Applications of Second Order Cone Programming

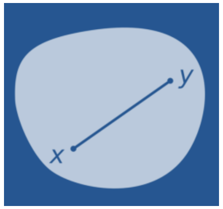
Raquel Reis
Janeiro 2013

Agenda

- Programação convexa
- Programação cónica de segunda ordem
  - Formalização de um problema de SOCP
  - Problemas que podem ser expressos como SOCP
    - Máximo de normas
    - Problemas com restrições hiperbólicas
  - Aplicações reais
  - Dual de um SOCP
    - Algumas considerações
  - Algoritmo de redução do potencial Primal-Dual
    - Pontos iniciais estritamente admissíveis
  - Conclusões
- Referências

Programação convexa

- Conjunto convexo



Um conjunto é convexo se o segmento de recta que une dois pontos desse conjunto pertence ao conjunto, ie,

C é convexo se $\{x_1 , x_2 \in C \Rightarrow \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in C, \alpha \in [0,1]\}$.

- Programação / Otimização
  - Função objectivo a ser maximizada / minimizada;
  - Conjunto de restrições a serem cumpridas.

- Programação convexa
  - Função objectivo e restrições de desigualdade são convexas;

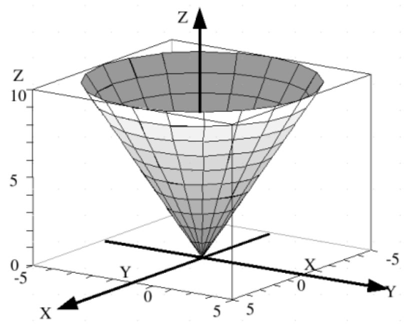
$$f_i(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f_i(x) + (1-\theta) f_i(y)$$

  - Restrições de igualdade são funções afins.

Programação Cónica de Segunda Ordem

- Um **cone** é um conjunto não vazio
$$C \subset \mathbb{R}^n\colon \forall x \in C, \alpha x \geq 0, \text{com } \alpha \geq 0.$$
Além disso, se C é convexo, então C é chamado **cone convexo**.

- Um **cone de segunda ordem** é um cone normado na norma Euclidiana, isto é,
$$C_k = \{(x,t) | x \in \mathbb{R}^{k-1}, t \in \mathbb{R}, \|x\|_2 \leq t\} \subseteq \mathbb{R}^k$$
Um cone de segunda ordem define um conjunto convexo.



$$x^2 + y^2 \leq z^2$$

Programação Cónica de Segunda Ordem

Um problema SOCP é escrito na forma

$$\begin{array}{rl} \textbf{Minimizar} & \boldsymbol{f^T x} \\ \textbf{Sujeita a} & \boldsymbol{\|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i, i = 1, \ldots} \\ & \boldsymbol{Fx = g} \end{array}$$

- A restrição $\|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i$ é chamada de restrição do cone quadrático
- Como a função objectivo é linear, o problema é convexo se as restrições definirem um conjunto convexo
- Variável de otimização: $x \in \mathbb{R}^n$
- Constantes do problema: $f \in \mathbb{R}^n, A_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1)\times n}$, $b_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}$, $c_i \in \mathbb{R}^n, \mathrm{d_i} \in \mathbb{R}, F \in \mathbb{R}^{m\times n}, g \in \mathbb{R}^m$

Programação Cónica de Segunda Ordem

Problemas que podem ser reformulados como SOCP:

- Programação linear (PL) e PL robusta;
- Problemas de mínimos quadrados (PMQ) e PMQ robustos;
- Programação quadrática (PQ) e PQ robusta
- Problemas que envolvem soma ou máximos de normas
- Problemas com constrangimentos hiperbólicos

Problemas que podem ser reformulados como SOCP

- **<u>Máximo de normas</u>**

  Tem-se o problema

$$\text{Minimizar} \quad \max_{i=1,\dots,p} \|A_i x + b_i\|$$

  Introduz-se uma única variável t

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & t \\ \text{sujeita a} & \|A_i x + b_i\| \leq t, i = 1, \dots, p \end{array}$$

Variáveis de otimização: $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$

Problemas que podem ser reformulados como SOCP

- **Restrições hiperbólicas**

$$\omega^2 \leq xy, x \geq 0, \mathrm{y} \geq 0 \iff \left\| \begin{bmatrix} 2\omega \\ x-y \end{bmatrix} \right\| \leq x+y \qquad \textbf{(1)}$$

$$\left(\sqrt{4w^2 + x^2 + y^2 - 2xy}\right)^2 \leq (x+y)^2$$

$$4w^2 + x^2 + y^2 - 2xy \leq x^2 + y^2 + 2xy$$

$$w^2 \leq xy$$

E mais genericamente, quando ω é um vector

$$\omega^T \omega \leq xy, x \geq 0, y \geq 0 \iff \left\| \begin{bmatrix} 2\omega \\ x-y \end{bmatrix} \right\| \leq x+y \qquad \textbf{(2)}$$

