Probabilidade de Ruína: Modelação e Aproximações

Nilson Moreira

Universidade do Porto - Faculdade de Ciências

Mestrado em Engenharia Matemática

Seminário de Modelação

28 de Janeiro de 2013

Sumário

- Conceitos Fundamentais
- Modelo Clássico de Risco (Cramér-Lundberg)
- Probabilidade de Ruína
- Distribuição "ladder height"
- Aproximações
- Considerações Finais
- Referências Bibliográficas

Poisson Composta

Poisson Composta

Seja N: $N \sim Poisson(\lambda)$ e X_i variáveis aleatórias i.i.d.

Dessa maneira, diz-se que $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ segue uma **poisson composta**.

Simbolicamente, escreve-se:

$$S \sim CP\left(\lambda, P(X \leq x)\right)$$

Processos de Lévy

Processos de Lévy

Um processo estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ com valores em $\mathbb{R}^d$ é dito de Lévy se:

- $P\{X(0) = 0\} = 1$ ou $X(0) = 0$ q.c.
- X tem incrementos independentes
- X é temporalmente homogêneo, isto é, $X(t+h) - X(t) =^d X(h), \forall t > 0$
- X é estocásticamente contínua, isto é, $\lim_{t \to t_0} P\{|X(t) - X(t_0)| > \epsilon\} = 0$
- Para quase todo ω, $X(t, \omega)$ é uma trajetória contínua à direita com limite à esquerda

Distribuições α-estáveis

Para $1 < \alpha \leq 2$, $\alpha \neq 1$, a distribuição α-estável $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ é definida como uma distribuição com c.g.f. da forma

$$\kappa(r) = -\sigma^\alpha |r|^\alpha \left(1 - \beta sign(r/i) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) + r\mu, \quad \Re r = 0$$

para algum $\sigma > 0$, $\beta \in [-1, 1]$ e $\mu \in R$.

- μ é o parâmetro da translação
- σ é o parâmetro da escala
- β é o parâmetro de assimetria

Processos de Lévy α-estáveis

Processos de Lévy α-estáveis

Dizemos que $Z_\alpha = \{Z_\alpha : t \geq 0\}$ é um processo de Lévy α-estável se:

- $P\{Z_\alpha(0) = 0\} = 1$ ou $Z_\alpha(0) = 0$ q.c.
- Z_α tem incrementos independentes
- $Z_\alpha(t + h) - Z_\alpha(t) =^d S_\alpha(\sigma h^{1/\alpha}, \beta, 0)$, para $t \geq 0$, $h < \infty$, onde $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma > 0$ e $|\beta| \leq 1$

O Modelo Clássico de Risco

Para construirmos o modelo precisamos de:

- $u \rightarrow$ a reserva inicial
- $ct \rightarrow$ os prémios recebidos no período $[0, t]$, sendo **c** uma constante que representa o prémio por unidade de tempo.
- $N(t) \rightarrow$ processo de Poisson
- $I(t) \rightarrow$ indemnizações agregadas ocorridas em $[0, t]$

$$I(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \text{ (processo de Poisson composto)},$$

$I(t) = 0$ se $N(t) = 0$
$\{X_i\}_{i=1}^{\infty} \rightarrow$ sequência de $v.a.$ $i.i.d.$ e independente de $N(t)$, representando indemnizações.

A equação do modelo

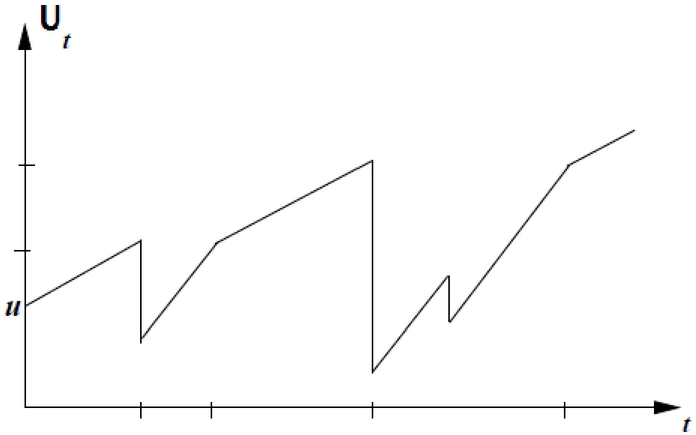
O modelo clássico de risco para a actividade seguradora em tempo contínuo é um processo estocástico $U(t)$, $t \geq 0$ em que $U(t)$ é o valor da reserva no tempo t.
Temos uma reserva inicial $u \geq 0$:

- é aumentada pelo prémio à taxa de **c** por unidade de tempo
- é diminuída por pagamentos de sinistros em épocas (instantes) aleatórias

