

O desenvolvimento do pensamento algébrico está estreitamente relacionado com a experiência matemática dos alunos. Kieran (2007) refere que, num nível mais avançado, este pensamento se manifesta no uso de expressões simbólicas e de equações em vez de números e operações. No entanto, para os alunos que ainda não aprenderam as notações algébricas, as formas de pensamento mais geral sobre números, operações e notações, como o sinal de igual, podem efectivamente ser consideradas algébricas. Esta investigadora afirma que:

> O pensamento algébrico pode ser interpretado como uma abordagem às situações quantitativas, que evidencia os aspectos relacionais das mesmas, com recurso a ferramentas que não são necessariamente letras

> usadas como símbolos e que podem ser utilizadas como suporte cognitivo para a introdução e sustentação do discurso mais característico da Álgebra escolar (Kieran, 1996, pp. 274-275).

Pensar algebricamente abrange conhecer várias formas de representação, nomeadamente as simbólicas. Implica flexibilidade na mudança entre modos de representação, bem como a capacidade de operar com símbolos, em contexto e quando adequado (Schoenfeld, 2008). Este modo de pensamento contempla também o trabalho com estruturas matemáticas e o uso de símbolos na resolução de problemas, incluindo o sentido do símbolo, entendido como a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos (Arcavi, 2006).

Zazkis e Liljedahl (2002) afirmam que o termo Álgebra engloba dois aspectos distintos: pensamento algébrico e simbolismo. Estes autores afirmam que actualmente há uma tendência para separar estes aspectos, sendo esta separação fomentada por dois factores: (i) reconhecimento da possibilidade de manipulação simbólica sem sentido e (ii) um maior foco na estrutura do que nos cálculos, nos primeiros anos. Num estudo acerca da generalização de padrões verificaram que, quando os alunos manifestavam formas de pensamento algébrico ao mesmo tempo que utilizavam notação algébrica (simbolismo), não entendiam a correspondência entre ambos. Na sua perspectiva, o uso de simbolismo algébrico deve ser tido como um indicador de pensamento algébrico mas o facto de não se usar notação algébrica não deve ser julgado como uma incapacidade de pensar algebricamente. Este aspecto vem ao encontro da afirmação de Radford (2000) "os estudantes já estão a pensar algebricamente quando lidam com a produção de uma mensagem escrita, mesmo sem usarem o simbolismo algébrico" (p. 258).

Reconhecemos que a utilização do simbolismo algébrico é uma das grandes potencialidades da Álgebra pois constitui uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas, permitindo expressar ideias matemáticas de forma rigorosa e condensada. No entanto, neste estudo, assumimos esta perspectiva mais abrangente de pensamento algébrico e consideramos que este se manifesta não só pelo uso do simbolismo algébrico, mas também através de outras representações que envolvem palavras e relações gerais entre números.

Na Álgebra, a aprendizagem e utilização de equações pode tornar-se difícil para os alunos por envolver uma linguagem muito específica. Apesar de grande parte da simbologia utilizada na Álgebra já ser conhecida dos alunos do seu estudo na

Aritmética, não significa que a entendam no novo contexto. Por exemplo, o sinal de igual pode ter ou não o significado de equivalência. Este símbolo surge na Aritmética como um sinal de operação, ou seja, indica a necessidade de fazer algo. Contudo, quando é usado em equações, o seu significado é de que existe equivalência entre os dois membros (Kieran, 1981). Para uma interpretação adequada da estrutura de uma equação é necessária uma compreensão da concepção de simetria e do carácter transitivo da igualdade.

Vários estudos mostram que os alunos têm dificuldades na compreensão e utilização de letras (McGregor & Stacey, 1997) e, por vezes, nem tentam compreender o seu significado, preferindo lembrar simplesmente os procedimentos. Algumas investigações acerca da forma como os alunos abordam a resolução de problemas que envolvem duas equações do 1.º grau a duas incógnitas mostram outros aspectos acerca da concepção do sinal de igual que pode causar dificuldades (Filloy, Rojano & Solares, 2004). Estes autores mostram que certos alunos resolvem equações com uma incógnita, mas não resolvem problemas com duas incógnitas, manifestando dificuldades na aplicação da "transitividade do sinal de igual", quando se depararam com duas equações $4x-3=y$ e $6x+7=y$. Não conseguem reconhecer a transitividade para obter, por exemplo, $4x-3=6x+7$. Uma possível interpretação alternativa tem a ver com a incapacidade dos alunos para substituir o y na primeira equação pela expressão igual da segunda equação. Isto pode ser interpretado como os alunos considerarem os y's como sendo diferentes.

Resolução de problemas e representações na aprendizagem da Álgebra

A resolução de problemas é uma actividade importante em Álgebra. Kieran (2004) considera três tipos de actividade algébrica: actividades de geração, transformação e meta-globais. As primeiras correspondem à construção e interpretação de objectos algébricos. As actividades de transformação incluem a simplificação de expressões algébricas, a resolução de equações e inequações e o cálculo de expressões. Por fim, as actividades meta-globais abarcam a resolução de problemas, a modelação matemática, a generalização de padrões e a análise da variação em situações que envolvem funções.

Windsor (2010) destaca a resolução de problemas como uma oportunidade para enriquecer e transformar o pensamento dos alunos, sublinhando que o professor pode incentivá-los a pensar algebricamente ao invés de os influenciar simplesmente a recorrer a uma determinada estratégia ou procedimento. Salienta ainda que é através da discussão durante o processo de resolução que pode ser desenvolvida uma perspectiva algébrica da Matemática, acrescentando que é fundamental que os alunos reflictam acerca das suas estratégias e partilhem as suas experiências por lhes permitirem desenvolver diferentes formas de entender e abordar os problemas.

