Brownian-Laplace Motion and Its Use in Financial Modelling

Jorge Brasil

January 18, 2012

William J.Reed - Brownian - Laplace Motion and its use in Financial Modelling, *Communications and statistics - Theory and Methods, 36: 473-484, 2007*

Indíce

Alguns Tipos de Derivados

Alguns Tipos de Derivados

- Forwards

Alguns Tipos de Derivados

- Forwards
- Futuros

Alguns Tipos de Derivados

- Forwards
- Futuros
- Opções

Tipos de Opções

- Call
- Put

Motivações

- Processos estocásticos de Lévy conseguem espelhar a realidade dos mercados financeiros de melhor forma que os modelos baseados no movimento Browniano.
- No mundo real os preços das ações dão saltos
- Distribuições dos retornos exibem enviesamento e caudas largas
- Processos de Lévy são uma ferramenta poderosa para ajustar os modelos à realidade.

exemplo

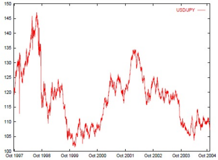
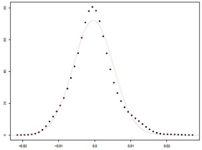


Figure: USD/JPY foreign exchange rate, October 1997-October 2004.



Distribuição Normal-Laplace generalizada(GNL)

$$Y \sim GNL(\mu, \sigma^2, \alpha, \rho)$$

onde α, β, ρ, e σ são positivos e $-\infty < \mu < \infty$

Distribuição Normal-Laplace generalizada(GNL)

$$Y \sim GNL(\mu, \sigma^2, \alpha, \rho)$$

onde α, β, ρ, e σ são positivos e $-\infty < \mu < \infty$

- Distribuição de Y

Distribuição Normal-Laplace generalizada(GNL)

$$Y \sim GNL(\mu, \sigma^2, \alpha, \rho)$$

onde α, β, ρ, e σ são positivos e $-\infty < \mu < \infty$

- Distribuição de Y

$$Y \stackrel{d}{=} \rho\mu + \sigma\sqrt{\rho}Z + \frac{1}{\alpha}G_1 - \frac{1}{\beta}G_2$$

$\stackrel{d}{=}$ significa igualdade em distribuição
sendo

$$Z \sim N(0,1)$$
$$G_1 \sim \Gamma(\rho, 1)$$
$$G_2 \sim \Gamma(\rho, 1)$$

Distribuição Normal-Laplace generalizada(GNL)

Distribuição Normal-Laplace generalizada(GNL)

- Valor Esperado

$$E(Y) = \rho\left(\mu + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)$$

Distribuição Normal-Laplace generalizada(GNL)

- Valor Esperado

$$E(Y) = \rho\left(\mu + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)$$

- Variância

$$var(Y) = \rho\left(\sigma^2 + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right)$$

Distribuição Normal-Laplace generalizada(GNL)

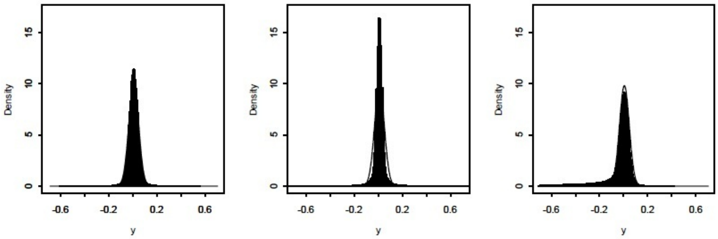
- Função Característica

$$\phi(s) = \left[\frac{\alpha\beta e^{\left(\mu is - \sigma^2 s^2\right)/2)}}{(\alpha - is)(\beta + is)} \right]^{\rho}$$

que pode ser escrita da forma

$$\phi(s) = e^{\left(\rho\mu is - \rho\sigma^2 s^2/2\right)} \left[\frac{\alpha}{\alpha - is} \right]^{\rho} \left[\frac{\beta}{\beta + is} \right]^{\rho}$$

