José Felix Mavungo
Engenharia Matemática

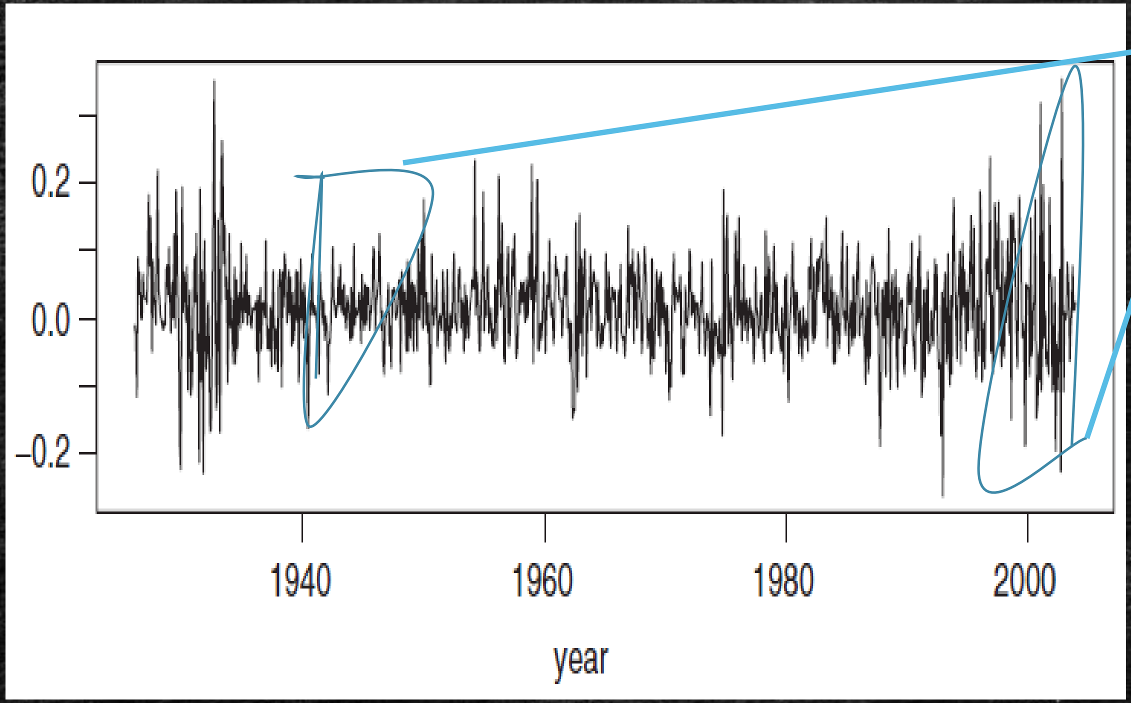
Constrained Nonlinear Programming for Volatility Estimation with GARCH Models

Orientadora: Maria Eduarda Silva
Co-orientadora:Maria do Carmo Miranda Guedes

Volatilidade

- É uma medida de tendência de um mercado ou um ativo variar dentro de um período de tempo.

Gráfico dos resíduos do “stock” da IBM a partir de Janeiro de 1926 a Dezembro de 2003