Kieran (2006) afirma que, na resolução de problemas de palavras algébricos, os alunos preferem frequentemente recorrer a métodos aritméticos, mostrando dificuldade em utilizar equações. Embora à primeira vista o pensamento aritmético possa parecer um obstáculo para o desenvolvimento do pensamento algébrico, a verdade é que ele também pode ser visto como uma via para esse desenvolvimento. Entre os processos aritméticos mais utilizados neste tipo de problemas, destacam-se as estratégias de tentativa e erro e de *unwind* (desfazer). Outra estratégia consiste em atribuir um valor a uma quantidade desconhecida e verificar a sua exactidão, usando um raciocínio funcional, isto é, reconhecendo a relação existente entre as variáveis, mesmo que essa relação não seja expressa através de linguagem algébrica formal (Johanning, 2004).

No processo dinâmico e evolutivo da aprendizagem da Matemática, nomeadamente num ambiente de resolução de problemas, é importante incentivar os alunos a representar as suas ideias matemáticas de forma que façam sentido para eles, mesmo que essas representações não sejam convencionais. No entanto, é igualmente importante que os alunos aprendam formas estabelecidas de representação que facilitem a actividade matemática e que promovam a comunicação das ideias matemáticas. A resolução de problemas pode ser um bom veículo para estimular o uso de uma grande diversidade de representações. Além disso, possibilita o estabelecimento de conexões entre diferentes tipos de representação e a passagem de umas para outras, ampliando o conhecimento matemático dos alunos (Dufour-Janvier, Bednarz & Bélanger, 1987).

As representações constituem veículos para a compreensão e interpretação de ideias matemáticas e, simultaneamente, ferramentas para o desenvolvimento de estratégias na resolução de problemas, proporcionando múltiplas concretizações de um conceito ou estrutura matemática. A apropriação de propriedades comuns às diversas representações contribui para a caracterização do referido conceito ou estrutura. Podemos distinguir duas categorias de representações: "internas" e "externas". Nas primeiras, encontram-se as imagens mentais que correspondem às formulações internas construídas pelo indivíduo sobre uma dada realidade. As segundas são organizações simbólicas externas (símbolos, figuras, diagramas, gráficos, etc.) cujo objectivo é representar ou codificar uma determinada "realidade matemática" (Dufour-Janvier et al., 1987). As representações internas não são directamente observáveis, quando muito podemos inferi-las pelo comportamento observado da pessoa ou através da sua interacção com as representações externas (Goldin, 2008).

Em vez de representações, Mason (1987) prefere falar de diferentes modos de representação de ideias matemáticas. Para este autor, a actividade de construir significado ou dar sentido a uma ideia decorre do circuito que se estabelece entre a manipulação e a expressão. A manipulação inclui a utilização de objectos físicos, a criação de figuras e diagramas, no papel ou mentalmente, bem como o uso de símbolos. Por seu lado, a expressão implica ser capaz de dizer algo e ser capaz de registar no papel (ou no computador) o sentido do que se diz, através de figuras, diagramas, símbolos ou palavras, usando diversos modos de representação. Os modos de representação podem ser usados simultaneamente como objectos de manipulação e como meios de expressão.

Na resolução de problemas, Preston e Garner (2003) distinguem os seguintes modos de representação: (i) linguagem natural escrita para explicar o raciocínio e as estratégias, como complemento de outros modos de representação; (ii) pictórico, com recurso a desenhos ou imagens para apresentar, conjugar e sintetizar a informação; (iii) aritmético, por vezes, através de estratégias de tentativa e erro, de desfazer ou do uso de tabelas; (iv) gráfico, com recurso a gráficos de variáveis contínuas ou discretas com o objectivo de mostrar o seu comportamento; e (v) algébrico, correspondendo à utilização de linguagem simbólica para generalizar.

Metodologia

No tópico matemático sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas os alunos de uma turma do 9.º ano de escolaridade resolveram os problemas propostos (em anexo) integrados numa experiência de ensino que foi desenvolvida pela investigadora. Anteriormente os alunos já tinham resolvido problemas na folha de cálculo que envolviam relações que podem ser traduzidas por equações do 1.º grau com duas incógnitas e já possuíam a noção de sistema de equações, embora na aula ainda não tivesse sido trabalhado nenhum método de resolução, do ponto de vista formal.

Para a construção da tarefa, a professora teve como pressupostos que esta fosse acessível a todos os alunos e que envolvesse o trabalho com ideias de suporte à aprendizagem dos métodos formais de resolução de sistemas de equações do 1.º grau, em particular, os métodos de substituição e de adição ordenada. As quatro situações propostas foram sequenciadas de acordo com o seu crescente grau de complexidade.

Os objectivos deste estudo, em particular, são: (i) identificar os modos de representação que os alunos utilizam para resolver os problemas e como os mobilizam para alcançar a solução e (ii) perceber como é que as representações utilizadas na resolução dos problemas podem constituir uma base sustentável para a aprendizagem de métodos formais de resolução de sistemas de equações lineares. Tendo em conta estes objectivos, a metodologia adoptada é de natureza qualitativa e enquadra-se no paradigma interpretativo. Para a recolha de dados procedeu-se à gravação áudio da aula em que a tarefa foi discutida e à recolha das resoluções dos alunos da turma. A aula foi transcrita e as resoluções dos alunos foram analisadas. Assim, na análise de dados tivemos em atenção não só as resoluções mas também o discurso dos alunos e o da professora durante a discussão da tarefa. Desta forma, podemos conhecer aquilo que leva os alunos a realizar determinados procedimentos e a fazer determinadas opções relativamente à utilização ou não da linguagem algébrica.

Estiveram presentes na aula 21 alunos, sendo 6 rapazes e 15 raparigas, com idades compreendidas entre os 14 e os 18 anos. Os alunos resolveram os problemas em pares e só depois foi feita a sua discussão em grande grupo. A discussão, para cada um dos problemas, iniciou-se pelas resoluções consideradas mais informais (aritméticas) e só depois se avançou para outras mais formais que incluíam o recurso à simbologia algébrica, bem como procedimentos algébricos, como a resolução de equações.

Resultados globais

Após análise das resoluções dos alunos verificou-se que, quanto aos modos de representação, para além do recurso à linguagem natural e do modo de representação pictórico, podiam ser distribuídas por três categorias: aritmética, algébrica/aritmética e algébrica.

