

MATEMÁTICA II
RESUMO DAS AULAS DE 4 E 5 DE MARÇO DE 2008
FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS, DERIVADAS
PARCIAIS, LEIS DE CONSERVAÇÃO, PONTOS
CRÍTICOS

$f : U \longrightarrow \mathbf{R} \quad U \subset \mathbf{R}^2 \quad \text{aberto} \quad P \in U \quad A \in \mathbf{R}^2 \quad |A| = 1 \text{ e}$
 $P + tA \quad t \in \mathbf{R} \text{ reta na direção de } A$

Derivada direcional de f na direção de A

$$D_A f(P) = \left. \frac{d}{dt} f(P + tA) \right|_{t=0} = \nabla f(P) \cdot A$$

Em coordenadas $P = (p, q)$, $A = (a, b)$, $P + tA = (p + ta, q + tb) = (x, y)$

$$D_A f(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P) a + \frac{\partial f}{\partial y}(P) b$$

Derivada direcional de f na direção de A $D_A f(P) = \nabla f(P) \cdot A$

Exemplo Derivada direcional de $f(x, y) = x^2 + y^3$ no ponto $P = (-1, 3)$, na direção de $B = (1, 2)$:

$|B| = \sqrt{5} \quad A = \frac{1}{\sqrt{5}}B$ vetor unitário na direção e sentido de B .

$$D_A f(P) = (-2, 27) \cdot A = \frac{52}{\sqrt{5}}$$

$f : U \longrightarrow \mathbf{R} \quad U \subset \mathbf{R}^2 \quad \text{aberto} \quad P \in U \quad A \in \mathbf{R}^2 \quad |A| = 1$

$$D_A f(P) = \nabla f(P) \cdot A$$

Se $\nabla f(P) \neq (0, 0)$ e $\theta = \text{ângulo entre } \nabla f(P) \text{ e } A$,

$$D_A f(P) = |\nabla f(P)| |A| \cos \theta = |\nabla f(P)| \cos \theta$$

Consequências

- O crescimento de uma função é máximo na direção do seu gradiente.
- A norma do gradiente é a taxa de crescimento na direção de crescimento máximo da função.

Exemplo O crescimento de $f(x, y) = x^2 + y^3$ em torno do ponto $P = (-1, 3)$ é máximo na direção de $\nabla f(P) = (-2, 27)$ e nesta direção a derivada de f é $|\nabla f(P)| = \sqrt{4 + 27^2} = \sqrt{733}$.

Funções que só dependem da distância à origem

Exemplo 1

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad X = (x, y)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} \quad \nabla r = \frac{1}{r} X$$

Exemplo 2

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad X = (x, y, z)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} \quad \nabla r = \frac{1}{r} X$$

Exemplo 3

$$r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \quad X = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{x_j}{r} \quad \nabla r = \frac{1}{r} X$$

Exemplo 4

$$f(x, y) = \sin r \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad X = (x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d \sin r}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = (\cos r) \frac{x}{r} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (\cos r) \frac{y}{r}$$

$$\nabla f = \frac{\cos r}{r} X$$

Funções que só dependem da distância à origem

g — função derivável de uma variável

$f(X) = g(r)$ com $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ $X = (x_1, \dots, x_n)$ então

$$\nabla f = \frac{g'(r)}{r} X$$

Teorema 1. *Uma função derivável $f(X)$ só depende da distância de X à origem se e somente se $\nabla f(X)$ é paralelo a X sempre que $\nabla f(X) \neq 0$.*

Demonstração: Mini-projeto, folha de exercícios 3

Exemplo 5 Um aquecedor é colocado na origem,
 $f(X)$ = temperatura no ponto X .

$f(X) = g(r) = k/r^2$ com $k > 0$. Então $\nabla f(X) = -\frac{2k}{r^4} X$

Exemplo 6 $f(x, y) = 1/r^3 \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad X = (x, y)$

$$D_1 D_2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{15xy}{r^7}$$

Operador Laplaciano em duas variáveis

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$f(x, y)$ é dita uma *função harmônica* se satisfizer a *equação de Laplace* $\Delta f \equiv 0$.

Operador Laplaciano em n variáveis

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

$f(x_1, \dots, x_n)$ é *harmônica* se $\Delta f \equiv 0$.

Exercícios: cálculo do Laplaciano para funções que só dependem da distância à origem.

