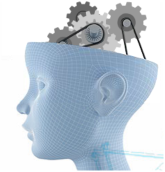
Gestão de stocks
Seminário de Modelação

Daniela Felizardo

ENGENHARIA MATEMÁTICA
2º CICLO (MESTRADO)
FACULDADE DE CIÊNCIAS UNIVERSIDADE DO PORTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



28 de Janeiro de 2013

Contextualização

- Os **stocks** (inventários) são bens ou materiais que as empresas mantêm com a finalidade de revenda.
- É necessário existir uma gestão de inventários. Existem duas filosofias opostas para a gestão da cadeia logística: **push** e *pull*.
- Os problemas de inventários podem classificar-se através dos tipos de variações do **fluxo de abastecimento** I (*input*) e da **função de procura** D (demand).

Classificação de modelos de gestão de stocks

- Para a procura existem dois tipos de modelos:
  - **Modelos determinísticos**
  - **Modelos probabilisticos**
- O objetivo dos modelos de gestão de stocks é otimizar os custos. Os parâmetros relacionados com essa gestão são:
  - **Quando** devem ser colocadas as encomendas - tempo T entre encomendas;
  - **Quanto** encomendar de cada vez - quantidade Q.
- Os custos mais importantes que influenciam os parâmetros ótimos são:
  - **Custo de aquisição**
  - **Custos de encomenda**
  - **Custos de posse do inventário**
  - **Custos de rotura**
    - **Carteira de encomendas**
    - **Vendas perdidas**

Modelos determinísticos

- $Q = Tr$
  Reposição instantânea; penúria não permitida

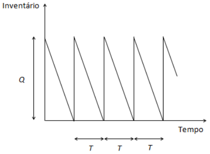


Figura : Reposição instantânea, penúria não permitida

- O custo total por unidade de tempo, é dado por

$$\frac{C_T(Q,T)}{T} = \frac{A + C_2 \frac{Q}{2} T}{T} = \frac{Ar}{Q} + C_2 \frac{Q}{2}$$

$$\Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2Ar}{C_2}} \wedge K^* = K(Q^*) = \sqrt{2ArC_2}$$

Reposição instantânea; penúria permitida

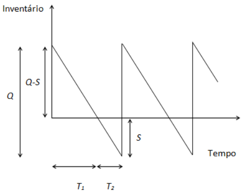


Figura : Reposição instantânea, penúria permitida

$$\frac{C_T(Q,S)}{T} = \frac{A + C_2 \frac{Q-S}{2} T_1 + C_3 \frac{S}{2} T_2}{T}$$

$$\Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2Ar}{C_2}} \sqrt{1 + \frac{C_2}{C_3}} \wedge S^* = \sqrt{2ArC_2} \frac{1}{\sqrt{C_3(C_2+C_3)}}$$

$$\Rightarrow K^* = \sqrt{2ArC_2} \sqrt{\frac{C_3}{C_2+C_3}}$$

Reposição não instantânea; penúria não permitida

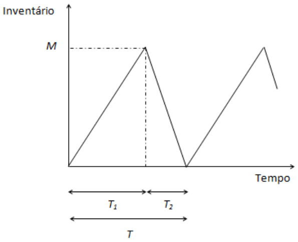


Figura : Reposição não instantânea, penúria não permitida

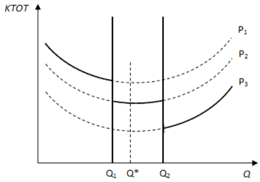
$$K(Q) = \frac{A + C_2 \frac{M}{2} T}{T} = \frac{A}{T} + \frac{C_2}{2}(1 - \frac{r}{p})Q$$

$$\Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2Ar}{C_2}} \sqrt{\frac{p}{p-r}}$$

Descontos de quantidade

- Consideremos agora uma estrutura de descontos definida por três patamares:

$$P(Q) = \begin{cases} P_1, & 0 < Q < Q_1 \\ P_2, & Q_1 \leq Q < Q_2 \\ P_3, & Q \geq Q_2 \end{cases}$$