Nas situações classificadas como aritméticas os alunos recorreram apenas às operações elementares, utilizando estratégias de desfazer ou de tentativa e erro. Nas resoluções algébricas/ aritméticas, os alunos começaram por designar o valor de cada animal por uma letra, escreveram as equações que traduzem cada uma das situações mas de seguida utilizaram procedimentos exclusivamente aritméticos para encontrarem a solução.

Aquando da análise das diferentes resoluções verificámos que nalgumas situações surgiam não só a escrita de equações para expressar as relações presentes na informação do enunciado mas também a resolução de algumas delas, pelo que decidimos integrá-las na categoria representações algébricas. O critério estabelecido para as resoluções integrarem esta categoria foi o dos alunos terem resolvido pelo menos uma das equações utilizando procedimentos formais, ou seja, as regras usuais.

Os diferentes tipos de resposta, de acordo com os modos de representação predominantes, estão sintetizados no Quadro 1.

Quadro 1. Tipo de resposta dos alunos.

Modo de representação	Correcta				Incompleta				Sem resposta			
	S1	S2	S3	S4	S1	S2	S3	S4	S1	S2	S3	S4
Aritmética	16	14	17	16	0	2	1	2	-	-	-	-
Algébrica/Aritmética	4	4	1	1	0	0	0	0	-	-	-	-
Algébrica	1	1	1	0	0	0	0	0	-	-	-	-
Total	21	19	19	17	0	2	1	2	0	0	1	2

Da observação do Quadro 1 apuramos que num total de 84 respostas analisadas, apenas três estavam em branco e cinco incompletas, o que significa que praticamente todos os alunos resolveram na íntegra os problemas propostos.

Quanto ao modo de representação, verificamos que nos três primeiros problemas a maior parte dos alunos recorreu a um modo de representação aritmética e no quarto só uma aluna não utilizou este tipo de procedimento. Apenas 4 alunos recorreram ao modo de representação algébrica/aritmética no primeiro e segundo problemas; estes alunos começaram por escrever equações prosseguindo depois com modos de representações aritméticas. No terceiro problema apenas um aluno recorreu a este tipo de representação. No que diz respeito aos modos de representações algébricas, apenas um aluno utilizou este tipo de representação para encontrar as soluções para os três primeiros problemas.

Quanto à linguagem natural, este foi também um modo de representação que acompanhou a explicação dos procedimentos dos alunos, tendo-se verificado mais a sua presença nas situações em que os alunos não recorriam ao modo de representação algébrico. As representações pictóricas surgiram essencialmente nas situações 2 e 3 onde os alunos delimitam os grupos de animais convenientemente para efectuarem substituições de modo alcançarem a solução.

Passamos de seguida a apresentar, para cada um dos problemas propostos, exemplos ilustrativos das respostas dadas pelos alunos, nas diferentes categorias, e excertos de alguns diálogos que ocorreram durante a discussão em sala de aula.

Situação 1

Modo de representação aritmética. O aluno A, como se pode observar na figura 1, começa por dividir o valor 27 por 3, obtendo o valor de cada rato. De seguida, obtém o valor de dois ratos e faz a diferença entre 34 e o valor obtido. Divide depois o resultado por 2, obtendo o valor de cada coelho.

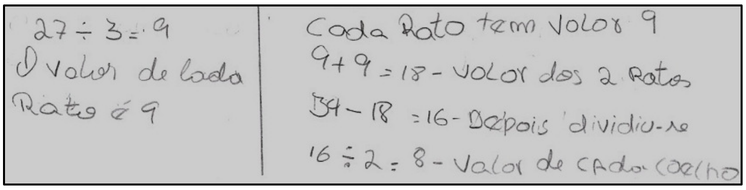
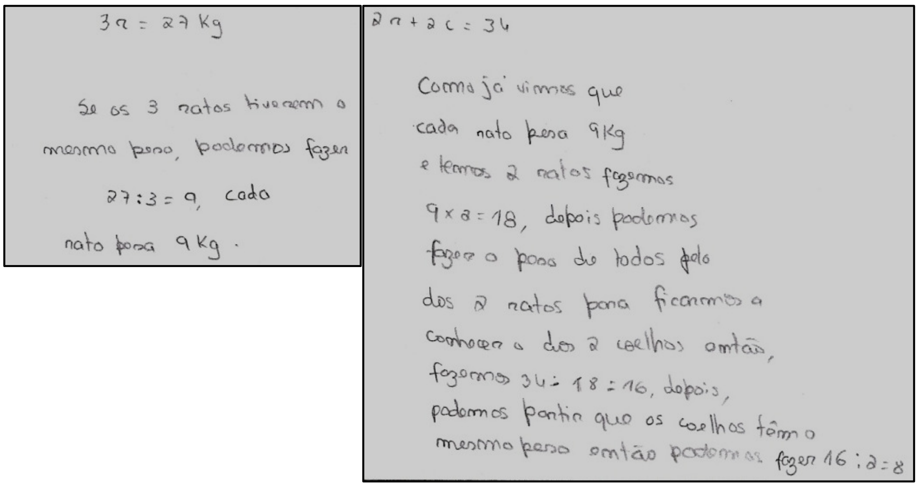


Figura 1: Representação do aluno A.

Modo de representação algébrica/aritmética. A aluna B começou por escrever uma equação que traduz as relações que observa em cada uma das imagens e de seguida envereda por uma resolução aritmética, à semelhança do caso anterior, como se pode observar na figura 2. Neste tipo de resolução, as representações dos alunos assentam em estratégias de desfazer o que equivale aos sucessivos passos da resolução das respectivas equações.


3a = 27 Kg

Se os 3 ratos tiverem o mesmo peso, podemos fazer 27:3 = 9, cada rato pesa 9 Kg.

