Kidney Exchange Programmes
Seminário de Modelação

Sílvia Cunha

U.PORTO

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

18 de Janeiro 2012

Sumário

- Apresentação do tema da tese
- Ideia geral
- Formulação Matemática do Problema
  - Estrutura Geral
  - Formulação Aresta
  - Formulação Ciclo
- Formulação Aresta vs Formulação Ciclo

Tema da Tese

- **Título:** Algoritmos para emparelhamento de pares dador/receptor no transplante cruzado de rins

  Instituição: Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

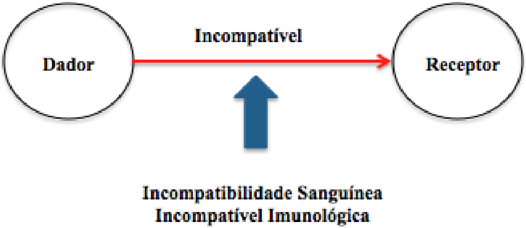
  Departamento de Matemática

  Orientadores: Professor João Pedro Pedroso (DCC-FCUP)

  Professora Ana Viana (INESC Porto)

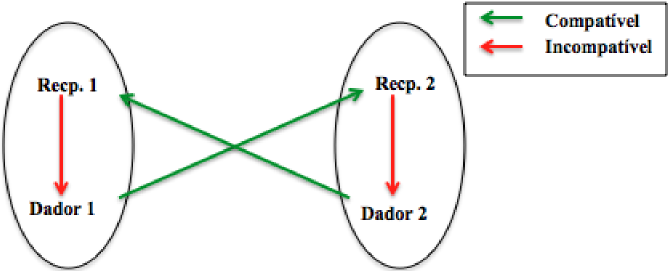
Ideia Geral

- Os Problemas da Transplantação Renal



Ideia Geral

- Transplante Cruzado de rins considerando apenas 2 pares



Algoritmo

First-Accept Match

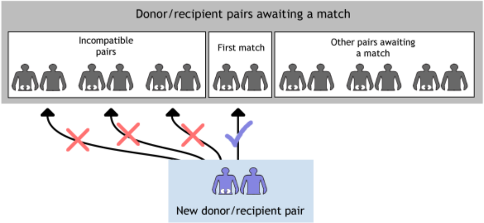
Passo 1: Começa-se com o par dador/receptor n°1

Passo 2: Procura-se na base de dados um par dador/receptor compatível com esse par

Passo 3: Quando encontrado um par compatível, ambos são removidos do base de dados e processa-se o transplante

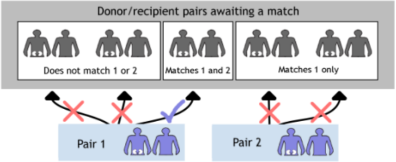
Passo 4: Considera-se o par dador/receptor n°2 e procura-se um par compatível para processar o transplante

Passo 5: Repete-se este processo até que sejam realizados todos os emparelhamentos identifcados e não existam mais oportunidades de emparelhamento



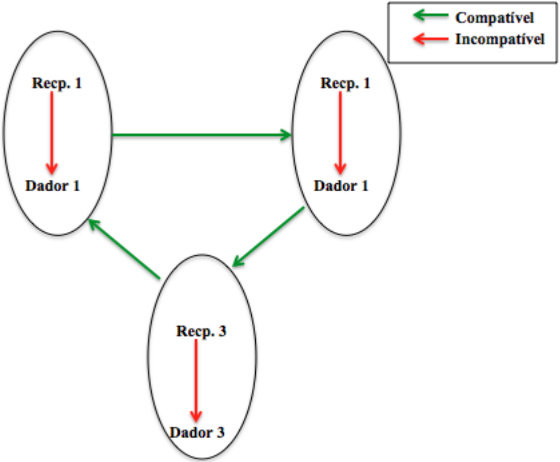
Algoritmo

O problema do algoritmo "First-Accept Match"

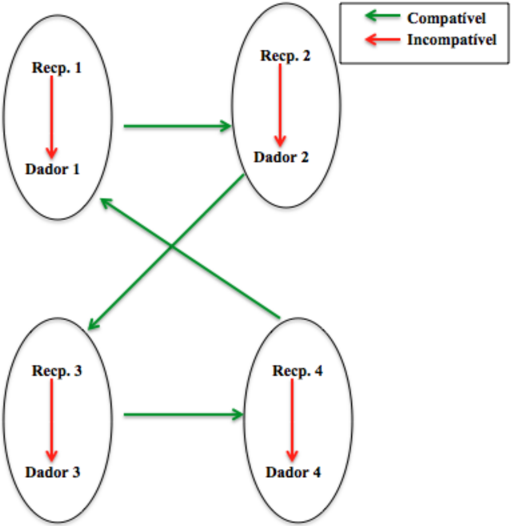


Este algoritmo não tem em conta a dificuldade que determinados pares dador/receptor têm em encontrar um par compatível.