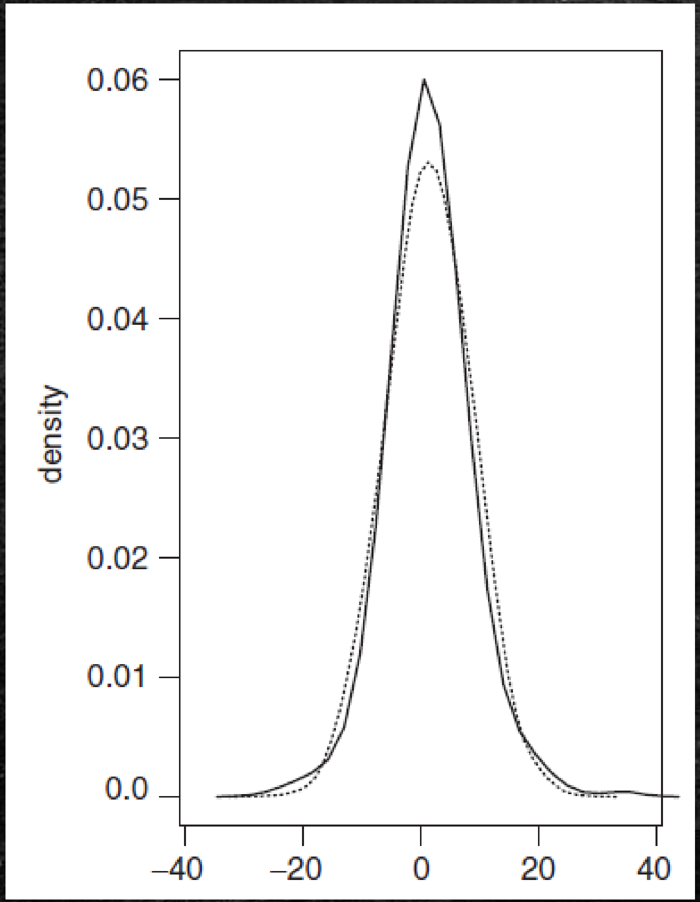


Aglomeração da volatilidade (**Volatility Clustering**)

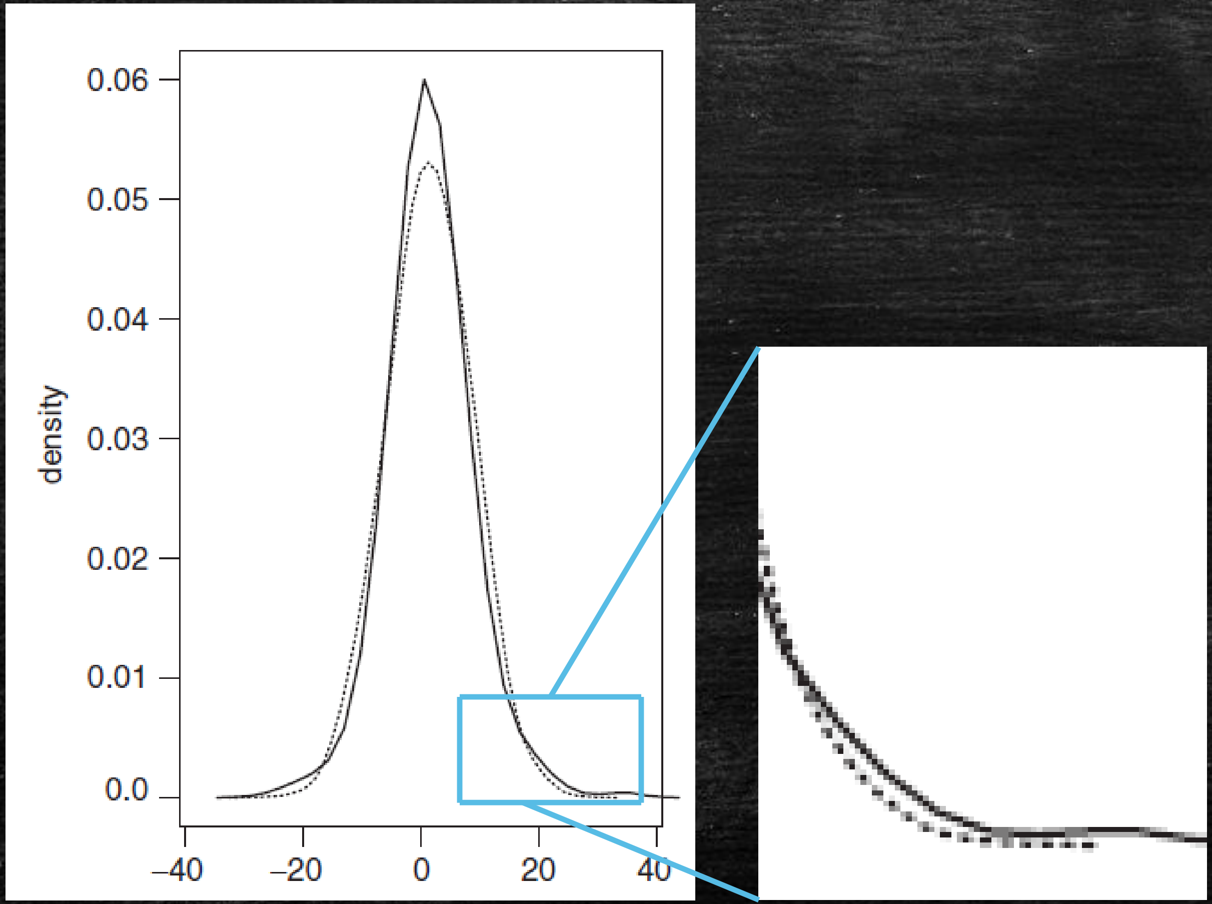
Modelo de diagonal VECH

- Modelo proposto por Bollerslev, Engle, Wooldridge (1988), onde assumem covariâncias constantes para fins de solvabilidade.