2a + 2c = 34

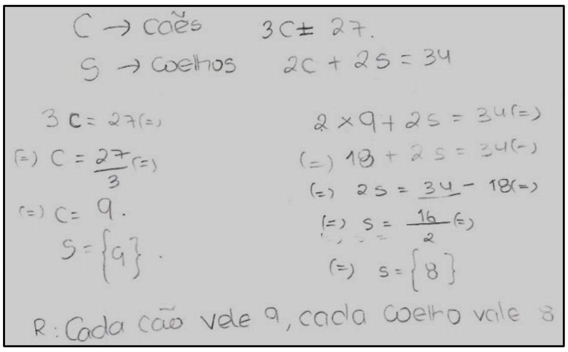
Como já vimos que cada rato pesa 9Kg e temos 2 ratos fazemos 9x2 = 18, depois podemos fazer o peso de todos pelo dos 2 ratos para ficarmos a conhecer o dos 2 coelhos então, fazemos 34 - 18 = 16, depois, podemos partir que os coelhos têm o mesmo peso então podemos fazer 16 : 2 = 8

Figura 2. Representação da aluna B.

Modo de representação algébrica. A resolução apresentada na figura 3 mostra que a aluna escreveu uma equação para cada caso, resolveu a primeira com as regras usuais e substituiu a solução obtida na segunda equação que também resolveu através de procedimentos formais. Esta resolução expressa com bastante clareza o método formal de resolução de um sistema de equações pelo método de substituição.

Na discussão da tarefa, a aluna C referindo-se ao valor do cão, explicou como procedeu.

> *Aluna C*: Depois substituí-o aqui no 2c que é duas vezes os cães, temos que pôr um 9 que é o que deu anteriormente, depois resolvemos a equação e descobrimos o valor pedido.
>
> […]
>
> *Professora*: a resolução da Aluna C, coincide com a resolução de um sistema de equações pelo método de substituição, chama-se método de substituição […] é o que vocês já tinham feito mas muitos de outra maneira […] é um sistema de equações porque as duas condições têm que ser cumpridas simultaneamente. Nesta situação que é das mais simples, o valor obtido da primeira equação vamos substituí-lo imediatamente na segunda.


C → cães $3C = 27$
S → coelhos $2C + 2S = 34$

$3C = 27 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow C = \frac{27}{3} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow C = 9.$
$S = \{9\}.$

$2 \times 9 + 2S = 34 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 18 + 2S = 34 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2S = 34 - 18 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow S = \frac{16}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow S = \{8\}$

R: Cada cão vale 9, cada coelho vale 8

Figura 3. Representação da aluna C.

A professora tendo como suporte as resoluções apresentadas pelos alunos informa-os que aquele processo de resolução se denomina por método de substituição e reforça o que os alunos já apresentaram.

Passamos de seguida à análise do segundo problema que envolve igualmente relações entre duas quantidades desconhecidas. Esta situação é mais complexa do que a anterior por envolver duas substituições para encontrarmos a solução.

Situação 2

Modo de representação aritmética. Na resolução apresentada na figura 4, para além da representação aritmética e da linguagem natural para explicar os seus procedimentos, a aluna recorre também ao modo de representação pictórico, circundando dois grupos de animais na segunda figura, cada um constituído por dois elefantes e um crocodilo, o que lhe permitiu obter o valor de um crocodilo. Voltou depois à primeira imagem para descobrir o valor de cada elefante.

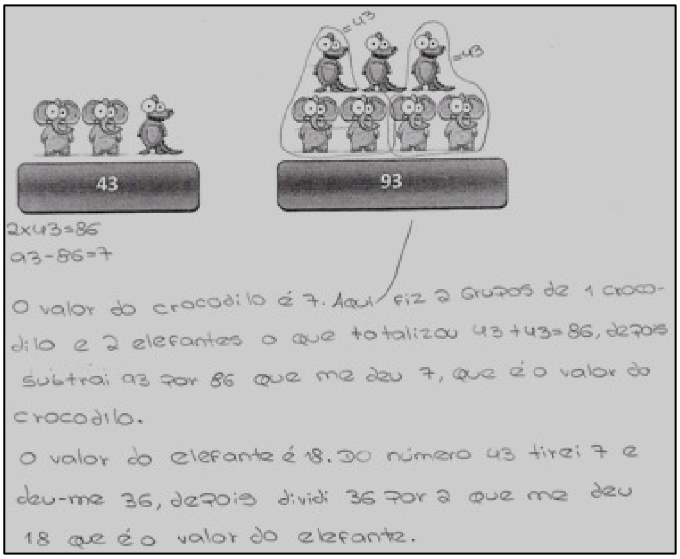


Figura 4. Representação da aluna D.

Modo de representação algébrica/ aritmética. Nesta categoria os alunos escreveram as equações relativas a cada uma das imagens e de seguida enveredaram por processos aritméticos para encontrar os valores das incógnitas.

Modo de representação algébrica. A aluna designou o valor de cada animal por uma letra e, em seguida, escreveu as equações. À semelhança dos colegas delineou os dois grupos na segunda imagem o que lhe permitiu encontrar o valor do crocodilo e resolver a equação para a primeira figura e encontrar o valor do elefante. Por fim, a aluna recorreu à segunda equação para verificar se os valores encontrados satisfaziam a condição, como se pode verificar na figura 5. Na discussão, em sala de aula, após um aluno ter apresentado uma resolução aritmética a professora questionou os alunos no sentido de saber se conseguiriam agora resolver este problema utilizando um método análogo ao que a aluna C utilizou no primeiro problema. Uma aluna vai ao quadro, atribui letras aos valores desconhecidos e escreve o sistema de equações. Em seguida, a professora questiona os alunos acerca da forma como se resolveria o sistema.

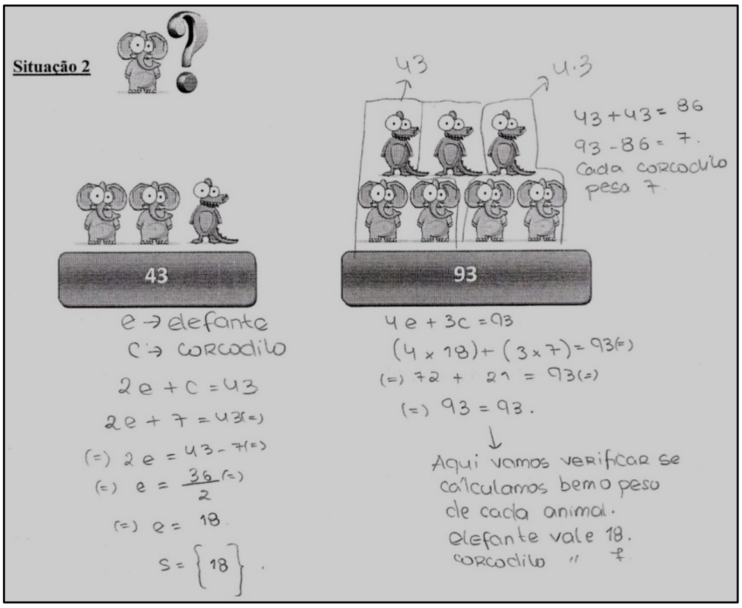


Figura 5. Representação da aluna C.