Transplante Cruzado de rins com mais pares

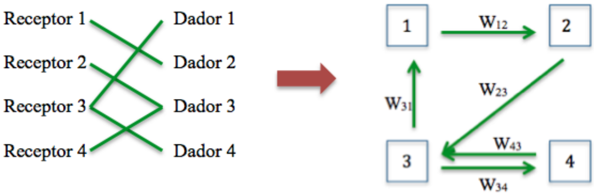


Transplante Cruzado de rins com mais pares



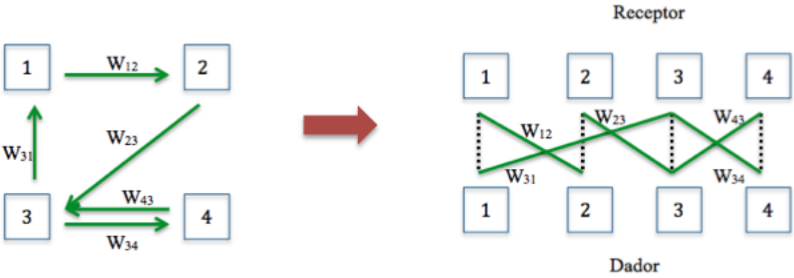
Estrutura Geral

- A bolsa dos pares dador-receptor pode ser representada por um grafo dirigido G(V,A)
- Cada par dador-receptor é representado por um vértice v_i
- Se o dador v_i for compatível com o receptor v_j existe uma aresta com peso w_{ij} de v_j para v_i



- O objectivo é maximizar o número de operações efectuadas.

Formulação Matemática: Formulação Aresta



Formulação Matemática: Formulação Aresta

- Nesta formulação o problema "Kidney Exchange" é um problema de Programação Linear Inteira com a seguinte variável x_{ij}:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se o receptor i é compatível com o dador j} \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

- O objectivo na formulação aresta é maximizar o número de arestas (pesadas) presentes na solução do problema:

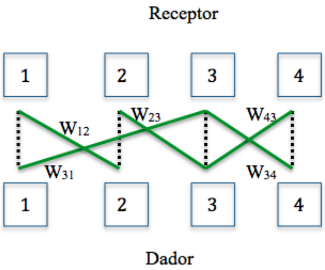
$$maximizar \sum_{(i,j)\in A} w_{ij}x_{ij} =$$

$$maximizar\, x_{12} + x_{23} + x_{31} + x_{34} + x_{43}$$

Formulação Matemática: Formulação Aresta

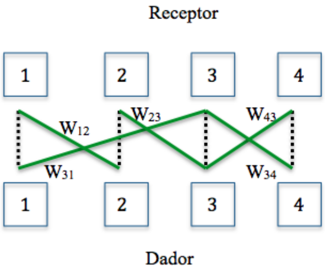
Sujeito a:

- **Cada par dador-receptor apenas doa um rim se também receber um rim e vice-versa:**
  - Considerando o par dador-receptor 1: $x_{12} = x_{31}$
  - Considerando o par dador-receptor 3: $x_{31} + x_{34} = x_{23} + x_{43}$



Formulação Matemática: Formulação Aresta

- **Cada dador apenas pode doar um rim:**
  - Considerando o par dador-receptor 1: $x_{31} \leq 1$
  - Considerando o par dador-receptor 3: $x_{23} + x_{43} \leq 1$



- $x_{ij} \in \{0, 1\}$

Formulação Matemática: Formulação Aresta

- Pode-se ainda considerar uma restrição relativa ao comprimento dos ciclos permitido:

$$\sum_{1 \leq j \leq k} x_{i_j i_{j+1}} \leqslant k - 1 \qquad \forall\ i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}\ com\ i_1 \neq i_{k+1},$$

onde k representa o tamanho máximo que um ciclo pode ter.

$$\Uparrow$$

apenas são considerados caminhos de tamanho $\leq$ k-1, pois são os únicos que podem originar ciclos admissíveis.

