Risco de Portfólios em Múltiplas Frequências

Joana Ramos

FCUP

25 de Janeiro de 2013

Abstract

- *Portfolio risk* (carteira de risco) foi introduzido em 1952 por Markowitz;
- Risco de Portfólio é definido como sendo o desvio padrão do retorno de uma carteira;
- É uma métrica importante na Teoria de Portfólio Moderna (MPT).

Introdução

- Uma carteira(*portfolio*) é uma coleção de investimentos em vários ativos financeiros (ações, futuros, opções, títulos, etc) com capitais de investimento alocados.
- Dois aspetos importantes das carteiras são:
  - O retorno
  - O risco
- O principal objetivo do gerente da carteira:
  - Manter a taxa de retorno sobre o risco de carteira o mais alto possível.
- Uma carteira com risco mínimo é chamada de carteira eficiente para um retorno esperado. O conjunto de carteiras eficientes forma uma fronteira eficiente. (Markowitz)

Modelo de Gestão de *Portfolios*

- A perspectiva média-variância, pela qual *Harry Markowitz* recebeu o Prémio Nobel da Economia em 1990, ofereceu aos investidores a primeira solução sistemática do dilema com que se deparam: o conflito entre o elevado lucro e baixo risco.
- *Markowitz* desenvolveu um modelo de otimização paramétrico e simultaneamente genérico, para poder ser aplicado numa grande variedade de problemas práticos, e simples do ponto de vista da sua implementação.

Risco e Rentabilidade de carteiras com 2 ativos

Considere uma carteira composta apenas por dois ativos:

O retorno de uma carteira entre dois ativos

$$R_p(n) = q_1(n)R_1(n) + q_2(n)R_2(n) \tag{1}$$

R_i é o retorno do ativo i

$$R_i(n) = [P_i(n)/P_i(n-1)] - 1 \tag{2}$$

Rentabilidade média esperada de portfolio:

$$\mu_p = E(R_p) = q_1 E[R_1] + q_2 E[R_2] \tag{3}$$

Variância de portfolio:

$$\sigma_p^2 = q_1^2\sigma_1^2 + 2q_1 q_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} + q_2^2 \sigma_2^2 \tag{4}$$

Risco e Rentabilidade de carteiras com N ativos

O retorno de um carteira para N ativos:

$$R_p = q^T R = \sum_{i=1}^{N} q_i R_i \tag{5}$$

Rentabilidade média esperada de N portfolio:

$$\mu_p = E[R_p] = q^T E[R] = q^T \mu \tag{6}$$

Variância de N portfolio:

$$\sigma_p^2 = E[R_p^2] - \mu_p^2 = q^T \Sigma^T C \Sigma q = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} q_i q_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \tag{7}$$

Risco e Rentabilidade - Exemplo

		Taxas de renumeração % esperadas para cada cenário i		
cenários	R_i	$q_{4,i}$	$q_{5,i}$	$q_{6,i}$
1	20%	-18	-13	-4
2	25%	16	16	-2
3	30%	12	32	21
4	25%	40	12	20

Assim, a rentabilidade esperada, a variância das rentabilidades e os desvios padrões são:

	Título 4	Título 5	Título 6
Variância	376.00	245.00	136.50
Desvio-Padrão	19.39	15.65	11.68
$E(R_p)$%	14.00	14.00	10.00

Risco e Rentabilidade - Exemplo (Representação Gráfica)

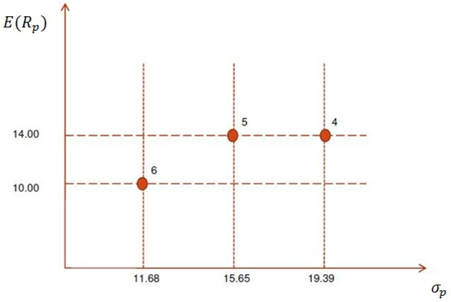


Figura : Representação gráfica da situação

Otimização de carteiras com risco

- É conseguida através da minimização do risco da carteira, μ_p, da equação (7) com a restrição

$$\mu_p = q^T \mu = \sum_{i=1}^{N} q_i \mu_i = \mu \tag{8}$$

- O capital de investimento de uma carteira pode ser constante, isto é:

$$q^T 1 = \sum_{i=1}^{N} q_i = 1 \tag{9}$$

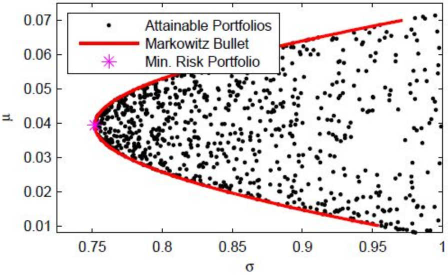
- O problema de minimização do risco de criar uma carteira ótima está sujeito as restrições (8) e (9) e podem ser resolvidos através da introdução de dois multiplicadores de Lagrange, assim, o investimento para uma carteira de risco mínimo é dado por:

$$q_{min} = argmin_q \frac{1}{2} q^T C q + (1 - q^T 1). \tag{10}$$

- Após alguns cálculos a solução trivial encontrada foi:

$$q_{min} = \frac{C^{-1}1}{1^T C^{-1}1} \tag{11}$$

- Note-se que $(\sigma_{min}, \mu_{min})$ é o par correspondente a q_{min} no ponto extremo representado na curva de Markowitz por (*).



- A carteira de risco mínimo é única, sendo o risco mínimo atingível, mas neste caso, o retorno esperado μ_p não é o melhor possível.

Estimação do ruído através de uma matriz de correlação

Considere-se a amostra da matriz de correlação que pode ser usada como estimativa da matriz C dada por:

$$\hat{C} = \frac{1}{M} R R^T \tag{12}$$

- R é uma matriz de retorno
- N é número de ativos na carteira
- M é o número de amostras de retorno disponíveis por ativo.
- Cada elemento de R, ou seja, R_{ij} é o retorno normalizado do ativo $i = 1, 2, \cdots, N$ e $j = 1, 2, \cdots, M$

Considere-se agora uma matriz aleatória NxN, isto é, uma matriz cujo os elementos são variáveis aleatórias construídas como:

$$K = \frac{1}{M} W W^T \tag{13}$$

- W é uma matriz NxM constituida por elementos não correlacionados extraídos duma distribuição Gaussiana com $E(W) = 0$ e $Var(W) = \sigma^2$, i.e., $[W]_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$
- Mostra-se que a distribuição dos valores próprios da matriz K é dada por:

$$f(\lambda) = \frac{M}{2\pi\sigma^2 N} \frac{\sqrt{(\lambda_{max} - \lambda)(\lambda - \lambda_{min})}}{\lambda} \tag{14}$$

onde

  - $f(.)$ é uma função densidade probabilidade quando $N \longrightarrow \infty$, $M \longrightarrow \infty$ com taxa fixa M/N .
  - λ_{max} e λ_{min} são os valores próprios máximo e mínimo da matriz **K** e são definidos como:

$$\lambda_{max,min} = \sigma^2 \left(1 + \frac{N}{M} \pm 2\sqrt{\frac{N}{M}} \right) \tag{15}$$

Exemplo:

- Seja o intervalo de tempo dos dados de retorno de 15 minutos e a janela de tempo para a estimativa definida entre 4 janeiro de 2010 e 18 de maio de 2010.
- O número de ativos no universo de investimento é 494 de uma lista de 500 no índice $S\&P500$, $N = 494$,$M/N = 495$, $\sigma^2 = 0.3$, $\mu = 0$, $\lambda_{max} = 0.63$ e $\lambda_{min} = 0.091$.