Comparação das densidades empíricas e normal dos “stock” da IBM

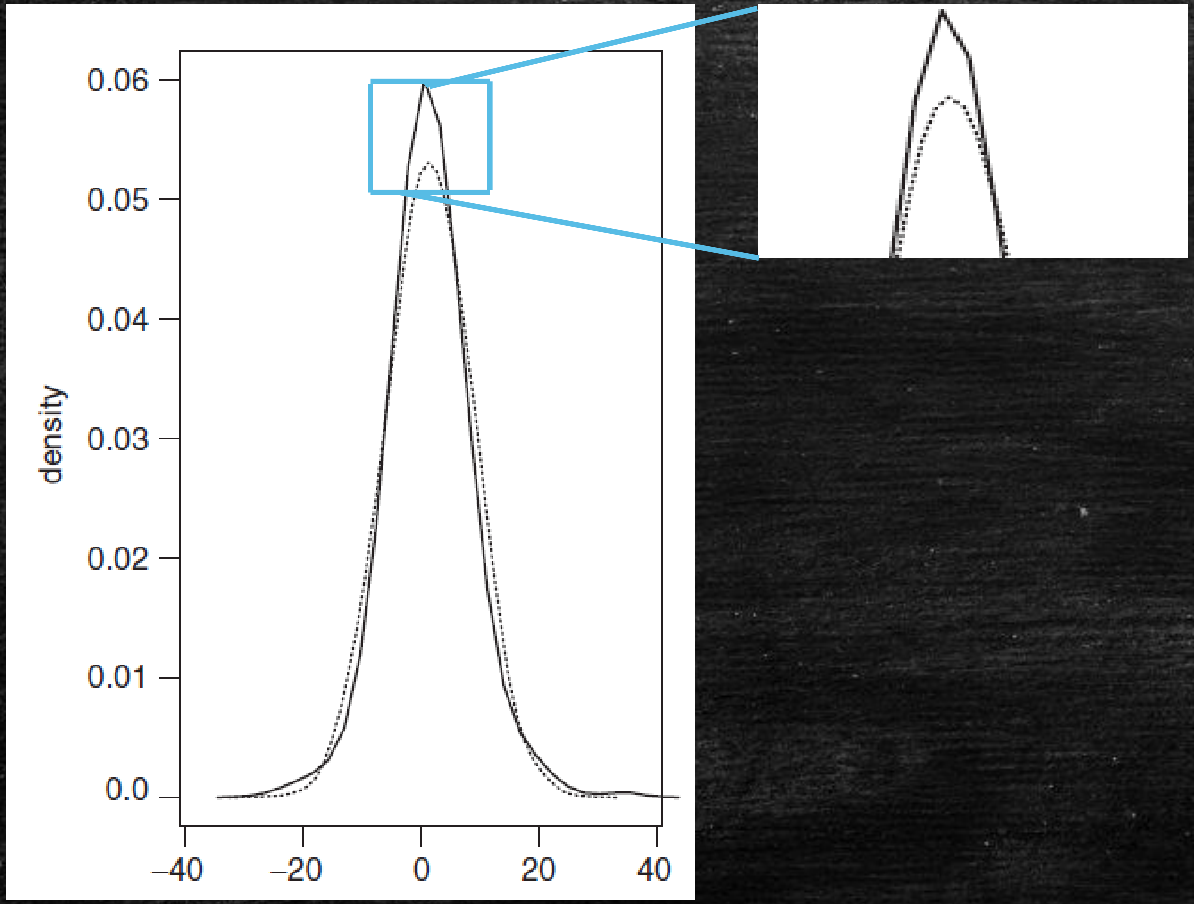


Comparação das densidades empíricas e normal dos “stock” da IBM



Distribuição leptocúrtica

Comparação das densidades empíricas e normal dos "stock" da IBM.



Mistura de distribuições com variâncias diferentes

Modelo BEEK

- Modelo proposto por Baba, Engle, Kraft e Kroner (1989), onde asseguram que a matriz de covariância seja definida positiva.

Objectivo

- Resolver o problema da estimação do modelo GARCH multivariado como um problema de otimização não linear com restrições.

Processo estocástico

Seja $Y = \{Y_t, t \in \mathbb{Z}^+\}$ um processo estocástico, a função autoregressiva para os retornos usada foi ,

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \Phi_m Y_{t-m} + \epsilon_t$$

onde ϵ_t é um ruido branco satisfazendo $E(\epsilon_t | \epsilon_{t-1})$ = 0 e $\epsilon_{t-1} = \{\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \ldots\}$.