- O custo total, para o modelo de reposição instantânea, penúria não permitida, é dado por:

$$KTOT(Q, P) = \frac{Ar}{Q} + C_2\frac{Q}{2} + Pr$$

Modelos probabilísticos

- Modelos que considerem a aleatoriedade das variáveis que afetam o comportamento do sistema.
- Flutuações aleatórias da procura.
- Flutuações aleatórias do tempo de reposição do inventário.
- **Política do nível de encomenda**
- **Política da revisão cíclica**

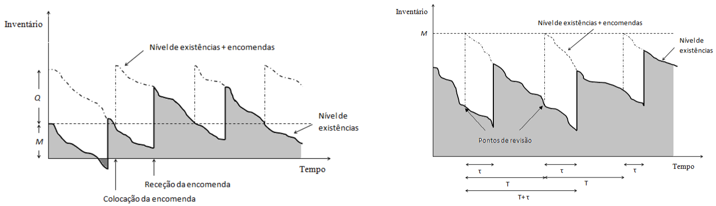


Figura : Política do nível de encomenda e política de revisão cíclica

Políticas do nível de encomenda

- A **quantidade em falta** quando chega uma nova encomenda, $\eta(x, M)$, é dada por

$$\eta(x, M) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq M \\ x - M, & \text{se } x > M \end{cases}$$

onde x representa a procura durante o tempo de reposição.

- O número esperado de unidades em falta por ciclo é

$$\overline{\eta}(M) = \int_M^{+\infty} (x - M) h(x) dx$$

onde $h(x)$ é a função densidade de probabilidade da procura durante o tempo de reposição.

- A **probabilidade de rotura por ciclo** é dada por

$$\alpha = P(x > M) = \int_M^{+\infty} h(x) dx$$

- O valor médio do stock-em-mão no fim do ciclo, **stock de segurança** S, é :

$$S = M - \mu$$

Modelação da procura durante o tempo de reposição

- Quando x (procura) e L (tempo de reposição) são ambas variáveis, a média e a variância da procura durante o tempo de reposição são dadas por

$$\mu = \overline{\tau}\overline{r}$$

$$\sigma^2 = \overline{\tau}\sigma_r^2 + \sigma_\tau^2\overline{r}^2$$

onde $\overline{\tau}$ e σ_τ^2 são a média e a variância do tempo de reposição, e $\overline{r}$ e σ_r^2, a média e a variância da procura por unidade de tempo.

- O inventário de segurança é expresso do seguinte modo

$$S = Z_\alpha \sigma$$

onde Z_α é denominado por **fator de segurança**.

- As unidades em falta por ciclo são representadas por

$$\int_M^{+\infty}(x-M)h(x)dx = \sigma\xi(\frac{M-\mu}{\sigma}) = \sigma\xi(Z_\alpha)$$

onde $\xi(Z_\alpha)$ representa a função de perdas normal.

Otimização global

- Quando ocorre rotura os pedidos não satisfeitos não ficam perdidos.
- O custo total por unidade de tempo, e atendendo que $Q = \overline{T}\overline{r}$, é

$$K(Q, M) = \frac{A\overline{r}}{Q} + C_2\left(\frac{Q}{2} + M - \mu\right) + \frac{C_3'\overline{r}}{Q}\int_M^{+\infty}(x - M)h(x)dx$$

- A solução ótima é

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\overline{r}(A + C_3' \int_{M^*}^{+\infty} (x - M^*)h(x)dx}{C_2}} \wedge \int_{M^*}^{+\infty} h(x)dx = \frac{C_2 Q^*}{C_3'\overline{r}}$$

- Para encontrar a solução ótima temos de recorrer a um método iterativo, pois há interação entre Q^* e M^*.
    1. Começa-se com um valor de Q dado pela expressão do lote ótimo determinístico, fazendo $r = \overline{r}$;
    2. Utiliza-se a expressão acima referida para encontrar o valor de M correspondente a Q;
    3. Utiliza-se a expressão de Q^*, com o valor de M encontrado no passo anterior, para determinar um novo valor de Q;
    4. Voltamos ao passo 2.

