

MATEMÁTICA II
RESUMO DA AULA DE 27 DE FEVEREIRO DE 2008
FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS, GRADIENTE

ISABEL S. LABOURIAU

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow \mathbf{R} & U &\subset \mathbf{R}^2 \text{ aberto} & (x, y) &\in U \\ C : I &\longrightarrow \mathbf{R}^2 & I &\subset \mathbf{R} \text{ intervalo aberto} \\ (f \circ C)(t) &= f(C(t)) \end{aligned}$$

Exemplo $f(x, y) = e^x \sin(xy)$, $C(t) = (t^2, t^3)$

$$f(C(t)) = e^{t^2} \sin(t^5)$$

Regra da cadeia: $\frac{d}{dt}f(C(t)) = (\nabla f(C(t))) \cdot C'(t)$

Prova

$$\frac{f(C(t+h)) - f(C(t))}{h} = \frac{f(C(t) + K) - f(C(t))}{h}$$

com $K = C(t+h) - C(t)$. Tem-se

$$f(X+K) - f(X) = \nabla f(X) \cdot K + |K|g(K) \quad \text{com} \quad \lim_{h \rightarrow 0} g(K) = 0$$

e $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{K}{h} = C'(t)$.

Em coordenadas: $C(t) = (x(t), y(t))$ e $C'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Em $\mathbf{R}^3$

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Exemplo 1 $f(x, y, z) = x^2yz$ $C(t) = (e^t, t, t^2)$

Exemplo 2 $f(x, y, z) = \sin(x^2 - 3zy + xz)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x^2 - 3zy + xz) \cdot (2x + z)$$

Exemplo 3 $f(x, y, z) = g(x^2 - 3zy + xz)$ $u = x^2 - 3zy + xz$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(x^2 - 3zy + xz) \cdot (2x + z) = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

Regra da cadeia — consequências

- Se o lugar geométrico de $C(t)$ estiver contido em uma curva de nível de f então $C'(t) \perp \nabla f(C(t)) \forall t$.
- Se $\nabla f(P) \neq (0, 0)$ então a reta tangente em P à curva de nível de f que passa por P é

$$\{X \in \mathbf{R}^2 : (X - P) \cdot \nabla f(P) = 0\}$$

$$f : U \longrightarrow \mathbf{R} \quad U \subset \mathbf{R}^3 \text{ aberto}$$

Superfície S em $\mathbf{R}^3$ — definição :

$$S = \{X \in U : f(X) = k \quad \nabla f(X) \neq (0, 0, 0)\}$$

$$C : I \longrightarrow \mathbf{R}^3 \quad I \subset \mathbf{R} \text{ intervalo aberto}$$

C está contida na superfície S se $f(C(t)) = k$.

$$\begin{aligned} f : U \longrightarrow \mathbf{R} \quad U \subset \mathbf{R}^3 \text{ aberto} \quad P \in U \\ S = \{X \in \mathbf{R}^3 : f(X) = k \quad \nabla f(X) \neq (0, 0, 0)\} \\ C : I \longrightarrow \mathbf{R}^3 \quad I \subset \mathbf{R} \text{ intervalo aberto} \end{aligned}$$

Regra da cadeia — consequências

- Se o lugar geométrico de $C(t)$ estiver contido em uma superfície de nível de f então $C'(t) \perp \nabla f(C(t)) \forall t$.
- Se $\nabla f(P) \neq (0, 0, 0)$ então o plano tangente em P à superfície de nível de f que passa por P é

$$\{X \in \mathbf{R}^3 : (X - P) \cdot \nabla f(P) = 0\}$$

Exemplos:

- Plano tangente em $P = (1, 1, 1)$ à superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.
 $2x + 2y + 2z = 6$
- Reta tangente em $P = (1, 2)$ à curva $x^2y + y^3 = 10$.
 $4x + 13y = 30$
- Plano tangente em $P = (1, 2, 5)$ à superfície $z = x^2 + y^2$.
 $2x + 4y - z = 5$.