Problemas que podem ser reformulados como SOCP

Exemplo: Maximizar a média harmónica de funções afins

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{a_i^T x + b_i} \\ \text{Sujeita a} & a_i x + b_i > 0, i = 1, \dots, p \\ & c_i^T x + d_i \geq 0, i = 1, \dots, \mathrm{q} \end{array}$$

Introduzem-se novas variáveis t_i:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sum_{i=1}^{p} t_i \\ \text{Sujeita a} & t_i(a_i^T x + b_i) \geq 1, i = 1, \dots, p \\ & c_i^T x + d_i \geq 0, i = 1, \dots, \mathrm{q} \end{array}$$

E através de **(1):**

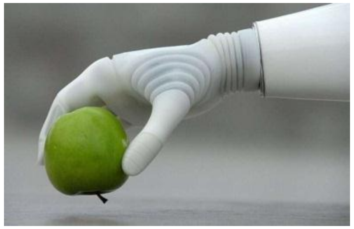
$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sum_{i=1}^{p} t_i \\ \text{Sujeita a} & \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ a_i^T x + b_i - t_i \end{bmatrix} \right\| \leq a_i^T x + b_i + t_i, i = 1, \dots, p \\ & c_i^T x + d_i \geq 0, i = 1, \dots, \mathrm{q} \end{array}$$

Programação Cónica de Segunda Ordem

Aplicações reais

- Mão mecânica
- Arranjos de antenas;
- Modelação de filtros FIR;
- Otimização de carteiras de investimento;
- Problemas de gestão
- Problemas de localização de instalações

Programação Cónica de Segunda Ordem



Aplicação real – Mão mecânica

Problema: Agarrar um objecto de forma estável, o mais suave possível

$$F_i: \begin{cases} v_i^T F_i v_i \ \ normal \text{ à } superfície \\ (I - v_i {v_i}^T) F_i \ \ tangente \text{ à } superfície \end{cases}$$

$$v_i \ - \text{é } o \ vector \ normal \text{ à } superfície \ no \ i - \text{ésimo} \ ponto \ de \ contato$$

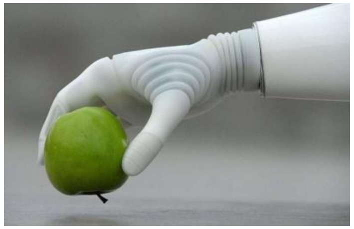
$$F_i - força \ aplicada \ no \ ponto$$

A componente tangente ocorre pelo atrito estático e a sua magnitude não pode exceder o produto da magnitude normal com o coeficiente de atrito μ.

Restrição do cone quadrático nas variáveis $\boldsymbol{F_i}$:

$$\left\| \left(I - v_i v_i^T \right) F_i \right\| \leq \ \mu v_i^T F_i, I = 1, \dots, N$$

Programação Cónica de Segunda Ordem



Aplicação real – Mão mecânica

O equilibrio estático do corpo é caracterizado por:

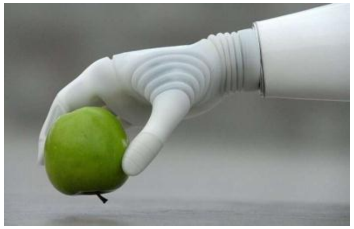
$$\sum_{i}^{N} F_i + F_{ext} = 0$$

$$\sum_{i}^{N} p_i \times F_i + T_{ext} = 0$$

Impõem-se limites nas forças de contato, por exemplo, um limite superior $v_i^T F_i \leq F_{\max}$ na componente normal

Objectivo: Encontrar F_i que satisfaçam as restrições de atrito, as restrições de equilibrio estático e os limites nas forças de contacto.

Programação Cónica de Segunda Ordem



Aplicação real – Mão mecânica

Surge assim o SOCP:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & t \\ \text{sujeita a} & v_i^T F_i \leq t, i = 1, \ldots, N \\ & \left\| (I - v_i v_i^T F_i \right\| \leq \ \mu v_i^T F_i, i = 1, \ldots, N \\ & \sum_i^N F_i + F_{ext} = 0 \\ & \sum_i^N p_i \times F_i + T_{ext} = 0 \end{array}$$

Programação Cónica de Segunda Ordem

Relembrando o problema, agora referido como Primal

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & f^T x \\ \text{Sujeita a} & \|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i, i = 1, \ldots \\ & Fx = g \end{array}$$

$f \in \mathbb{R}^n, A_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1)\times n}, b_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}, c_i \in \mathbb{R}^n, \mathrm{d_i} \in \mathbb{R}, F \in \mathbb{R}^{m\times n}, g \in \mathbb{R}^m$

<u>Dual de um SOCP</u>

$$\begin{array}{rl} \text{Maximizar} & -\sum_{i=1}^{N}\left(b_i^T z_i + d_i w_i\right) \\ \text{Sujeito a} & \sum_{i=1}^{N}\left(A_i^T z_i + c_i w_i\right) = f \\ & \|z_i\| \leq w_i \end{array}$$

As variáveis duais são $z_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $w \in \mathbb{R}^n$.
O dual de um SOCP é ainda um SOCP.