Medidas de desempenho para modelos probabilísticos

- Sempre que a variabilidade da procura durante o tempo de reposição é significativa, é costume avaliar a eficiência do sistema de gestão de inventários pelos seguintes indicadores:
  - Custo anual do sistema.
  - Risco de rotura ou seu complementar, designado por nível de proteção ou serviço:
    - i) **Probabilidade de rotura por ciclo (α)**
    - ii) **Percentagem da procura satisfeita sem atrasos** ou **nível de serviço** :

$$\text{Nível do serviço} = \frac{\text{Procura anual} - \text{Procura não satisfeita imediatamente}}{\text{Procura anual}}$$

$$\text{Nível de serviço} = \frac{r - \frac{r}{Q}\overline{\eta}}{r} = 1 - \frac{\overline{\eta}}{Q}$$

Política de revisão cíclica

- Na política de revisão cíclica não há nenhum ponto em que se conheça *a priori* qual o valor das existências físicas. Nos pontos de revisão de existências e com a colocação de uma encomenda, o stock-em-mão mais o encomendado atinge o valor M.

- Se a procura durante $T + \tau$ exceder o valor de M, então existirá rotura.

- A ocorrência de roturas está associado com o comportamento da variável x que é definida por $T + \tau$. A média e a variância são dadas por:

$$\mu = (\overline{\tau} + T)\overline{r}$$
$$\sigma^2 = (\overline{\tau} + T)\sigma_r^2 + \sigma_\tau^2 \overline{r}^2$$

- A probabilidade de rotura por ciclo é de novo dada pela expressão:

$$\alpha = \int_M^{+\infty} h(x)dx$$

A robust optimization approach to inventory theory

- Problema de Programação Linear (PPL) sujeito a incertezas nos dados:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}. \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{minimizar} & \tilde{\mathbf{c}}'\tilde{\mathbf{x}} \\ \text{sujeito a} & \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} \leq 0, \\ & \tilde{\mathbf{l}} \leq \tilde{\mathbf{x}} \leq \tilde{\mathbf{u}}. \end{array}$$

onde $\tilde{\mathbf{x}} = (z, \mathbf{x}, y)'$, $\tilde{\mathbf{c}} = (l, \mathbf{0}, 0)'$, $\tilde{\mathbf{l}} = (-M, \mathbf{l}, l)'$, $\tilde{\mathbf{u}} = (M, \mathbf{u}, l)'$ (M valor grande) e

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} l & -\tilde{\mathbf{c}}' & 0 \\ \tilde{\mathbf{0}} & -\tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{b}} \end{pmatrix}$$

- Modela-se em $\tilde{\mathbf{A}}$ a incerteza dos dados: $a_{ij} \in [\overline{a}_{ij} - \hat{a}_{ij}, \overline{a}_{ij} + \hat{a}_{ij}]$.
- Define-se o desvio escalonado do parâmetro a_{ij} do seu valor nominal como

$$z_{ij} = \frac{a_{ij} - \overline{a}_{ij}}{\widehat{a}_{ij}}$$

- Impoem-se um conjunto de incertezas onde a variação (escalonada) total dos parâmetros não pode exceder algum limiar Γ, não necessáriamente inteiro:

$$\sum_{(i,j)\in J} |z_{ij}| \leq \Gamma$$

onde J é o conjunto de índices de parâmetros incertos.

Abordagem Robusta

- Seja

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{m\times n} | a_{ij} \in [\overline{a}_{ij} - \hat{a}_{ij}, \overline{a}_{ij} + \hat{a}_{ij}] \ \forall \ i, j, \sum_{(i,j)\in J} \frac{\overline{a}_{ij} - \hat{a}_{ij}}{\hat{a}_{ij}} \leq \Gamma\}$$

- O problema robusto é formulado como

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \ \forall \ \mathbf{A} \in \mathcal{A}, \\ & \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}. \end{array}$$

Teorema (Bertsimas e Sim 2003A)