Formulação Matemática: Formulação Aresta

Formulação Geral:

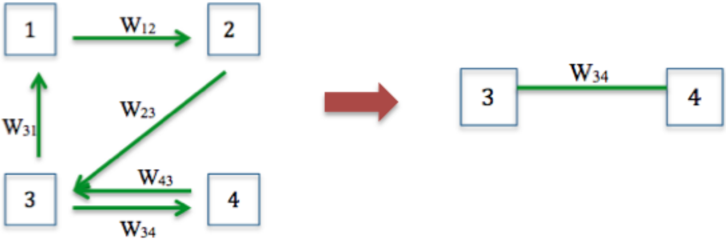
$$\textit{maximizar} \sum_{(i,j)\in A} w_{ij} x_{ij}$$

Sujeito a:

- $$\sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} \quad \forall\, i \in V \Leftarrow \text{restrição de conservação}$$
- $$\sum_{i:(i,j)\in A} x_{ij} \leqslant 1 \quad \forall\, j \in V \Leftarrow \text{restrição de capacidade}$$
- $$\sum_{1\leq j\leq k} x_{i_j i_{j+1}} \leqslant k-1 \quad \forall\, i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1} \; com \; i_1 \neq i_{k+1}$$
- $x_{ij} \in \{0,1\}$

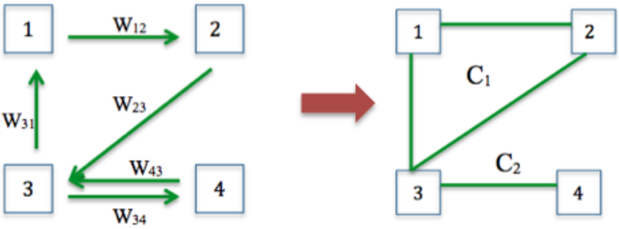
Formulação Matemática: Formulação Ciclo

- Formulação considerando ciclos de tamanho máximo 2



Formulação Matemática: Formulação Ciclo

- Formulação considerando ciclos de tamanho máximo 3



Formulação Matemática: Formulação Ciclo

- Na formulação ciclo o problema "Kidney Exchange"é ma mesma um problema de Programação Inteira Linear.com a seguinte variável binária x_c:

$$x_c = \begin{cases} 1 \text{ se o ciclo c for seleccionado} \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

- O objectivo é novamente indirectamente maximizar o número de arestas na solução do problema:

$$\mathit{maximizar} \sum_{c \in C(L)} w_c x_c =$$

$$\mathit{maximizar}\, 3x_{c_1} + 2x_{c_2}$$

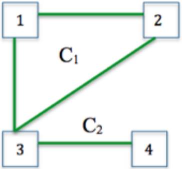
Formulação Matemática: Formulação Ciclo

Sujeito a:

- **Cada par dador-receptor apenas pertence no máximo a 1 ciclo:**
  - Considerando o par dador-receptor 1 : $x_{c_1} \leq 1$
  - Considerando o par dador-receptor 3 : $x_{c_1} + x_{c_2} \leq 1$

$$\Uparrow$$

Cada dador apenas doa um rim e cada receptor apenas recebe um rim



- $x_c \in \{0, 1\} \quad \forall c \in C(L)$

Formulação Matemática: Formulação Ciclo

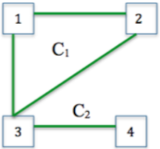
As restrições de conservação e de capacidade existentes na formulação aresta são automaticamente satisfeitas:

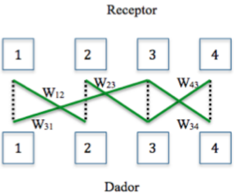
- **Restrição de conservação:**

  Por definição de ciclo, esta restrição é verificada

$$x_{c_1} = 1 \Rightarrow x_{12} = x_{23} = x_{31} = 1$$

$$x_{c_2} = 1 \Rightarrow x_{34} = x_{43} = 1$$



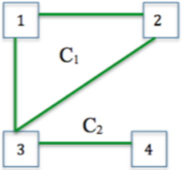


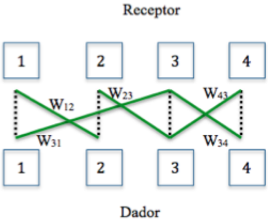
Formulação Matemática: Formulação Ciclo

- **Restrição de Capacidade:**

  Considere-se o exemplo do vértice 3 :

$$\underbrace{x_{c_1} + x_{c_2} \leq 1}_{\textbf{restrição F.C.}} \;\Rightarrow\; \underbrace{x_{23} + x_{43} \leq 1}_{\textbf{restrição F.A.}}$$





