

**MATEMÁTICA II**  
**RESUMO DAS AULAS DE 11 E 12 DE MARÇO DE 2008**  
**FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS, PONTOS CRÍTICOS, MÁXIMOS E**  
**MÍNIMOS, MULTIPLICADORES DE LAGRANGE**

ISABEL S. LABOURIAU

$$f : U \longrightarrow \mathbf{R} \quad U \subset \mathbf{R}^n \quad \text{aberto} \quad P \in U \quad A \in \mathbf{R}^n \quad |A| = 1$$

*Derivada direcional de  $f$  na direção de  $A$*

$$D_A f(P) = \nabla f(P) \cdot A$$

Se  $\nabla f(P) \neq (0, 0)$  e  $\theta = \text{ângulo entre } \nabla f(P) \text{ e } A$ ,

$$D_A f(P) = |\nabla f(P)| |A| \cos \theta = |\nabla f(P)| \cos \theta$$

*Consequências*

- O crescimento de uma função é máximo na direção do seu gradiente.
- A norma do gradiente é a taxa de crescimento na direção de crescimento máximo da função.

$$f : U \longrightarrow \mathbf{R} \text{ derivável } U \subset \mathbf{R}^n \quad \text{aberto } P \in U$$

*Definição*

$P$  é ponto crítico de  $f$  se todas as derivadas parciais de  $f$  em  $P$  forem iguais a zero.

*Exemplo*

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-(x^2+y^2)} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-(x^2+y^2)}$$

O único ponto crítico é a origem  $(0,0)$ .

$$f : U \longrightarrow \mathbf{R} \text{ derivável } U \subset \mathbf{R}^n \quad \text{aberto } P \in U$$

*Definição*  $P$  é ponto de máximo local de  $f$  se existir uma bola aberta  $B$  centrada em  $P$  tal que para todo  $X$  em  $B$   $f(X) \leq f(P)$

*Exemplo*  $(0,0)$  é ponto de máximo local de  $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$

$$f : U \longrightarrow \mathbf{R} \text{ derivável } U \subset \mathbf{R}^n \quad \text{aberto } P \in U$$

*Definição*  $P$  é ponto de máximo local de  $f$  se existir uma bola aberta  $B$  centrada em  $P$  tal que para todo  $X$  em  $B$   $f(X) \leq f(P)$

**Teorema 1.** *Um ponto de máximo local de uma função derivável é sempre um ponto crítico.*

*Prova*  $P$  ponto de máximo local de  $f$   
 $f(P + tH) \leq f(P)$  para  $t$  pequeno, qualquer  $H$ ,  $|H| = 1$ .  
 $\nabla f(P) \cdot H = 0$  para qualquer  $H$ ,  $|H| = 1$ .

O valor máximo de uma função não tem que ser atingido em um ponto de máximo local.

*Exemplo* em  $\mathbf{R}$   $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$   $f(x) = x^2$  tem um máximo em  $x = 1$  que não é um ponto crítico.

*Definição*  $P$  é ponto interior de um conjunto  $S \subset \mathbf{R}^n$  se existir uma bola aberta  $B$  centrada em  $P$  que esteja contida em  $S$ .

*Exemplo*  $S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y < 1\}$ .  
 $(1/2, 1/5)$  é ponto interior de  $S$ .  
 $(1, 1/2)$  não é ponto interior de  $S$ .

Todos os pontos de um conjunto aberto são pontos interiores deste conjunto.

O conjunto de todos os pontos interiores de um conjunto  $S$  é sempre um conjunto aberto.

*Definição*  $P$  é ponto de fronteira (ou ponto do bordo) de um conjunto  $S \subset \mathbf{R}^n$  se qualquer bola aberta  $B$  centrada em  $P$  contiver algum ponto de  $S$  e também algum ponto que não está em  $S$ .

*Exemplo*  $S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y < 1\}$ .  
 $(1/2, 1/5)$  não é ponto de fronteira de  $S$ .  
 $(1, 1/2)$  é ponto de fronteira de  $S$  e pertence a  $S$ .  
 $(1/4, 1)$  é ponto de fronteira de  $S$  e não pertence a  $S$ .