Amostras da Distribuição GNL, $\rho = 0.1$

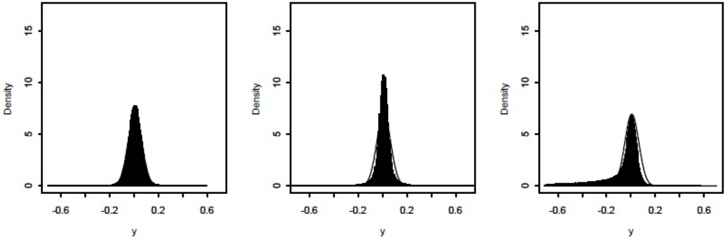


$\mu = 0$,$\sigma^2 = 0.01$
$\alpha = \beta = 17.5$

$\mu = 0$,$\sigma^2 = 0.00373$
$\alpha = \beta = 12.5$

$\mu = 0.0135$,$\sigma^2 = 0.01$
$\alpha = 20$, $\beta = 15.75$

Amostras da Distribuição GNL, $\rho = 0.2$



$\mu = 0$,$\sigma^2 = 0.01$
$\alpha = \beta = 17.5$

$\mu = 0$,$\sigma^2 = 0.00373$
$\alpha = \beta = 12.5$

$\mu = 0.0135$,$\sigma^2 = 0.01$
$\alpha = 20$, $\beta = 15.75$

- Função Geradora de Cumulantes

$$g(t) = log\left(E[e^{tX}]\right)$$

em que X é uma variável aleatória,
vem

$$g(t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1 - E(e^{tx}))^{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(-\sum_{m=1}^{\infty}\mu'_{m}\frac{t^{m}}{m!}\right)^{n}$$

$$= \mu'_{1}t + (\mu'_{2} - \mu'^{2}_{1})\frac{t^{2}}{2!} + \dots$$

Cumulantes

Os cumulantes são obtidos através da diferenciação de $g(t)$ em 0

$$k_1 = g'(0) = \mu'_1 = \mu$$
$$k_2 = g'(0) = \mu'_2 - \mu_1^2 = \sigma$$
$$\vdots$$
$$k_n = g^{(n)}(0)$$

- Cumulantes da Distribuição Normal Laplace Generalizada

$$k_r = \rho(r-1)!\left(\frac{1}{\alpha^r} + (-1)^r \frac{1}{\beta^r}\right)$$

Divisibilidade Infinita

Supondo que $\phi(s)$ é função característica de uma distribuição de probabilidade.
Se $\forall\ n\ \exists\ N$, $\phi^{\frac{1}{n}}(s)$ também é função característica, então a distribuição é infinitamente divisível

Divisibilidade Infinita

Supondo que $\phi(s)$ é função característica de uma distribuição de probabilidade.
Se $\forall\ n \ \exists\ N$, $\phi^{\frac{1}{n}}(s)$ também é função característica, então a distribuição é infinitamente divisível

$$\phi(s) = \left[\frac{\alpha\beta e^{\left(\mu is - \sigma^2 s^2\right)/2)}}{(\alpha - is)(\beta + is)} \right]^{\rho}$$

Processo de Lévy

Definição: Um processo estocástico $L = (L_t)_{t \geq 0}$ com $L_0 = 0$ diz-se um processo de Lévy se:

Processo de Lévy

Definição: Um processo estocástico $L = (L_t)_{t \geq 0}$ com $L_0 = 0$ diz-se um processo de Lévy se:

1. L tem incrementos independentes,
   $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n, X_{t2} - X_{t1}, X_{t3} - X_{t2}, \ldots, X_{tn} - X_{tn-1}$ são independentes

Processo de Lévy

Definição: Um processo estocástico $L = (L_t)_{t \geq 0}$ com $L_0 = 0$ diz-se um processo de Lévy se:

1. L tem incrementos independentes, $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n, X_{t2} - X_{t1}, X_{t3} - X_{t2}, \ldots, X_{tn} - X_{tn-1}$ são independentes
2. L tem estacionariedade de elementos, $\forall s < t, X_t - X_s$ é igual em distribuição a X_{t-s}

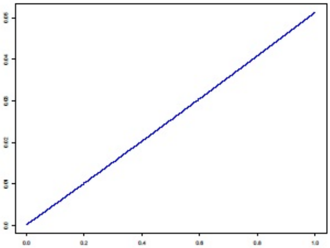
Processo de Lévy

Definição: Um processo estocástico $L = (L_t)_{t \geq 0}$ com $L_0 = 0$ diz-se um processo de Lévy se:

1. L tem incrementos independentes, $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n, X_{t2} - X_{t1}, X_{t3} - X_{t2}, \ldots, X_{tn} - X_{tn-1}$ são independentes
2. L tem estacionariedade de elementos, $\forall s < t, X_t - X_s$ é igual em distribuição a X_{t-s}
3. L é estocasticamente continuo, i.e $\forall\ t \geq 0$ e $\epsilon > 0$:

$$lim_{x \to t} P(|L_t - L_s| > \epsilon) = 0$$

Exemplos



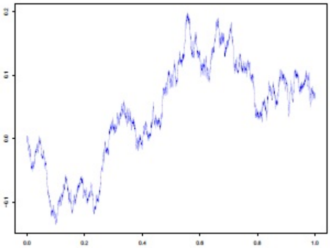


Figure: 'Drift' simples Movimento Browniano

Fórmula de Lévy-Khintchine

Teorema: A lei P_X de uma variável aleatória X é infinitamente divisível se e só se existe um triplete(b, c, v), com $b \in R$, $c \in R_+$ e uma medida $v(0) = 0$ e $\int_R (1 \wedge |x|^2) v(dx) < \infty$, tal que

$$E[e^{isX}] = exp[ibs - \frac{u^2 c}{2} + \int_R (e^{isx} - 1 - isx1_{|x|<1}) v(dx)]$$