Isto é,

$$U(t) = u + ct - I(t), \;\; t \geq 0$$

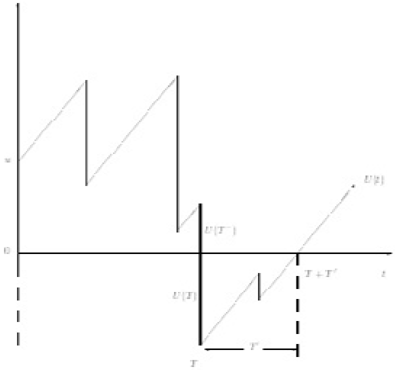
Processo de Reserva



Ruína

Quando podemos dizer que uma seguradora entrou em ruína?

- $\exists t > 0 : U(t) < 0$



Tempo e Probabilidade de Ruína

Tempo da Ruína

- $T = min\{t : t \geq 0 \wedge U(t) < 0\}$

Por convenção, $T = \infty$ se $U(t) \geq 0 \quad \forall t$

Probabilidade de Ruína

A probabilidade de ruína é considerada como uma função da reserva inicial u e é denotada como sendo:

- $\psi(u) = Pr(T < \infty)$

Há um grande interesse em saber a reserva negativa no tempo da ruína: $U(T)$.

Processo de perda agregada

Representa-se por $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e é definido por

- $S(t) = u - U(t)$

É evidente que

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} X_i - ct$$

Tempo de Ruína vs P.P.A.

- $\tau(u) = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\} = \inf\{t \geq 0 : S(t) > u\}$

- Perda agregrada máxima com horizonte infinito:

$$M = \sup_{0 \leq t < \infty} S(t)$$

- Perda agregrada máxima com horizonte finito:

$$M_T = \sup_{0 \leq t \leq T} S(t)$$

Tempo de Ruína vs P.P.A.

- Com isso, podemos alternativamente escrever as probabilidades de ruína da seguinte maneira:

  ⋆ $\psi(u) = P\left(\tau(u) < \infty\right) = P\left(M > u\right)$

  ⋆ $\psi(u, T) = P\left(\tau(u) \leq T\right) = P\left(M_T > u\right)$

Carga de segurança

- Muitos modelos estudados têm a seguinte propriedade:

$\exists$ uma constante ρ tal que:

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t} X_i \to^{q.c.} \rho,\ t \to \infty, \qquad (*)$$

ρ é vista como a quantia média das participações por unidade de tempo.

- **Carga de segurança (η)**

É a quantidade relativa, através da qual a taxa do prémio, c, excede ρ:

$$\eta = \frac{c-\rho}{\rho}$$

Carga de segurança

Parece óbvio que a companhia de seguros deve tentar assegurar que $\eta > 0$.

Isso ainda tem repercurssões ainda maior:

Proposição

Assumindo que $(*)$ se verifica, se $\eta < 0$, então $M = \infty$ quase certo, e consequentemente $\psi(u) = 1$, $\forall u$.
Se $\eta > 0$, então $M < \infty$ quase certo e consequentemente $\psi(u) < 1$, $\forall u$ suficientemente grande.

Carga de segurança

Demonstração:

De $(*)$, segue que

$$\frac{S(t)}{t} = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} X_i - ct}{t} \to^{q.c.} \rho - c, \; t \to \infty$$

- Se $\eta < 0$, o limite calculado é > 0, o que implica que $S(t) \to^{q.c.} \infty$ e consequentemente $M = \infty$ q.c.
- Se $\eta > 0$, então $\lim \frac{S(t)}{t} < 0$, $S(t) \to^{q.c.} -\infty$, $M < \infty$ q.c.

Distribuição "ladder height"

A probabilidade de ruína pode ser expressada através da chamada distribuição "ladder height".

Como já foi visto,

$$S(t) = u - U(t) = \sum_{i=1}^{N_t} X_i - ct,\ t \geq 0$$

$$\tau(u) = \inf\{t > 0 : S(t) > u\}, \quad (\tau(0) = \tau_+)$$

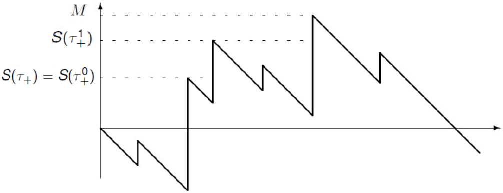
À variável aleatória $S(\tau_+)$ chamamos de "ladder height".

Distribuição "ladder height"

Definimos "ladder epochs" como sendo:

$$\tau_+^{n+1} = \inf\left\{t > \tau_+^n : S(t) > S(\tau_+^n)\right\},\ n = 0, 1, 2, \ldots\ e\, \tau_+^0 = \tau_+$$

Os "ladder epochs" $\left\{\tau_+^n\right\}_{n \in N}$ são os instantes em que o processo de perda agregada S atinge um novo máximo.