- O histograma a seguir mostra os valores próprios estimados pela matriz correlação C:

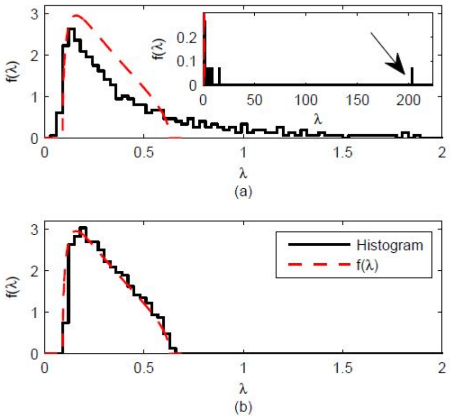


Figura : a) Histograma dos valores próprio da matriz de correlação C(linha preta) juntamente com a função densidade de probabilidade de limitar os valores próprios da uma matriz aleatória expressa na equação 14(linha vermelha). b) Histograma dos valores próprios de uma matriz aleatória empírica construída usando a equação 13, juntamente com a função densidade probabilidade dos seus valores próprios do limite

Extensão da filtragem de ruído e de risco à cobertura de carteiras

- Em finanças é uma prática comum proteger um investimento para o proteger da volatilidade do mercado.
- Chama-se cobertura (ou *hegde*) ao instrumento que visa proteger operações financeiras contra o risco de grandes variações de preço de determinado ativo.
- Em finanças, uma estratégia de *hedging* consiste em realizar um determinado investimento com o objetivo específico de reduzir ou eliminar o risco de outro investimento ou transação.

- Portanto, o retorno do ativo é expresso da seguinte forma:

$$R = \alpha + \beta Y + \xi \tag{16}$$

- A decisão aqui é comprar o ativo com \$1 e vender o índice de rastreamento de ativos, com \$$\beta$, ou vice-versa, dependendo da expectativa do investidor. Portanto, o retorno deste primeiro investimento é expresso da seguinte forma:

$$R_{inv} = R - \beta Y = \alpha + \xi \tag{17}$$

- Este investimento é rentável se $\alpha > 0$ e $E(\xi) \geq 0$.

- Considera-se agora uma carteira composta por N ativos onde M é o fundo de índice de ativos quando $N \geq M$. O retorno do fundo de índice de uma carteira é

$$R_p = A + I = \sum_{i=1}^{N} q_i R_i + \sum_{j=1}^{M} g_j Y_j \tag{18}$$

  - A são os retornos totais de investimento e I é o índice de rastreamento dos ativos.
  - R_i e Y_j são os retornos de i e j do fundo de índice.
  - q_i e g_j são os montantes de capital investido no ativo i e no ativo j do fundo de índice.

- Assim, supondo que os retornos dos ativos numa carteira tem média zero, a variância do retorno da carteira, é expressa como

$$\sigma_p^2 = E[R_p^2] = E[A^2] + 2E[AI] + E[I^2] \tag{19}$$

onde

$$\begin{aligned} E[R_p^2] &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} q_i q_j E[R_i R_j] \\ E[AI] &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} q_i g_j E[R_i Y_j] \\ E[I^2] &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} g_i g_j E[Y_i Y_j] \end{aligned} \tag{20}$$

Negociação em múltiplas Frequências

- Em finanças, frequência significa em geral a velocidade de reequilibrar uma carteira, ou seja, mudar os valores do investimento investidos em cada ativo da carteira.
- No entanto a negociação em múltiplas frequências pode ser desejável para os investidores devido a várias razões:
  - a disponibilidade do ativo no mercado, pode não ser a mesma para todos ativos a carteira;
  - os diferentes ativos podem revelar alguns aspetos do mercado que o investidor está à procura, como a tendência, o valor relativo, etc;
  - o investidor de alta frequência pode querer manter a carteira diversificada e equilibrada em termos de risco, e os métodos tradicionais para medir e gerenciar o risco requerem uma correlação relativamente alta entre os ativos.

- Todavia, a correlação cruzada dos retornos de ativos é reduzida quando a frequência de amostragem aumenta e isso verifica-se na figura a seguir.

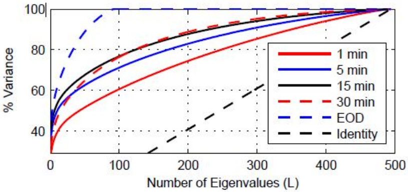


Figura : Para o caso de C = I verifica-se que não houve correlação entre ativos. Assim, valores próprios são mais necessários para representar uma determinada percentagem da variância total. Para o caso de 15 min, a maior amostragem foi a 60 dos 494 valores próprios, que representa cerca 13% de 70% da variância total do ruído da matriz de correlação financeiro. EOD significa o preço de fecho do mercado a cada dia.