Fórmula de Lévy-Khintchine

Teorema: A lei P_X de uma variável aleatória X é infinitamente divisível se e só se existe um triplete(b, c, v), com $b \in R$, $c \in R_+$ e uma medida $v(0) = 0$ e $\int_R (1 \wedge |x|^2) v(dx) < \infty$, tal que

$$E[e^{isX}] = exp[ibs - \frac{u^2 c}{2} + \int_R (e^{isx} - 1 - isx1_{|x|<1}) v(dx)]$$

no caso em estudo o triplete de Lévy é

$$(\rho\mu, \rho\sigma^2, \nabla)$$

em que ∇ é a mediade de Lévy

Exemplo para os saltos

Neste caso especifico os saltos seguem uma lei Variânçia Gamma,

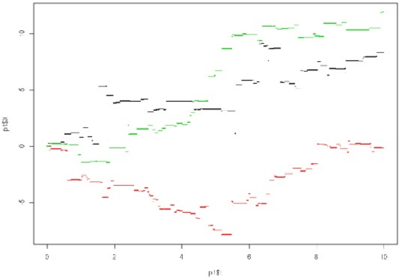


Figure: três simulações da distribuição de probabilidade Variânçia Gamma

Fórmula para preço de Opções

Considere-se uma ação cujo preço S_t é dado por :

$$S_t = S_0 exp(X_t)$$

com $\{X_t\}_{t\geq 0}$ movimento Browniano-Laplace , $X_0 = 0$ e parâmetros $\mu, \sigma^2, \alpha, \beta, \rho$. O objectivo é determinar uma equação para o preço de uma opção call pelo método do risco neutro considerando:

Fórmula para preço de Opções

Considere-se uma ação cujo preço S_t é dado por :

$$S_t = S_0 exp(X_t)$$

com $\{X_t\}_{t \geq 0}$ movimento Browniano-Laplace , $X_0 = 0$ e parâmetros $\mu, \sigma^2, \alpha, \beta, \rho$. O objectivo é determinar uma equação para o preço de uma opção call pelo método do risco neutro considerando:

- preço de exercício K
- taxa livre de risco r
- Tempo T

Para uma opção call Europeia o payoff em $T = 0$ considerando uma medida de Martingale Q é dado por:

$$E_Q[exp(-rT)max\{S_T - K, 0\}]$$

que pode ser escrito como:

$$OV = S_0 \int_{\gamma}^{\infty} d_{GNL}^{*T}(x, \theta + 1)dx - e^{-rT} K \int_{\gamma}^{\infty} d_{GNL}^{*T}(x, \theta)dx$$

com $\gamma = log(K/S_0)$ e

$$d_{GNL}^{*T}(x, \theta) = \frac{e^{\theta x} d_{GNL}^{*T}(x)}{\int_{\infty}^{\infty} e^{\theta y} d_{GNL}^{*T}(y, \theta)dy}$$

em que θ é a unica solução para a equação envolvendo a função geradora de momentos $M(s) = \phi(-is)$

$$logM(\theta + 1) - logM(\theta) = r$$

então

$$OV = S_0 I_{\theta+1} - e^{-rT} K I_\theta$$

com

$$I_\theta = \int_\gamma^\infty d^{*T}_{GNL}(x, \theta) dx$$

K = 1 r = 0.05

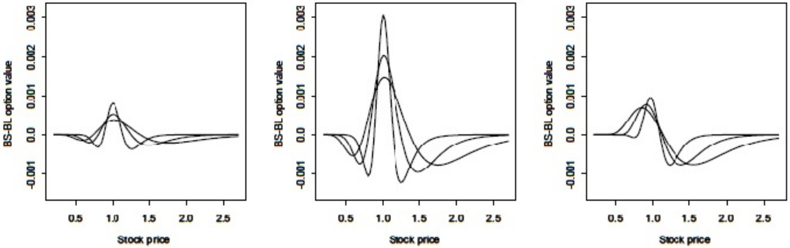


Figure: Diferença entre o modelos de BS e o BL para T=10,30 e 60