Distribuição "ladder height"

O 1º ponto de "escada" corresponde a $S(\tau_+)$ (o 1º passo), o 2º ponto de "escada" corresponde a $S(\tau_+^1)$ e consequentemente o 2º passo é $S(\tau_+^1) - S(\tau_+)$.
O processo de máximo relativo M é a altura total da "escada" dado pela soma

$$M(t) = \sum_{n=1}^{N_t} \left[S(\tau_+^n) - S(\tau_+^{n-1}) \right], \; t > 0$$

Visto que é uma soma telescópica, pode ser escrito como:

$$M(t) = \sup_{n \geq 0} \left\{ S(\tau_+^n) \right\}$$

que é a <u>perda agregada máxima</u>.

Distribuição "ladder height"

Já foi visto que a probabilidade de ruína

$$\psi(u) = P\left\{\inf\left[t > 0 : u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i < 0\right] < \infty\right\},\ u \geq 0$$

satisfaz

$$\psi(u) = P\{M > u\},\ u \geq 0$$

Além disso, M é uma variável aleatória que segue a distribuição geométrica composta (ver Bowers et al. (1986)).
E sua distribuição é dada pela chamada fórmula de convolução de Beekman:

Distribuição "ladder height"

$$1 - \psi(u) = \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^n F_X^{L*n}(u)$$

onde $\theta = c(\lambda\mu)^{-1} - 1$ é o factor da carga de segurança,

$F_X^L(x) = \mu^{-1} \int_0^x (1 - F_X(y))dy$

F_X^L é chamado de distribuição "ladder height" ou ainda conhecida como distribuição de equilíbrio.

Aproximação de Cramér-Lundberg

- É um dos resultados mais importante da Teoria do Risco.

Consideremos um modelo P.C. com $c = 1$ e a distribuição das indemnizações B com a função geradora de momentos $\widehat{B}[s]$.

Então,

$$\psi(u) \sim Ce^{-\gamma u}, \qquad u \to \infty$$

onde $C = \dfrac{1-\rho}{\beta \widehat{B}'[\gamma]} - 1$ e $\gamma > 0$ é a solução da equação de Lundberg

$$\beta(\widehat{B}[\gamma] - 1) - \gamma = 0,$$

ou equivalentemente

$$\widehat{B}[\gamma] = 1 + \frac{\gamma}{\beta}$$

Aproximação de De Vylder

Consideremos um M. R. com os parâmetros β, B, $c = 1$.

Estratégia:

- Utilizar um processo diferente em que a distribuição das indemnizações siga uma exponencial com a taxa $\widetilde{\delta}$, intensidade de chegada $\widetilde{\beta}$ e taxa de prémio $\widetilde{c}$.
- Fazer com que os processos sejam tanto quanto possível da mesma forma

$$\psi(u) \approx \frac{\widetilde{\beta}}{\widetilde{c}\widetilde{\delta}} e^{-(\widetilde{\delta} - \widetilde{\beta}/\widetilde{c})u}$$

Aproximação de Beekman-Bowers

A ideia é escrever $\psi(u)$ como $\mathbb{P}(M > u)$.

Como?

Ajustando uma distribuição gama de parâmetros λ, δ à distribuição de M, combinando os dois primeiros momentos e usando a aproximação da função gama incompleta

$$\psi(u) \approx \int_u^\infty \frac{\delta^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\delta x} dx$$

O Problema do Modelo Clássico

Em situações práticas:

- Queremos limitantes superiores para a probabilidade de ruína a tempo finito, $\psi(u,t) = P(T < t)$.
- O valor das indemnizações não possuem segundo momento finito.
- Portanto o valor das indemnizações possuem caudas pesadas.

Daí,

- O estudo da probabilidade de ruína requer outras técnicas.

Uma forma de contornar esse problema

Distribuições Estáveis

- Descrevem as caudas pesadas
- Descrevem o comportamento assimétrico
- Tem uma dependência de 4 parâmetros, o que permite a flexibilidade em adaptar dados empíricos e testar modelos
- Limites de soma de v.a. i.i.d. estáveis também são estáveis

Referências Bibliográficas

- Asmussen S. Albrecher H. *Ruin Probabilities*. Advanced Series on Statistical Science Applied Probability. World Scientific
- Bowers, N.; Gerber, H.; Hickman, J.; Jones, D. e Nesbitt, C. (1986) *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries
- Sobrinho, C. (2009) *Ruína e Resseguro: modelos contínuos e suas aproximações*