*Definição* Um conjunto  $S \subset \mathbf{R}^n$  é fechado se contiver todos os seus pontos de fronteira.

*Definição* Um conjunto  $S \subset \mathbf{R}^n$  é limitado se existir  $b > 0$  tal que todo  $X \in S$  satisfaça  $|X| < b$ .

**Teorema 2.** Se  $f$  for uma função contínua definida em um conjunto  $S \subset \mathbf{R}^n$  fechado e limitado então  $f$  tem um máximo e um mínimo em  $S$ .

*Exemplo 1* Encontre o máximo de  $f(x, y) = x^2y$  em  $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1\}$ .

*Exemplo 2* Encontre o máximo de  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$  em  $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |(x, y)| \leq 1\}$ .

*Exemplo 3* Encontre o máximo de  $f(x, y) = x^2e^{-(x^2+y^4)}$  em  $\mathbf{R}^2$  (se existir).

*Exemplo 4* Encontre o máximo de  $f(x, y) = x + y$  no disco  $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .  
 Problema: o máximo é atingido na fronteira.

*Máximos condicionados*

*Exemplo 5* Encontre o máximo de  $f(x, y) = x + y$  na circunferência  $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ .

*Solução:*  $C(t) = (\cos t, \sin t)$  curva contida em  $S$  (ou parametrização de  $S$ ).  
Se  $(x_0, y_0) = C(t_0)$  for ponto de máximo então  $t = t_0$  é ponto de máximo de:

$$t \mapsto f(C(t)) = \cos t + \sin t$$

$$\frac{d}{dt}f(C(t)) = \nabla f(C(t)) \cdot C'(t) = (1, 1) \cdot (-\sin t, \cos t) = -\sin t + \cos t$$

$$\frac{d}{dt}f(C(t)) = 0 \text{ em } t = \pi/4 + k\pi.$$

*Máximos condicionados*

*Exemplo 5* Encontre o máximo de  $f(x, y) = x + y$  na circunferência  $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ .

*Outra solução:*  $C(t)$  contida em  $S$  então  $g(x, y) = x^2 + y^2$  é constante em  $S$ .  
 $g(C(t)) = 1$  logo  $\nabla g(C(t)) \cdot C'(t) = 0$ .  
 $\nabla g(C(t))$  é ortogonal a  $C'(t)$ .

Se  $(x_0, y_0) = C(t_0)$  for ponto de máximo então  $t = t_0$  é ponto de máximo de  $t \mapsto f(C(t))$ , logo

$$\frac{d}{dt}f(C(t)) = \nabla f(C(t)) \cdot C'(t) = 0$$

$\nabla f(C(t))$  é ortogonal a  $C'(t)$ .  $\nabla f(C(t))$  é paralelo a  $\nabla g(C(t))$

*Máximos condicionados*

**Teorema 3.** *Sejam  $U \subset \mathbf{R}^n$  aberto,  $g : U \rightarrow \mathbf{R}$  derivável com derivada contínua,  $S = \{X \in \mathbf{R}^n : g(X) = 0 \text{ e } \nabla g(X) \neq 0\}$ . Dada  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  derivável com derivada contínua, se  $P \in S$  for um ponto de máximo de  $f$  em  $S$  então existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tal que*

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P).$$

*Exemplo 6* Encontre o máximo de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  em  $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0\}$ .

*Máximos condicionados*

**Teorema 4.** *Sejam  $U \subset \mathbf{R}^n$  aberto,  $g_1, g_2 : U \rightarrow \mathbf{R}$  deriváveis com derivada contínua,*

$$S = \{X \in \mathbf{R}^n : g_1(X) = g_2(X) = 0 \text{ e } \nabla g_1(X) \neq 0 \quad \nabla g_2(X) \neq 0\}.$$

*Dada  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  derivável com derivada contínua, se  $P \in S$  for um ponto de máximo de  $f$  em  $S$  então existem  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$  tal que*

$$\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla g_1(P) + \lambda_2 \nabla g_2(P).$$

*Exemplo 7* Encontre o máximo de  $f(x, y, z) = x + y + z$  em  $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = 2 \text{ e } x + z = 1\}$ .