Neste segundo problema as substituições efectuadas também correspondem ao que usualmente se faz no método de substituição formal como se pode verificar a seguir.

$$\begin{cases} 2e+c=43 \\ 4e+3c=93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e+c=43 \\ \boxed{(2e+c)+(2e+c)}+c=93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e+c=43 \\ \boxed{43+43}+c=93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e+c=43 \\ c=93-86 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e+\boxed{7}=43 \\ c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e=18 \\ c=7 \end{cases}$$

Os dois grupos formados por dois elefantes e um crocodilo, cada um.

Substituição pelo valor obtido da primeira figura.

Substituição pelo valor obtido da segunda figura.

Figura 6. Substituições efectuadas pelos alunos.

Passamos de seguida à análise do terceiro problema. Neste caso existem três quantidades desconhecidas e três imagens.

Situação 3

Modo de representação algébrica/aritmética. Na figura 7 apresentamos uma resolução integrada na categoria algébrica / aritmética, onde a aluna também recorre à linguagem natural e ao modo de representação pictórico. A aluna começou por escrever a equação correspondente a cada uma das imagens, de seguida, seguiu um raciocínio análogo à da questão anterior, fazendo um grupo com 3 minhocas e duas abelhas na segunda imagem, o que lhe permitiu encontrar o valor da minhoca. Depois, substituindo o valor de cada minhoca na primeira imagem encontrou o valor de cada abelha. Por fim, na última imagem a aluna a aluna substituiu os valores já conhecidos obtendo o terceiro valor em falta.

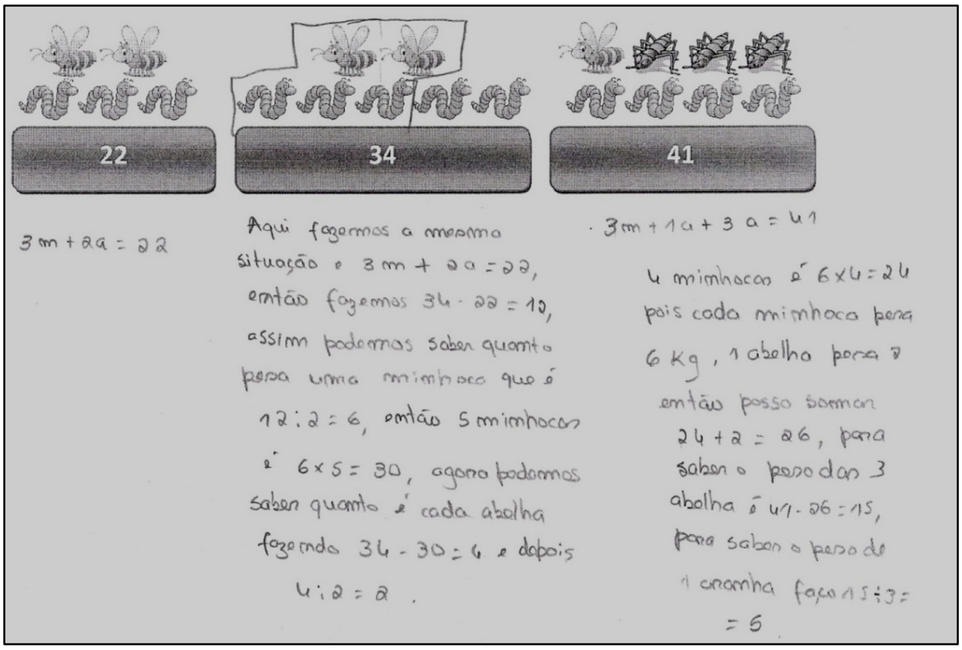


Figura 7. Representação da aluna B.

Modo de representação algébrica. Na resolução da aluna que se apresenta a seguir, na figura 8, a aluna segue passos análogos aos apresentados na resolução da figura 6, mas fá-lo com recurso ao simbolismo algébrico e praticamente não recorre à linguagem natural. Depois de substituir na segunda imagem o grupo de cinco animais da primeira figura pelo respectivo valor, a aluna encontra através de processos aritméticos o valor de cada lagarta. Posteriormente, substitui esse valor na equação correspondente à primeira figura o que lhe permite através da sua resolução encontrar o valor de cada abelha. Para terminar, substitui os valores conhecidos na última equação, resolve-a e encontra o outro valor em falta.

A resolução deste problema, do ponto de vista formal, corresponde à resolução de um sistema de três equações a três incógnitas. Os alunos não mostraram dificuldades na sua resolução, embora a maioria dos alunos tenha recorrido a um modo de representação aritmética não deixaram de estabelecer devidamente as relações entre os valores dos animais e a substituição foi um procedimento visível em todas as resoluções.