Conservação da energia

Definição $U \subset \mathbf{R}^n$ aberto. Um *campo de vetores* em U é uma aplicação que a cada ponto de U associa um vetor de $\mathbf{R}^n$.

Exemplo 1 $U =$ semi-plano superior de $\mathbf{R}^2$
 $F(x, y) = \left(x^3, \frac{x}{y}\right)$ define um campo de vetores em U .

Exemplo 2 $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}$ função derivável
 $F(X) = -\nabla \psi(X) = \nabla(-\psi)(X)$ campo de vetores em U .
 $F(X)$ campo conservativo Lei de Newton

$$F(C(t)) = mC''(t)$$

Energia cinética

$$\frac{1}{2}m(C'(t))^2$$

ψ é a *energia potencial* do campo conservativo $F = -\nabla \psi$

Teorema 2. Se F for um campo conservativo, com $F = -\nabla \psi$ então para uma partícula que se move em uma curva segundo a lei de Newton, a soma da energia cinética e da energia potencial é constante.

Prova

$$\frac{d}{dt} \left(\psi(C(t)) + \frac{1}{2}mC'(t)^2 \right) = 0$$

Exemplo 3 $F(X)$ campo de vetores inversamente proporcional ao quadrado da distância de X à origem.

$F(X)$ paralelo a X com o mesmo sentido.

$$F(X) = k \frac{1}{|X|^2} \frac{X}{|X|} = k \frac{1}{r^3} X$$

Potencial para F

$$\psi(X) = \frac{k}{r}$$

$f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ derivável $U \subset \mathbf{R}^n$ aberto $P \in U$

Definição

P é ponto crítico de f se todas as derivadas parciais de f em P forem iguais a zero.

Exemplo $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-(x^2+y^2)} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-(x^2+y^2)}$$

O único ponto crítico é a origem $(0,0)$.

$f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ derivável $U \subset \mathbf{R}^n$ aberto $P \in U$

Definição P é ponto de máximo local de f se existir uma bola aberta B centrada em P tal que para todo X em B $f(X) \leq f(P)$

Exemplo $(0,0)$ é ponto de máximo local de $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$

$f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ derivável $U \subset \mathbf{R}^n$ aberto $P \in U$

Definição P é ponto de máximo local de f se existir uma bola aberta B centrada em P tal que para todo X em B $f(X) \leq f(P)$

Teorema 3. *Um ponto de máximo local de uma função derivável é sempre um ponto crítico.*

Prova P ponto de máximo local de f

$f(P + tH) \leq f(P)$ para t pequeno, qualquer H , $|H| = 1$.

$\nabla f(P) \cdot H = 0$ para qualquer H , $|H| = 1$.

O valor máximo de uma função não tem que ser atingido em um ponto de máximo local.

Exemplo em $\mathbf{R}$ $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = x^2$ tem um máximo em $x = 1$ que não é um ponto crítico.

Definição P é ponto interior de um conjunto $S \subset \mathbf{R}^n$ se existir uma bola aberta B centrada em P que esteja contida em S .

Exemplo $S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y < 1\}$.

$(1/2, 1/5)$ é ponto interior de S .

$(1, 1/2)$ não é ponto interior de S .

Todos os pontos de um conjunto aberto são pontos interiores deste conjunto.

O conjunto de todos os pontos interiores de um conjunto S é sempre um conjunto aberto.

Definição P é ponto de fronteira (ou ponto do bordo) de um conjunto $S \subset \mathbf{R}^n$ se qualquer bola aberta B centrada em P contiver algum ponto de S e também algum ponto que não está em S .

Exemplo $S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y < 1\}$.

$(1/2, 1/5)$ não é ponto de fronteira de S .

$(1, 1/2)$ é ponto de fronteira de S e pertence a S .

$(1/4, 1)$ é ponto de fronteira de S e não pertence a S .

Definição Um conjunto $S \subset \mathbf{R}^n$ é fechado se contiver todos os seus pontos de fronteira.

Definição Um conjunto $S \subset \mathbf{R}^n$ é limitado se existir $b > 0$ tal que todo $X \in S$ satisfaça $|X| < b$.

Teorema 4. Se f for uma função contínua definida em um conjunto $S \subset \mathbf{R}^n$ fechado e limitado então f tem um máximo e um mínimo em S .