Inovações: Modelo GARCH

$$E({\varepsilon_t}^2|\varepsilon_{t-1}) = h_t = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-1}$$

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j < 1$$

$$\max -\frac{T}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \log h_t - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \frac{{\varepsilon_t}^2}{h_t}$$

Problema de Otimização

$$\max -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\log h_t - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{{\varepsilon_t}^2}{h_t}$$

$$h_t = c + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{t-1} + \sum_{j=1}^{p}\beta_j h_{t-1}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\Phi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t = y_t \;\forall\; t = 1,\ldots,T$$

$$\sum_{i=1}^{q}\alpha_i + \sum_{j=1}^{p}\beta_j < 1$$

$$h_t \geq 0 \quad \forall t = 1,\ldots,T$$
$$c \geq 0$$
$$\alpha_i \geq 0 \quad \forall\, i = 1,\ldots,q$$
$$\beta_j \geq 0 \quad \forall\, j = 1,\ldots,p$$

Problema de estimação não linear com restrições

$$\max -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\log\det H_t + {\varepsilon_t}^T {H_t}^{-1}\varepsilon_t\right)$$

$$vech(H_t) = vech(C) + \sum_{i=1}^{q} A_i vech(\varepsilon_{t-i}{\varepsilon_{t-i}}^T) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j\, vech(H_{t-j})$$

$$\forall\, t = 1, \dots, T$$

$$\sum_{i=1}^{m} \Phi_{li} Y_{l,t-1} + \varepsilon_{lt} = y_{lt}\ \forall\, t = 1, \dots, T, l = 1, \dots, n$$

$$H_{t \succcurlyeq} 0 \quad \forall\, t = 1, \dots, T$$

Modelo de Diagonal VECH

$$\max -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\log\det H_t + {\varepsilon_t}^T {H_t}^{-1}\varepsilon_t\right)$$

$$H_t = C + A \odot \varepsilon_{t-i}{\varepsilon_{t-i}}^T + B \odot H_{t-j}$$
$$\forall\, t = 1, \dots, T$$

$$\sum_{i=1}^{m} \Phi_{li} Y_{l,t-1} + \varepsilon_{lt} = y_{lt}\ \forall\, t = 1, \dots, T, l = 1, \dots, n$$

$$H_{t \succcurlyeq} 0 \quad \forall\, t = 1, \dots, T$$

Modelo BEKK

$$\max -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\log\det H_t + {\varepsilon_t}^T {H_t}^{-1}\varepsilon_t\right)$$

$$H_t = C^T C + A^T \varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-i}{}' A + B^T H_{t-j} B$$

$$\sum_{i=1}^{m} \Phi_{li} Y_{l,t-1} + \varepsilon_{lt} = y_{lt}\ \forall\, t = 1, \dots, T, l = 1, \dots, n$$

$$H_{t \succcurlyeq} 0 \quad \forall\, t = 1, \dots, T$$

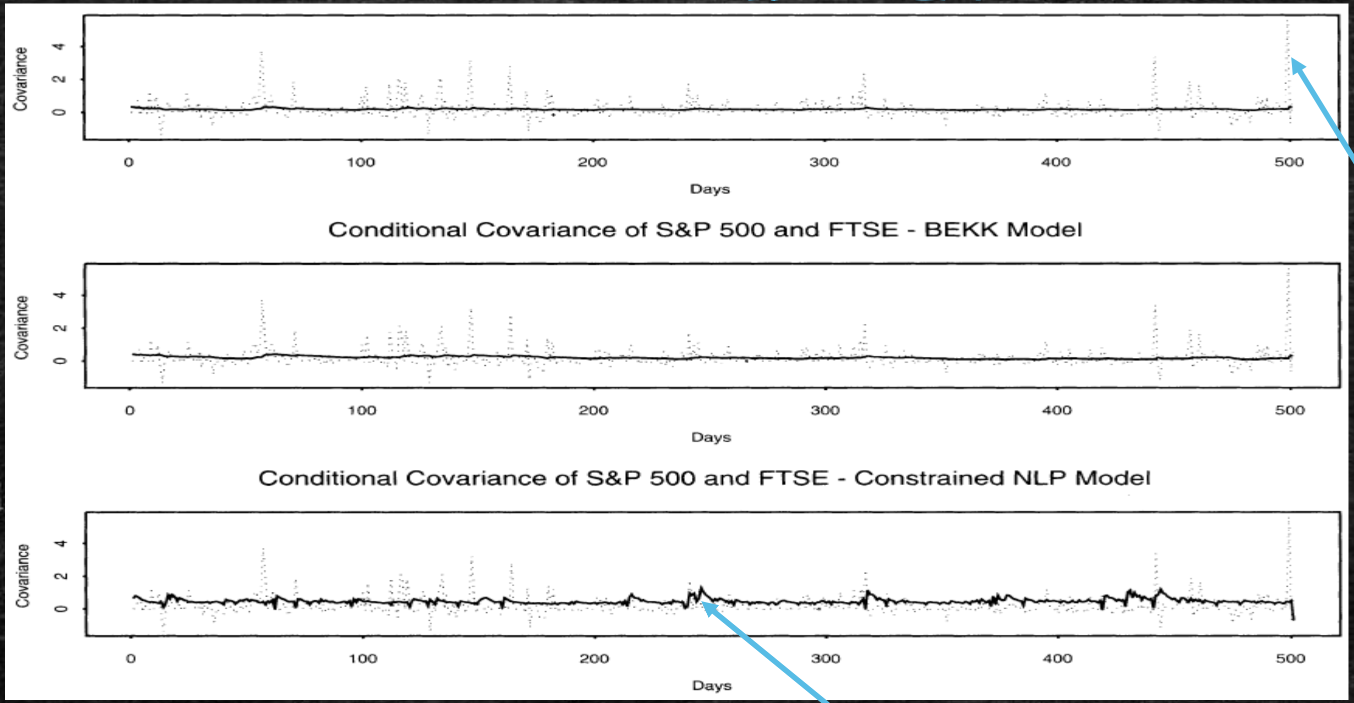
Resultados com o modelo univariado sobre S&P 500