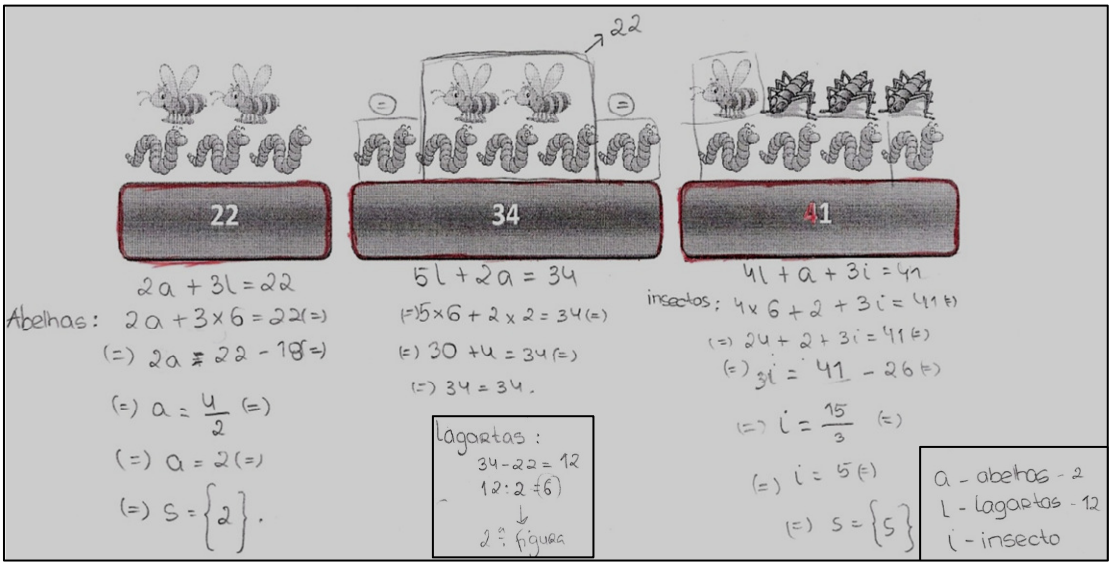


Figura 8. Representação da aluna C.

Situação 4

O último problema tem características distintas dos anteriores e à primeira vista o estabelecimento de relações entre os valores dos animais pode não ser tão evidente como nos problemas anteriores. Nos outros casos foi possível constituir grupos de animais e substituir pelo respectivo valor de acordo com os dados presentes nas imagens era um aspecto facilitador da sua resolução. Neste caso, grande parte dos alunos não conseguiu estabelecer relações entre os valores dos animais e enveredaram por processos de tentativa e erro.

Modo de representação aritmética. Na figura 9 apresentamos a resolução de uma aluna que assenta num processo de tentativa e erro. A aluna recorre à linguagem natural e começa por explicar que os gatos têm um valor inferior aos macacos e depois apresenta as suas tentativas. No final verifica a validade dos valores encontrados.

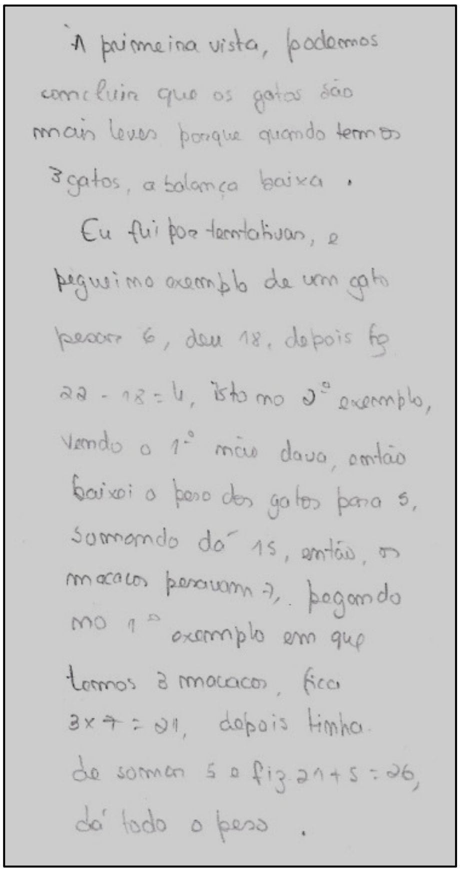

À primeira vista, podemos
concluir que os gatos são
mais leves porque quando temos
3 gatos, a balança baixa.
Eu fui por tentativas, e
peguei no exemplo de um gato
pesar 6, deu 18, depois fiz
22 - 18 = 4, isto no 2º exemplo,
vendo o 1º não dava, então
baixei o peso dos gatos para 5,
somando dá 15, então, os
macacos pesavam 7, pegando
no 1º exemplo em que
temos 3 macacos, fica
3 x 7 = 21, depois tinha
de somar 5 e fiz 21 + 5 = 26,
dá todo o peso.

Figura 9. Representação da aluna B.

Modo de representação algébrica/aritmética. Apenas uma aluna apresentou uma resolução que considerámos integrar esta categoria. Recorrendo apenas a procedimentos aritméticos na resolução do problema a aluna acabou por escrever as duas equações referentes a cada uma das imagens apresentadas, e efectuou a substituição dos valores encontrados para verificar a veracidade da solução encontrada, como se pode verificar na figura 10.

A aluna começou por verificar que a diferença entre o valor de cada macaco e o valor de cada gato era de 2 unidades. Depois somou o valor dos dois grupos de animais obtendo 48 para o valor de quatro gatos e de quatro macacos. Dividiu, em seguida, por 8 obtendo o valor médio de cada animal. Dado que a diferença era de 2 a aluna somou e subtraiu uma unidade ao valor médio obtendo o valor do macaco e o valor do gato.