Formulação Matemática: Formulação Ciclo

Formulação Geral:

$$\textit{maximizar} \sum_{c \in C(L)} w_c x_c$$

Sujeito a:

- $$\sum_{c: v_i \in c} x_c \leqslant 1 \quad \forall\, v_i \in V$$
- $x_c \in \{0, 1\} \quad \forall c \in C(L)$

Formulação Aresta vs Formulação Ciclo

- A formulação aresta pode ser resolvida em tempo polinomial, quando não há restrição sobre o tamanho dos ciclos; a formulação ciclo só pode ser resolvida em tempo polinomial quando o tamanho dos ciclo é no máximo 2.

- **Consideremos o caso em que L$\geq$ 3:**

  Neste caso os algoritmos de pesquisa de árvore usam Relaxação Linear das formulações para fornecer limites superiores para a solução óptima. Daí vem o seguinte teorema:

Teorema

A Relaxação Linear da formulação ciclo domina de forma fraca a relaxação linear da formulação aresta.

Formulação Aresta vs Formulação Ciclo

Demonstração:

Dada uma solução óptima da Relaxação Linear da formulação ciclo, construímos a seguinte solução da relaxação linear da formulação aresta:

$$V_{aresta} = \sum_{c:aresta \in c} V_c \qquad V_{vertice} = \sum_{c:vertice \in c} V_c,$$

onde V_c é a variável que representa a escolha do ciclo c.

As restrições da capacidade e conservação são verificadas, como anteriormente referido.

Resta apenas mostrar que a restrição referente ao tamanho dos caminhos é verificada por todos os caminhos.

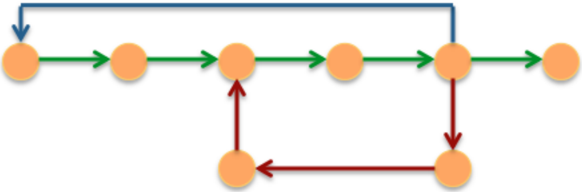
Formulação Aresta vs Formulação Ciclo

Verificação da restrição relativa ao tamanho dos caminhos:
Seja p um qualquer caminho de tamanho L no grafo. Uma vez que p tem L-1 vértices interiores:

$$\sum_{vertice:vertice \in p} V_{vertice} \leq L - 1$$

Para cada ciclo c de tamanho máximo L, o número de arestas que tem em p $(e_c(p))$ é no máximo o número de vértices interiores que tem em p ($v_c(p)$).

Exemplo considerando L= 5:



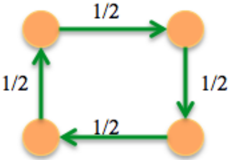
Formulação Aresta vs Formulação Ciclo

Posto isto ,

$$\sum_{e \in p} e \leq \sum_{c \in C(L)} c.e_c(p) \leq \sum_{c \in C(L)} c.v_c(p) \leq \sum_{v \in p} v = L - 1$$

O inverso deste teorema não é verdadeiro. Considere-se um grafo que é simplesmente um ciclo com n arestas, em que n>L. Claramente a Relaxação Linear da formulação ciclo tem valor óptimo 0. No entanto, a formulação aresta tem uma solução de tamanho $\frac{n}{2}$ onde cada aresta possui valor $\frac{1}{2}$.

Exemplo considerando n= 4 e L=3:



$$\sum_{1 \leq j \leq 3} x_{i_j i_{j+1}} \leqslant 2 \qquad \forall\ i_1 i_2 i_3 i_4 \ com\ i_1 \neq i_4$$

Referências

[1] Abraham,D.; Blum, A.; Sandholm, T.; Clearing Algorithms for Barter Exchange Markets: Enabling Nationwide Kidney Exchanges.

[2] Regt, D.; (2010). Kidney Exchange Market: A comparison of two different formulations.

[3] Roth, A.E.; Sonmez, T.; Unver, M.U.; Delmonico, F.L.;Saidman, S.L.;(2006).Utilizing List Exchange and Nondirected Donation through 'Chain' Paired Kidney Donations.American Journal of Transplantion