O PPL incerto tem a seguinte forma linear robusta:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ \text{sujeito a} & \sum_j \overline{a}_{ij}x_j + q_i\Gamma + \sum_{j:(i,j)\in J} r_{ij} \leq b_i \quad \forall i, \\ & q_i + r_{ij} \geq \hat{a}_{ij}y_i \quad \forall (i,j) \in J \\ & -\mathbf{y} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{y}, \quad \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}. \\ & \mathbf{q} \geq 0, \ \mathbf{r} \geq 0, \ \mathbf{y} \geq 0. \end{array}$$

O Modelo Não Limitado

- Define-se para $k = 0, 1, ..., T$:
  - x_k: stock disponível no início do período k;
  - u_k: stock encomendado no início do período k;
  - w_k: procura durante o período k.
- A evolução do stock, ao longo do tempo, é descrito pela seguinte equação linear:

$$x_{k+1} = x_k + u_k - w_k, \quad k = 0, 1, ..., T-1$$

que conduz à expressão:

$$x_{k+1} = x_0 + \sum_{i=0}^{k} (u_i - w_i), \quad k = 0, 1, ..., T-1$$

- As procuras w_k são variáveis aleatórias.
- Modela-se w_k para cada k como um parâmetro incerto que toma valores em $[\overline{w}_k - \hat{w}_k, \overline{w}_k + \hat{w}_k]$.
- O desvio escalonado de w_k pelo seu valor nominal:

$$z_k = \frac{w_k - \overline{w}_k}{\hat{w}_k}$$

- Temos a condição $\sum_{i=0}^{k} |z_i| \leq \Gamma_k$ para cada período de tempo $k = 0, 1, ..., T-1$.

O Modelo Não Limitado

- O custo incorrido no período k consiste em duas partes:
  - **custo de encomenda**, $c(u_k)$

$$C(u) = \begin{cases} K + c.u, & \text{se } u > 0 \\ 0, & \text{se } u = 0 \end{cases}$$

    com $c > 0$ (custo variável unitário) e $K \geq 0$ (custo fixo)
  - **custo de posse/escassez**, $R(x_k + u_k - w_k)$

$$R(x) = max(hx, -px),$$

    onde h e p são não negativos. Assume-se que $p > c$, de maneira que encomendar stock seja possível até ao último período.

O Modelo Não Limitado

- Formulação robusta para o problema de stock numa única estação:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & \sum_{k=0}^{T-1}(cu_k + Kv_k + y_k) \\ \text{sujeito a} & y_k \geq h(x_0 + \sum_{i=0}^{k}(u_i - \overline{w}_i) + q_k\Gamma_k + \sum_{i=0}^{k} r_{ik}) \quad \forall k, \\ & y_k \geq -p(x_0 + \sum_{i=0}^{k}(u_i - \overline{w}_i) + q_k\Gamma_k + \sum_{i=0}^{k} r_{ik}) \quad \forall k, \\ & q_k + r_{ij} \geq \hat{w}_i \quad \forall k, \forall i \leq k, \\ & q_k \geq 0, r_{ij} \geq 0 \quad \forall k, \forall i \leq k, \\ & 0 \leq u_k \leq Mv_k, \quad v_k \in \{1,0\} \quad \forall k, \end{array}$$

onde M é um número grande positivo.

- As variáveis q_k e r_{ik} quantificam a sensibilidade do custo para variações infinitesimais nos parâmetros-chaves da abordagem robusta.

Modelo Limitado

- Ao modelo robusto basta adicionar a restrição do tamanho máximo da encomenda:

$$u_k \leq d \quad \forall k$$

- Acrescenta-se a seguinte restrição ao modelo robusto para garantir o limite de stock:

$$x_0 + \sum_{i=0}^{k} (u_i - w_i) \leq C,$$

onde C é a capacidade máxima de stock, $w_i = \overline{w}_i + \hat{w}_i . z_i$ tal que $\mathbf{z} \in \{|z_i| \leq 1 \quad \forall i, \sum_{i=0}^{k} |z_i| \leq \Gamma_k \quad \forall k\}$.