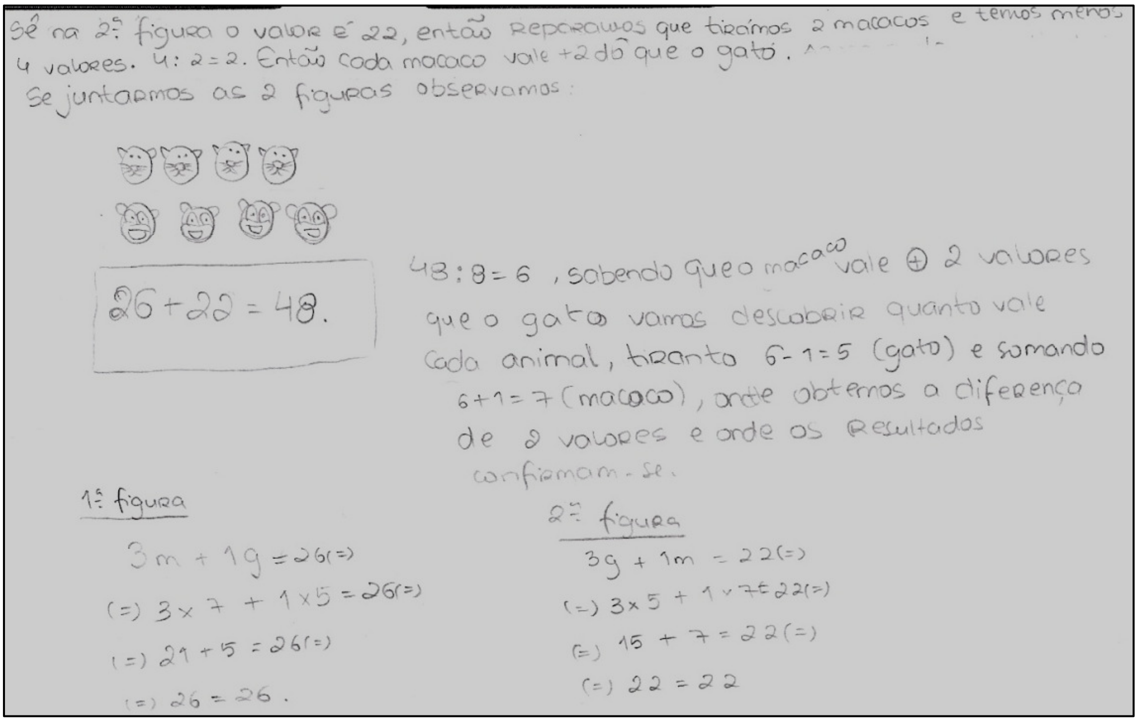


Figura 10. Representação da aluna C.

Na aula, a aluna apresentou a sua resolução e explicou todos os procedimentos aos colegas.

> *Aluna C*: Aqui temos 3 macacos e aqui temos 3 gatos e um macaco. Aqui tirámos estes macacos mas ficámos com este, não é? Não é?
>
> *Vários alunos*: Sim.
>
> *Aluna C*: Então quer dizer que aqui está uma diferença de 4, então quer dizer que cada macaquinho é mais dois do que os gatos.
>
> *Aluna E*: ya.
>
> *Professora*: e depois a partir dai? Já chegámos à conclusão que o macaco tem que valer mais dois do que o gato. E a partir daqui como fizeste?
>
> [A aluna dirige-se ao quadro e desenha]
>
> *Aluna C*: Estes são os gatos… estes são os macacos.
>
> *Aluna F*: Eles todos juntos pesam o quê?
>
> *Aluna C*: Pesam 26 + 22 que é 48.
>
> *Aluna F*: ya!

Aluna C: então eu depois dividi os 48 pelos 8 animais, não é? … que dá 6, quer dizer se eles fossem , valessem todos a mesma coisa, valiam 6 cada um mas como a gente sabe que os macacos pesam mais 2 então tiramos 1 dos 6 que é o valor dos gatos e fica 5 e somamos 1 aos 6 que é os macacos e fica 7 que é aquilo que vocês já disseram no início e depois a gente vai escrever as expressões… as ….

Aluna B: o sistema de equações!

Aluna C: o sistema de equações e verificamos que a resposta está certa.

Figura 11. Aluna C a explicar a junção dos valores dos animais.

A explicação da aluna foi decisiva para um maior número de alunos compreenderem o modo de representação que a aluna utilizou. Por outro lado, serviu de suporte para a professora introduzir o método de adição ordenada, agora com recurso ao simbolismo algébrico.

Professora: […] A estratégia que a aluna C usou é uma estratégia muito interessante, vocês reparem que ela juntou tudo, ela juntou os macacos e os gatos todos, então no fundo o que é que ela fez com estas duas equações?

Alguns alunos: Juntou.

Professora: Se eu juntar estas duas equações o que vai acontecer?

Aluna C: dá 4g mais 4m

[A professora escreve no quadro $\begin{array}{c} 3m + g = 26 \\ \underline{3g + m = 22} \end{array}$]

Aluno E: Isso foi o que a aluna C fez!

Alguns alunos: 4g mais 4m.

[A professora escreve a soma $4g + 4m =$]

Aluno F: 48

Aluno E: É igual ao que a aluna C fez!

Este excerto da discussão permite identificar a correspondência que o aluno E está a fazer entre a resolução apresentada pela aluna C, sem recurso às equações, e o que a professora escreve no quadro. A partir deste momento, os alunos chegaram facilmente à soma do valor de um gato e de um macaco e através da substituição numa das equações encontraram o valor pedido. Para concluir, a professora acrescentou:

Professora: Isto que acabámos de fazer tem um nome, este método em que se somam equações chama-se método da adição ordenada.

Conclusão

Após a análise das representações externas dos alunos, verificámos que quase todos os alunos conseguiram resolver correctamente os problemas e que a maior parte recorreu a um modo de representação aritmética, na resolução dos quatro problemas, conjugando a linguagem natural com o modo de representação pictórico. Conseguiram estabelecer relações de dependência adequadas de forma a obter as soluções, o que está de acordo com o que afirma Kieran (2006) acerca da preferência dos alunos por este tipo de métodos. Entre os processos aritméticos mais utilizados encontram-se estratégias de tentativa e erro e de desfazer. Os modos de representação aritméticos não devem ser desvalorizados, pois os alunos apesar de não estarem a utilizar a linguagem algébrica formal não ficam inibidos de desenvolver o seu pensamento algébrico (Kieran, 1996, 2007; Radford, 2000; Zazkis & Liljedahl, 2002); não expressaram as relações com a simbologia da Álgebra, particularmente com recurso a letras, mas estabeleceram essas relações e mantiveram-nas presentes durante toda a actividade de resolução dos problemas. Para além de terem sido capazes de estabelecer relações adequadas que permitiram obter as soluções, os alunos tiveram a capacidade de, no momento oportuno, recorrer a(s) determinada(s) representação(ões), de tal modo que a manipulação de representações se tornou numa forma matemática activa de encontrar a solução para os problemas. Isto faz supor que os alunos desenvolvem atitudes positivas no sentido de procurarem representações que melhor os ajudem a abordar um problema. O recurso espontâneo a representações alternativas poderá constituir uma estratégia para a superação de dificuldades (Dufour-Janvier et al., 1987).

