FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Departamento Matemática Aplicada
Departamento Matemática Pura

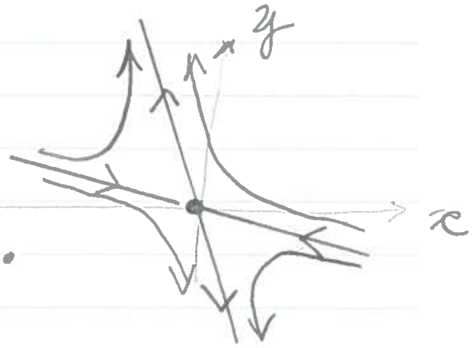
Centro de Matemática da
Universidade do Porto

1) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 7$ characteristic polynomial.

eigenvalues $\lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$ of opposite signs.

eigenvectors: $(1, -3-\lambda)$

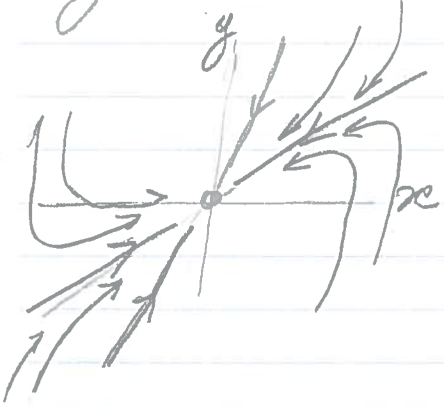
the only equilibrium is the origin, it is unstable. (a saddle).



$A' = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ characteristic polynomial $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3$.

eigenvalues $\lambda_3 = -3$, $\lambda_1 = -1$.

eigenvectors: $\lambda = -1$ $v = (1, 1)$
$\lambda = -3$ $v = (2, 1)$



The only equilibrium is the origin it is assimptotically stable.

CMUP
Centro de Matemática
Universidade do Porto

Se pretende mais informações, consulte http://www.fc.up.pt/mat

Em alternativa, contacte:
Centro de Matemática da Universidade do Porto
Edifício dos Departamentos de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre, 687 4169-007 Porto
Tel. +351 22 040 2131 Fax. +351 22 040 2108
E-mail: cmup@fc.up.pt

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Departamento Matematica Aplicada
Departamento Matematica Pura

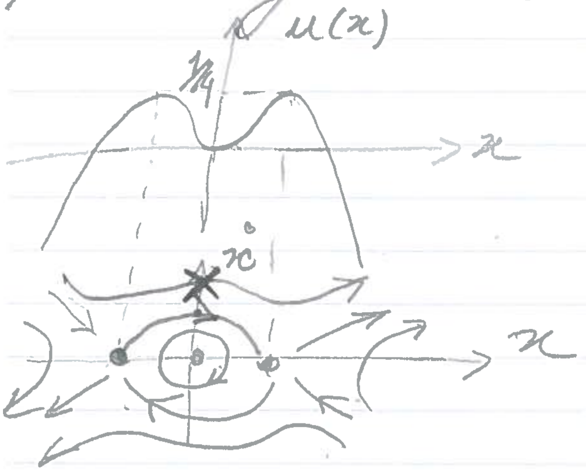
Centro de Matemática da
Universidade do Porto

2) $\ddot{x} = -u'(x)$ $\quad u(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$

critical points of $u(x)$: $x=0$ - local minimum
$x = \pm 1$ local maxima

equivalent to $(\dot{x}, \dot{y}) = (y, -u'(x))$

first integral $F(x,y) = u(x) + \frac{y^2}{2}$.



$F(0,\sqrt{2}) = u(0) + 1 = 1$

$F(\pm 1, 0) = \frac{1}{4}$.

$\Rightarrow$ $(0,\sqrt{2})$ lies on a solution like the one indicated by X in the figure. The solution is unlimited

$\Rightarrow \omega(0,\sqrt{2}) = \emptyset$
$\alpha(0,\sqrt{2}) = \emptyset$,

CMUP
Centro de Matemática
Universidade do Porto

Se pretende mais informações consulte http://www.fc.up.pt/mat

Em alternativa, contacte:
Centro de Matemática da Universidade do Porto
Edifício dos Departamentos de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre, 687 4169-007 Porto
Tel +351 22 040 2131 · Fax +351 22 040 2108
E-mail cmup@fc up pt

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Departamento Matemática Aplicada
Departamento Matemática Pura

Centro de Matemática da
Universidade do Porto

3) If $x=0 \Rightarrow \dot{x} = x - x^2 + xy = 0 \Rightarrow$ the axis $\{x=0\}$ is invariant

If $y=0 \Rightarrow \dot{y} = xy - 2y = 0 \Rightarrow$ the axis $\{y=0\}$ is invariant.