- A restrição da capacidade do inventário torna-se

$$x'_{k+1} \leq C - \frac{2p}{p+h} A_k \quad \forall k.$$

Modelos Sem Limites

- Caso da rede em árvore;
- Sistema em séries;
- Escalão - k;
- S o número de nodos finais;
- Define-se para $k = 1, ..., N$:
  - $I_k(t)$: stock disponível no início do periodo t na instalação k;
  - $X_k(t)$: stock disponível no início do periodo t no escalão k;
  - $D_{i_k k}(t)$: stock encomendado no início do periodo t no escalão k ao seu fornecedor i_k;
  - $W_s(t)$: procura no nodo final s durante o periodo t, $s = 1, ..., S$.
- Seja $N(t)$ o conjunto de instalações fornecidas pela instalação k e $O(k)$ o conjunto de nodos finais no escalão k.

Modelo sem limites

- A dinâmica linear para o stock na instalação k ao longo do tempo ($k = 1, ..., N$) (prazo de entrega igual a 0 e acumulação da procura excessiva):

$$I_k(t+1) = I_k(t) + D_{i_k k}(t) - \textstyle\sum_{j \in N(k)} D_{i_k k}(t), \qquad t = 0, ..., T-1.$$

- Por convenção, se k é um nó final s, $\sum_{j \in N(k)} D_{i_k k}(t) = W_s(t)$. Que nos leva à seguinte dinâmica para a o stock no escalão k:

$$X_k(t+1) = X_k(t) + D_{i_k k}(t) - \textstyle\sum_{s \in O(k)} W_s(t) \qquad t = 0, ..., T-1.$$

- O stock encomendado pelo escalão k no tempo t é sujeito à restrição de acoplamento

$$\sum_{i \in N(k)} D_{i_k k}(t) \leq \max(I_k(t), 0) \quad \forall k, \forall t,$$

- Por indução, a restrição de acoplamento entre escalões é linear e pode ser escrita como

$$\sum_{i \in N(k)} D_{ki}(t) \leq \overline{X}_k(t) - \sum_{i \in N(k)} \overline{X}_i(t) \forall k, \forall t,$$

Modelo sem limites

- Aplicando a abordagem robusta às restrições de posse/escassez da mesma maneira que anteriormente, obtem-se o PPL misto:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \textstyle\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i\in N(k)}\{c_{ki}D_{ki}(t)+K_{ki}V_{ki}(t)+Y_i(t)\} \\
\text{sujeito a} \quad & Y_i(t)\geq h_i\{\overline{X}_i(t+1)+\textstyle\sum_{s\in O(i)}(q_s(t)\Gamma_s(t)+\sum_{\tau=0}^{t} r_s(\tau,t))\}\forall i,\forall t, \\
& Y_i(t)\geq p_i\{-\overline{X}_i(t+1)+\textstyle\sum_{s\in O(i)}(q_s(t)\Gamma_s(t)+\sum_{\tau=0}^{t} r_s(\tau,t))\}\forall i,\forall t, \\
& \textstyle\sum_{i\in N(k)} D_{ki}(t)\leq \overline{X}_k(t)-\sum_{i\in N(k)}\overline{X}_i(t)\forall k,\forall t, \\
& q_s(t)+r_s(\tau,t)\geq \hat{W}_s(\tau)\forall s,\forall \tau\leq t, \\
& q_s(t)\geq 0,\quad r_s(\tau,t)\geq 0\forall s,\forall\tau\leq t, \\
& 0\leq D_{ki}(t)\leq MV_{ki},\ V_{ki}\in\{0,1\}\forall k,\forall i\in N(k),\forall t.
\end{aligned}
$$

Modelo limitado

- Limites superiores no (qualquer escalão, qualquer tempo):
  - stock encomendado;
  - stock armazenado.