Consideramos que estes problemas constituíram uma oportunidade para os alunos estabelecerem relações de dependência que os incentivou a pensar algebricamente ao invés de influenciá-los a recorrer simplesmente a um determinado procedimento como é sugerido por Windsor (2010). Permitiu-lhes, por um lado, trabalhar com a ideia de substituição em que os alunos manifestam habitualmente dificuldades (Filloy, Rojano & Solares, 2004) e, por outro, com a ideia de adição ordenada, ambas geradoras de sentido para os métodos formais de resolução de sistemas de equações do 1.º grau.

O facto de pelo menos alguns alunos terem recorrido a representações simbólicas/algébricas mostrou-se importante, pois foi assim possível estabelecer mais facilmente a ponte entre a linguagem aritmética e a linguagem algébrica e formal da resolução de sistemas como era pretendido pela professora.

A discussão em sala de aula revelou-se fundamental pois serviu de suporte para que determinadas ideias relativas ao pensamento algébrico, como o recuso à simbologia algébrica, e a uma perspectiva algébrica da resolução de sistemas fosse desenvolvida. Em paralelo, permitiu aos alunos reflectir acerca das suas estratégias e desenvolver diferentes formas de entender e abordar os problemas propostos (Windsor, 2010).

Reconhecemos que os modos de representação aritméticos e algébricos/aritméticos considerados informais indicam-nos que estes problemas constituem situações propícias para os alunos trabalharem no âmbito das relações de dependência entre variáveis e providenciam uma base consistente para uma representação mais formal (Johanning, 2004). Este aspecto é muito importante, pois tem vindo a ser reconhecida a importância dos métodos informais para encontrar as soluções para determinada tarefa por estes anteciparem os procedimentos formais (Streefland, 1991).

Referências

Arcavi, A. (2006) El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale et al. (Orgs.). *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. (pp.29-48). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Filloy, E., Rojano, T. & Solares, A. (2004). Arithmetic/algebraic problem solving and the representation of two unknown quantities. In M. Johnsen Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 391–398). Bergen University College.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.). New York, NY: Routledge.

Johanning, D (2004). Supporting the development of algebraic thinking in middle school: a closer look at students' informal strategies. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, 371-388.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317-326.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. M. Alvares, B. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (Eds.), *International Congress on Mathematical Education 8: Selected lectures* (pp. 271-290). Seville: SAEM Thales.

Kieran, C. (2004). The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. In K. Stacey et al (Eds). *The Future of teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 21-34). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C. (2007). Developing Algebraic reasoning: the role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, *16*(1) 5-26.

Mason, J. (1987). Representing representing: Notes following the conference. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 207-214). Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(1), 1–19.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. G., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Acedido em 26 de Março, 2010, de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/ Documents/ProgramaMatematica.pdf.

Preston, R., & Garner, A. (2003). Representation as a vehicle for solving and communication. *Mathematics Teaching in the Middle School, 9,* 38-43.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *42*(3), 237-268.

Schoenfeld, A. (2008). Early algebra as mathematical sense making. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 479 – 510). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Streefland, L. (1991). Fractions, an integrated perspective. In L. Streefland (Ed), *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 93-118). Utrecht: Freudenthal Institute.

Windsor. W., (2010). Algebraic Thinking: A Problem Solving Approach. In Sparrow, L., Kissane, B., & Hurst, C., (Eds.). *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (pp.665-672). Fremantle, WA: MERGA.

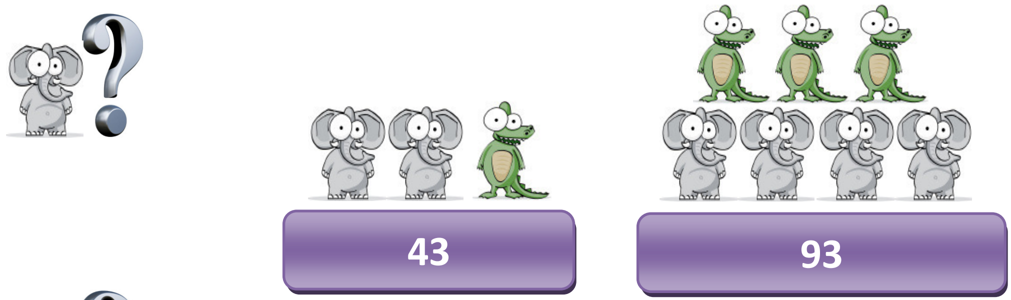
Zazkis, R., & Liljedhal, P.(2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 379-402.

Anexo

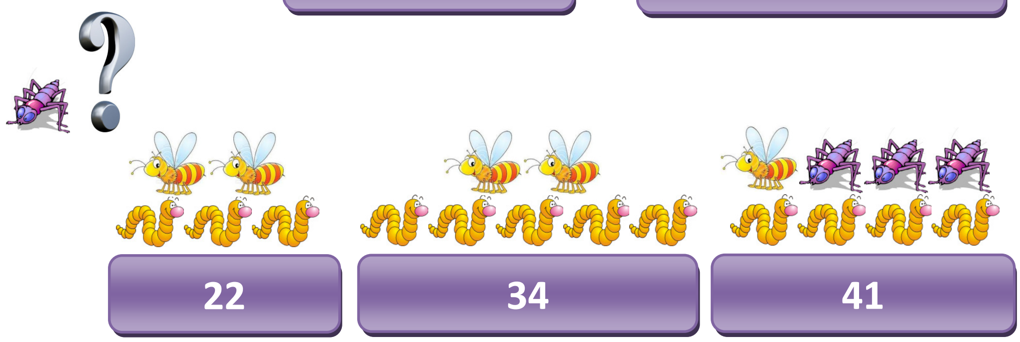
Para cada uma das situações seguintes determina o valor de cada animal pedido. Explica todos os procedimentos.

<u>Situação 1</u>

<u>Situação 2</u>



<u>Situação 3</u>



<u>Situação 4</u>