Gestão de Risco

- Considere-se um cenário do mundo real, onde a estratégia de investimento reequilibra uma dada carteira e os seus detalhes não são necessariamente conhecidos pelo gerente de risco.

  Objetivo: gerir o risco da carteira, filtrando as decisões da estratégia de investimento subjacente baseado num predeterminado limite de risco. Dada a equação:

$$\sigma_p^2 = E[R_p^2] - \mu_p^2 = q^T \Sigma^T C \Sigma q = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} q_i q_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \tag{21}$$

  verifica-se um elipsóide centrado na origem, para um valor fixo de σ_p.

Métodos de gestão de risco

- Método do Elipsóide para a gestão do risco é dado por:

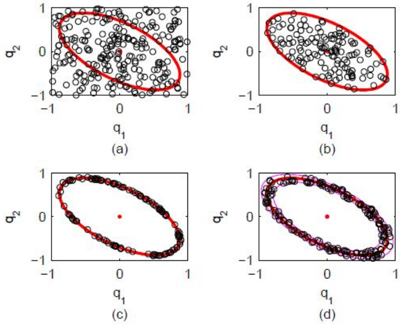


Figura : (a) possíveis locais de risco de um portfólio de dois ativos, (b) SIE, (c) SOE, (d) SAE.

- SIE - Permanecer no elipsóide: quer manter a carteira de risco em qualquer lugar dentro do risco predefinido pelo elipsóide, verificando o risco da carteira de alvo, e rejeitando qualquer novo investimento ou posição que viole esta exigência.
- SOE - Ficar no elipsóide: tenta manter o risco da carteira, não só dentro, mas também o mais próximo possível do elipsóide.
- SAE - Ficar em torno de elipsóide : este método de gestão é semelhante ao usado para o SOE, no entanto, o SAE introduz mais flexibilidade, definindo um anel de risco com a ajuda dos dois elipsóides de risco localizados a uma distância fixa em torno da meta de risco do elipsóide.

Teste de verificação à posteriori do lucro e da perda de desempenho

Em finanças, um resultado de desempenho experimental para uma proposto método de investimento ou algoritmo é normalmente obtida através do teste de verificação. A figura mais comum de mérito usado é o desempenho de uma curva de Lucros e Perdas (PNL)

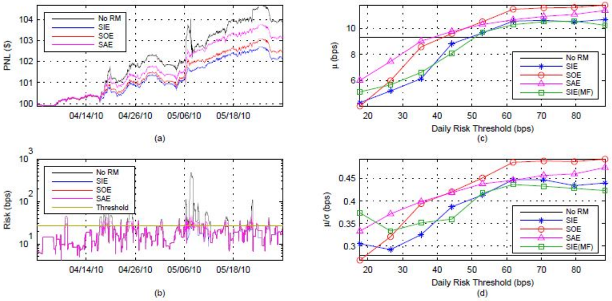


Figura : (a) PNL correspondente a nenhum caso de gestão de risco, juntamente com o método do elipsóide. (b) Corresponde aos valores estimados de risco diário calculado como σ_p/E. (c) o retorno médio diário em relação limiar de risco diariamente para SIE, a SOE, SAE, e métodos com múltiplas frequências SIE, juntamente com o retorno médio diário de nenhum caso de gestão de riscos. (d) Corresponde aos índices diários de Sharpe. Índice de Sharpe para o caso de risco não-gerenciado é o mais baixo em comparação com os casos de risco gerenciado.

Conclusão

- Com este artigo:
  - foi possível apreender alguns fundamentos e significados de uma carteira de risco.
  - conseguiu-se ampliar a risco de engenharia populares, conceitos para o reequilíbrio de uma carteira de *hegde* e de negociação em múltiplas frequências.
  - conclui-se que a gestão de risco de uma carteira e o re-equilíbrio pode ser realizada em negociação múltipla com uma maior flexibilidade.

Bibliografia

T. Mustafa U., A. Ali N., and A. Marco, "Portfolio risk in multiple frequencies", *IEEE Signal Processing magazine, vol. 28, pp. 61/71, September 2011*