Equilibria:

$$\begin{cases} x(1-x+y)=0 \\ y(x-2)=0 \end{cases} \Rightarrow y=0 \text{ or } x=2.$$

$y=0 \Rightarrow \dot{x} = x(1-x) = 0 \Rightarrow x=0$ or $x=1$

$x=2 \Rightarrow \dot{x} = 2(-1+y)=0 \Rightarrow y=1.$

Equilibria are $(0,0)$, $(1,0)$ and $(2,1)$.

Stability:

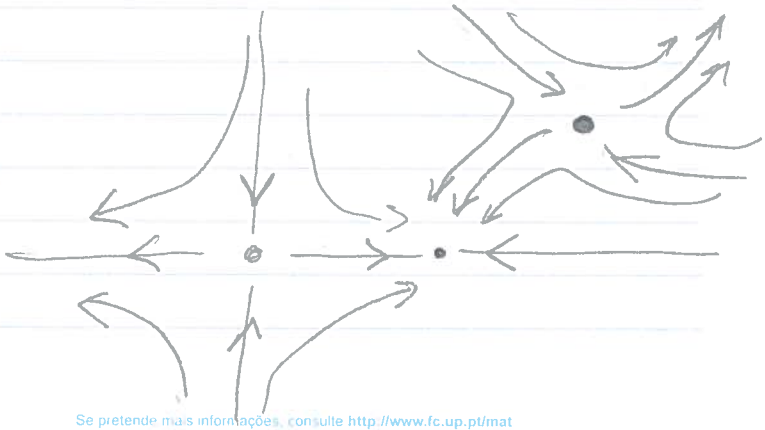
$$Dv(x,y) = \begin{pmatrix} 1-2x+y & x \\ y & x-2 \end{pmatrix} \qquad Dv(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$(0,0)$ is a saddle

phase portrait.

$$Dv(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$(1,0)$ is a degenerate stable node



$$Dv(2,1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eigenvalues $1 \pm \sqrt{3}$
saddle

CMUP
Centro de Matemática
Universidade do Porto

Se pretende mais informações, consulte http://www.fc.up.pt/mat

Em alternativa, contacte:
Centro de Matemática da Universidade do Porto
Edifício dos Departamentos de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre, 687 · 4169-007 Porto
Tel. +351 22 040 2131 · Fax: +351 22 040 2108
E-mail: cmup@fc.up.pt

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Departamento Matemática Aplicada
Departamento Matemática Pura

Centro de Matemática da
Universidade do Porto

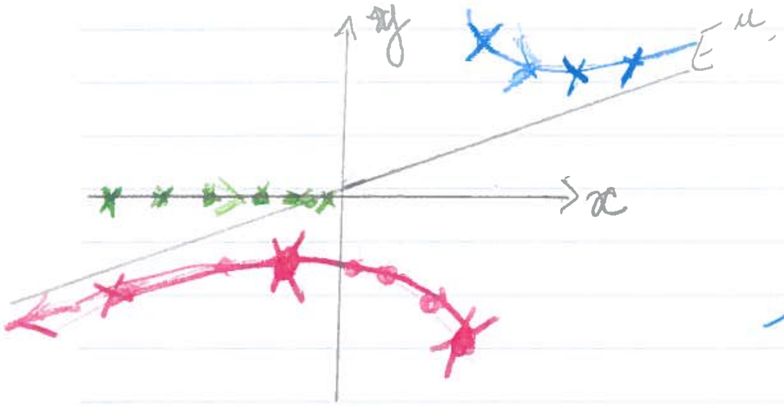
4) $Q \subset \mathbb{R}^2$ is positively invariant under the flow of $\dot{X} = v(X)$ means that if $X(t)$ is a solution of $\dot{X} = v(X)$ with $X(0) \in Q$ then $X(t) \in Q$ for all $t \geq 0$.

If $X(t)$ is a solution of $\dot{X} = v(X)$ then $h(X(t)) = Y(t)$ is a solution of $\dot{Y} = h_* v(Y)$.

If $Y(0) \in h(Q)$ then $h^{-1}(Y(0)) = X(0) \in Q$, hence $X(t) \in Q$ for all $t \geq 0$ and then $h(X(t)) \in h(Q)$.

5) The eigenvalues of A are $\lambda_5 = 5/6$ (contracting) and $\lambda_7 = 7/6$ (expanding), with eigenvectors $\lambda_5 \to (1,0)$ and $\lambda_7 \to (3,1)$.

Then $E^s = \{(x,0)\ x \in \mathbb{R}\}$ and $E^u = \{(3x, x)\ x \in \mathbb{R}\}$.



✗ Trajectory of $(1,1)$.

✗ Trajectory of $(-1,0)$ ✗ Trajectory of $(1,-1)$

Se pretende mais informações, consulte http://www.fc.up.pt/mat
Em alternativa, contacte:
Centro de Matemática da Universidade do Porto
Edifício dos Departamentos de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre, 687 4169-007 Porto
Tel +351 22 040 2131 · Fax +351 22 040 2108
E-mail cmup@fc.up.pt

CMUP
Centro de Matemática
Universidade do Porto