Method	c	α_1	β_1	Log-likelihood value
Constrained NLP	0.00201931	0.978463	0.0180615	−2179.67
(St. Err.)	(0.0015)	(0.00784)	(0.00103)	
SPLUS	0.00285	0.97250	0.02204	−2181.8
(St. Err.)	(0.000762)	(0.003177)	(0.0034232)	

Resultados com o modelo multivariado sobre S&P 500 e FTSE 100

Coefficients	Constrained NLP	D-VECH	BEKK
c_{11}	−0.198775 (0.00597)	0.021812 (0.07542)	0.126516 (0.026245)
c_{12}	1.24346 (0.00471)	0.016743 (0.010096)	0.005078 (0.018835)
c_{22}	−0.121942 (0.00211)	0.005688 (0.001437)	0.059896 (0.009138)
a_{11}	0.20436 (0.00036)	0.04509 (0.009925)	0.196017 (0.024318)
a_{12}	−0.384304 (1.27×10^{-9})	0.026886 (0.011565)	−0.013858 (0.024476)
a_{21}			−0.003001 (0.016084)
a_{13}	0.17964 (0.000106)		
a_{13}	0.17964 (0.000106)		
a_{22}	0.959926 (0.000824)	0.033912 (0.005841)	0.171552 (0.017128)
a_{23}	−0.382031 (0.000346)		
a_{33}	0.248888 (0.0001308)		
b_{11}	0.396459 (0.01033)	0.930056 (0.016520)	0.971880 (0.007864)
b_{12}	2.11141 (0.01133)	0.885738 (0.062685)	0.001883 (0.005981)
b_{21}			0.003817 (0.004755)
b_{13}	−0.446092 (0.002658)		
b_{22}	−8.53698 (0.11985)	0.954386 (0.007181)	0.980089 (0.004033)
b_{23}	1.62468 (0.007876)		
b_{33}	0.509248 (0.004097)		
Log-likelihood	−2572.48	−3453.05	−3461.91
AIC	5176.96	6924.1	6945.82
SIC	5261.01	6971.91	7004.26

Variância condicional para S&P 500 e FTSE.



$\sqrt{retorno\ diário^2 * 252}$

$\sqrt{(variância\ condicional\ obtida\ das\ estimações * 252)}$

Conclusão

- Os resultados mostraram que problema não linear é um exercício que vale apenas para o problema de estimação GARCH e que o mesmo é um competidor significante para as representações VECH e BEEK.

Bibliografia

- Aslihan Altay-Salih, Mustafa Ç. Pinar and Sven Leyffer, Constrained Nonlinear Programming for Volatility Estimation with GARCH Models, *SIAM Review* Vol. 45, No. 3 (Sep., 2003), pp. 485-503

Referências

- Bollerslev, R.F. Engle, and J Wooldridge (1988), A capital asset pricing model with time varying covariances, J. Polit. Econ., 96, pp. 116-131.
- Baba, R.F. Engle, D. Kraft, and K.F. Kroner (1989), Multivariate Simultaneous Gener alized ARCH, manuscript, Department of Economics, University of California at San Diego.