Dual de um SOCP – algumas considerações

- O primal SOCP é admissível ("feasible") se existir x que satisfaça todas as restrições.
- O primal SOCP é estritamente admissível se existir x que satisfaça as restrições com desigualdades estritas.
- Os vectores z e w são duais admissíveis se satisfazerem as restrições.
- Os vectores z e w são duais estritamente admissíveis se além das restrições, satisfazerem $||z_i|| < w_i, i = 1, \dots, N$
- Diz-se que o dual SOCP é (estritamente) admissível, se existirem z_i, w (estritamente) admissíveis.

Dual de um SOCP – algumas considerações

Sejam

p* - valor ótimo do primal SOCP

d*-valor ótimo do dual SOCP

Tem-se que se

p* = $+\infty \rightarrow$ o problema não é admissível

d* = $-\infty \rightarrow$ o problema não é admissível

A diferença entre os objetivos do dual e do primal é chamada intervalo de dualidade ("duality gap") associado a x, z, w e é denotada por

$$\eta(x, z, w) = f^T x + \sum_{i=1}^{N} (b_i^T z_i + d_i w_i)$$

Se o primal e o dual são estritamente admissíveis então existem pontos admissíveis do primal e do dual onde as funções atingem os mesmos valores ótimos. Neste caso, $\eta = 0$.

Algoritmo Primal-Dual de redução do potencial

Dados x, z, w estritamente admissíveis e uma tolerância $\mu > 0$

Repetir

1. Encontrar direções de pesquisa duais e primais δx, $\delta z, \delta w$
2. Encontrar $p, q \in \mathbb{R}$ que minimizam $\varphi(x + p\delta x, z + q\delta z, w + q\delta w)$
3. Actualização das variáveis: $x \coloneqq x + p\delta x, z \coloneqq z + q\delta z, w \coloneqq w + q\delta w$.

Até $\eta(x, z, w) \leq \mu$.

Onde $\eta(x, z, w)$ é a diferença entre os objetivos do primal e do dual e $\varphi(x, z, w)$ é a função potencial primal-dual.

Programação Cónica de Segunda Ordem

Pontos iniciais estritamente admíssiveis - Restrição de limites nas variáveis primais

Torna-se fácil encontrar pontos duais estritamente admissíveis em SOCPs quando as restrições primais incluem limites nas variáveis, ie, limites superiores e inferiores, $l \leq x \leq u$, ou uma restrição de norma, $\|x\| \leq R$.

Exemplo: Incluir uma restrição de norma no SOCP inicial

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f^T x \\ \text{Sujeito a} & \|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i, i = 1, .., N \\ & \|x\| \leq R \end{array}$$

Se R for suficientemente grande a restrição extra não altera a solução, nem o valor ótimo do SOCP.

Programação Cónica de Segunda Ordem

<u>Pontos iniciais estritamente admíssiveis</u> - Restrição de limites nas variáveis primais

O dual do problema anterior fica:

$$\begin{array}{rl} \text{Maximizar} & -\sum_{i=1}^{N}\left(b_i^T z_i + d_i w_i\right) - R w_{N+1} \\ \text{Sujeito a} & \sum_{i=1}^{N}\left(A_i^T z_i + c_i w_i\right) + Z_{N+1} = f \\ & \|z_i\| \le w_i, i = 1, \ldots, N+1 \end{array}$$

Os pontos estritamente admissíveis para o problema anterior são calculados da seguinte forma:

- Para $i = 1, \ldots, N$ toma-se qualquer z_i e $w_i > \|z_i\|$;
- A variável z_{N+1} advém da restrição de igualdade;
- Para w_{N+1} toma-se qualquer valor maior que $\|z_{N+1}\|$

Programação Cónica de Segunda Ordem

Conclusões

- Otimização Convexa, eficientemente resolvida;
- Possível generalizar Métodos de Ponto Interior da Programação Linear para SOCP;
- Diversas implementações disponíveis, assim como softwares;
- Formulação flexível
- Lida com restrições quadráticas e hiperbólicas, importante para aplicações à engenharia

Referências

- Lobo, M. S.; Vandenberghe,L; Boyd, S.; Lebret, H.; *Applications of second-order programming*; Linear Algebra and its Applications 284 (1998) 193-238

- Lobo, M. S.; Vandenberghe,L; Boyd, S.; Lebret, H.; *Second-Order Cone Programming*, SIAM (Julho 1997)

- Trevisoli, D. S. Ehrhardt, M. A. D.; *Estudo e Avaliação de problemas Associados a Cones de Segunda Ordem;* DMA-IAMECC-UNICAMP

- Apontamentos Programação Matemática, Maria do Carmo Miranda Guedes

- Kuo, Yu-Ju; Mittelmann, Hands D. Interior Point Method for Second-Order Cone Programming and OT Applications, 2003.