- Um limite superior na quantidade máxima a encomendar pode ser diretamente adicionada nas restrições da formulação robusta:

$$D_{ki}(t) \leq d_{ki} \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall t$$

- A capacidade do stock, requer alguma manipulação porque o nível de inventório armazenado em cada escalão a qualquer tempo depende da procura, essas manipulações originam a seguinte restrição:

$$\overline{X}_k(t+1) + \sum_{s \in \mathcal{O}(k)} (q_s(t)\Gamma_s(t) + \sum_{\tau=0}^{t} r_s(\tau, t)) \leq C_k \quad \forall k, \forall t$$

Implementação numérica

- O propósito do estudo computacional é investigar o desempenho da abordagem robusta quando as distribuições subjacentes não são perfeitamente conhecidas.
- Em particular, o objetivo é comparar o desempenho relativo da abordagem robusta e métodos tradicionais (programação dinâmica, no caso de uma única instalação e políticas míopes para redes mais complexas).
- Os temas abordados são:
    - a robustez de ambos os métodos em relação às mudanças de distribuição de probabilidade;
    - o efeito de vários parâmetros (posse, escassez, parâmetros da encomenda, e horizonte de tempo) sobre o desempenho relativo dos dois métodos.
- Para atender a esses objetivos, considerma-se vários valores para os parâmetros do sistema, e estudam-se diversas distribuições.

Exemplo de uma única instalação

- O horizonte é $T = 20$ periodos de tempo;
- A instalação não tem stock no tempo 0;
- Custo unitário $c = 1$;
- Custo de posse $h = 4$;
- Custo de escassez $p = 6$;
- Não tem custos fixos de encomenda;
- A procura probabilística é i.i.d., com média $\overline{w} = 100$ e desvio padrão $\sigma = 20$.
- Na estrutura robusta, toma-se $\hat{w} = 2.\sigma$, isto é, a procura pertence ao intervalo $[\overline{w} - 2.\sigma, \overline{w} + 2.\sigma]$
- O indicador-chave de desempenho considerado é o desempenho relativo da política robusta comparada coom a política estocástica obtida pela programação dinâmica, medida como o racio $R = 100.(E(DP) - E(ROB))/E(DP)$, em percentagem. Em particular, quando $R > 0$ a política robusta leva a custos, em média, mais baixos do que com a política estocástica.

Exemplo de uma única instalação

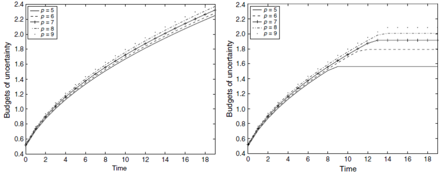


Figura : Conjunto de incertezas para $c = 0$ (esquerda) e $c = 1$ (direita), com $h = 4$

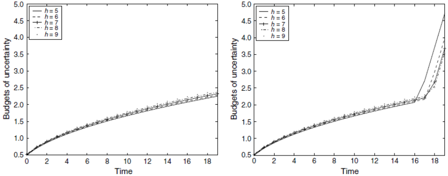


Figura : Conjunto de incertezas para $c = 0$ (esquerda) e $c = 1$ (direita), com $p = 4$

Exemplo de uma única instalação

- Nas próximas figuras indica-se o desempenho das políticas de programação robusta e dinâmica quando a distribuição assumida é binomial (respetivamente, Gaussiana - 5 pontos $(\overline{w}-2\sigma, \overline{w}-\sigma, \overline{w}, \overline{w}+\sigma, \overline{w}+2\sigma)$), na direita (respetivamente, direita) de cada figura.

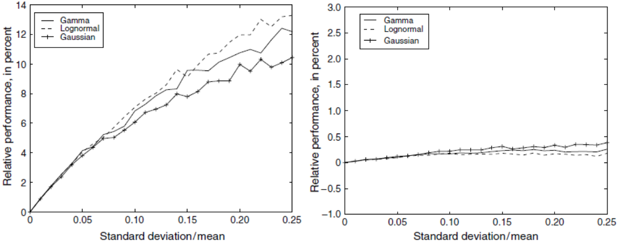


Figura : Impacto do desvio padrão sobre o desempenho

Exemplo de uma única instalação

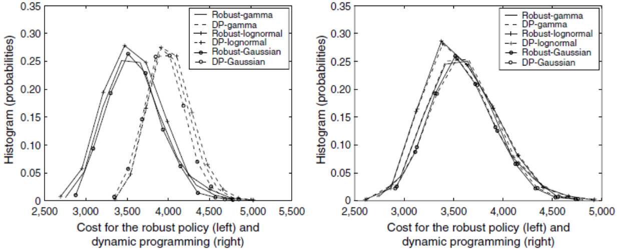


Figura : Distribuições de probabilidade de amostra

Exemplo de uma única instalação

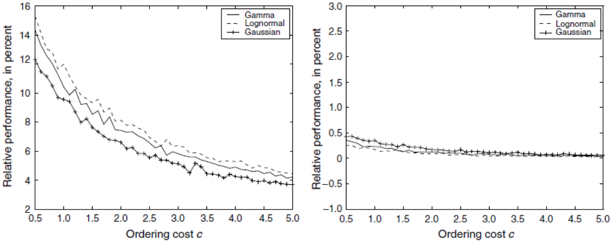


Figura : Impacto do custo de encomenda sobre o desempenho

Exemplo de uma única instalação

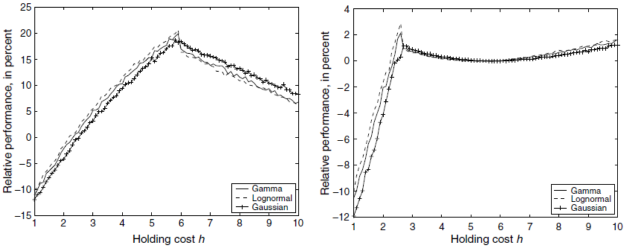


Figura : Impacto do custo de posse sobre o desempenho

Exemplo de uma única instalação

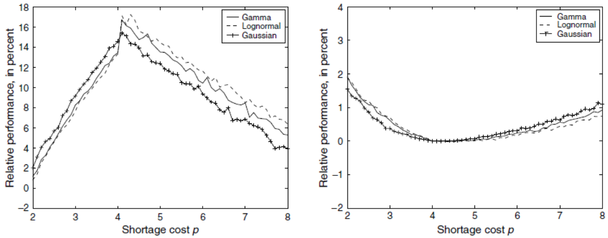


Figura : Impacto do custo de escassez sobre o desempenho

Exemplo de uma única instalação

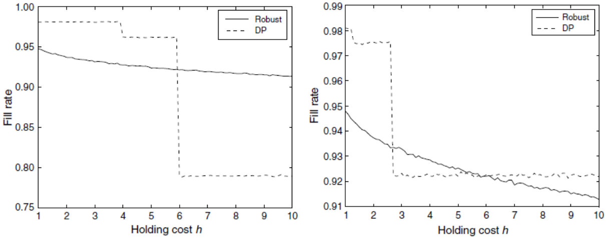


Figura : Impacto do custo de posse sobre as *fill rate*

Exemplo de uma única instalação

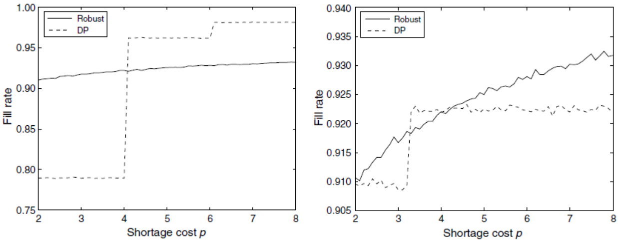


Figura : Impacto do custo de escassez sobre as *fill rate*

Resultados

- A abordagem robusta leva a soluções de alta qualidade e, muitas vezes supera programação dinâmica baseada em políticas em estações individuais.
- Para as estações individuais, a abordagem robusta supera programação dinâmica, quando o custo de manutenção é acima de um certo limiar (em relação ao custo de escassez) e ultrapassada pela programação dinâmica caso contrário.
- Esta conclusão é válida para uma grande variedade de distribuições assumidas e realizadas, bem como outros parâmetros (tais como o custo da encomenda).

Referências

- L. Valadares Tavares, Rui Carvalho Oliveira, Isabel Hall Themido, F. Nunes Correira,- "Investigação Operacional-, McGraw Hill, (1996)
- Dimitris Bertsimas, Aurélie Thiele,- "A Robust Optimization Approach to Inventory Theory-, 2006 INFORMS