

MATEMÁTICA II
RESUMO DAS AULAS DE 25 E 26 DE MARÇO DE 2008
CAMPOS DE VETORES, EXISTÊNCIA DE POTENCIAIS

ISABEL S. LABOURIAU

Bibliografia: S. Lang, Calculus of Several Variables, Capítulo VII,

$F : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ campo de vetores $U \subset \mathbf{R}^2$ aberto

Se $F(X) = \nabla \varphi(X)$ com $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}$ diz-se que

φ é um potencial para o campo $F(X)$

Exemplo 1

$$\varphi(x, y) = x^3 y^2$$

é um potencial para o campo

$$F(x, y) = (3x^2 y^2, 2x^3 y)$$

Pode haver dois potenciais para o mesmo campo de vetores?

Se houver dois potenciais para o mesmo campo de vetores $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ campo de vetores em $U \subset \mathbf{R}^2$ aberto

com dois potenciais $\varphi_1 : U \longrightarrow \mathbf{R}$ e $\varphi_2 : U \longrightarrow \mathbf{R}$

$$F(X) = \nabla \varphi_1(X) = \nabla \varphi_2(X)$$

então para

$$\psi(X) = \varphi_1(X) - \varphi_2(X)$$

tem-se

$$\nabla \psi(X) = (0, 0)$$

Se $\nabla \psi(X) = (0, 0)$ $\psi : U \longrightarrow \mathbf{R}$ em $U \subset \mathbf{R}^2$ aberto

$C : [0, 1] \longrightarrow U$ curva regular

$$\frac{d}{dt} \Psi(C(t)) = \nabla \Psi(C(t)) \cdot C'(t) = 0$$

Conclusão Se $\nabla \psi(X) = (0, 0)$ e $C(t) \in U$ então
 $f(t) = \Psi(C(t))$ é constante.

Definição $U \subset \mathbf{R}^n$ aberto é conexo por arcos

se dados P e $Q \in U$ existir uma curva regular $C : [0, 1] \longrightarrow U$ com $C(0) = P$ e $C(1) = Q$.

Pode haver dois potenciais para o mesmo campo de vetores?

Teorema 1. $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ campo de vetores em $U \subset \mathbf{R}^n$ aberto, conexo por arcos com dois potenciais $\varphi_1 : U \longrightarrow \mathbf{R}$ e $\varphi_2 : U \longrightarrow \mathbf{R}$

$$F(X) = \nabla \varphi_1(X) = \nabla \varphi_2(X)$$

então existe uma constante $k \in \mathbf{R}$ tal que $\varphi_1(X) = \varphi_2(X) + k$.

Exemplo 2 $f, g : \mathbf{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{|x|}$$

$f'(x) = g'(x) = \frac{-1}{x^2}$ mas $f(x) - g(x)$ não é constante.

Tudo porque $\mathbf{R} - \{0\}$ não é conexo por arcos....

Exemplo 1 de novo Encontre um potencial $\varphi(x, y)$ para o campo

$$F(x, y) = (3x^2y^2, 2x^3y) = (f(x, y), g(x, y))$$

Se $F(x, y) = \nabla\varphi(x, y)$ então

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = f(x, y) = 3x^2y^2 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = g(x, y) = 2x^3y$$

$$\varphi(x, y) = \int f(x, y)dx = \int 3x^2y^2dx = x^3y^2 + c(y)$$

$$\varphi(x, y) = \int g(x, y)dy = \int 2x^3ydy = x^3y^2 + d(x)$$

O potencial é $\varphi(x, y) = x^3y^2 + k$ com k uma constante.

Exemplo 3 Encontre um potencial $\varphi(x, y)$ para o campo

$$F(x, y) = (e^{x+y}, 3x^2 + 3y^2) = (f(x, y), g(x, y))$$

Se $F(x, y) = \nabla\varphi(x, y)$ então

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = f(x, y) = e^{x+y} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = g(x, y) = 3x^2 + 3y^2$$

$$\varphi(x, y) = \int f(x, y)dx = \int e^{x+y}dx = e^{x+y} + c(y)$$

$$\varphi(x, y) = \int g(x, y)dy = \int (3x^2 + 3y^2)dy = 3x^2y + y^3 + d(x)$$

Não é possível encontrar um potencial para F .

Exemplo 10 Encontre um potencial $\varphi(x, y)$ para o campo

$$F(x, y) = (\sin xy, \cos xy) = (f(x, y), g(x, y))$$

Se $\nabla\varphi(x, y) = F(x, y)$ então $f = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ e $g = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ então teríamos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{porque} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)$$

Conclusão Não é possível encontrar um potencial para $F(x, y)$.

Quando é que existe um potencial para um campo de vetores dado?

Teorema 2. Dado um campo de vetores $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ em $U \subset \mathbf{R}^2$ aberto $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$.

Se existir um potencial $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}$ para F , isto é, se $F(X) = \nabla\varphi(X)$ então

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Teorema 3. Dado um campo de vetores $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ em $U \subset \mathbf{R}^2$ aberto $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ se

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq \frac{\partial g}{\partial x}$$

então não é possível encontrar um potencial para F .

Exercício Dado um campo de vetores $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^3$ em $U \subset \mathbf{R}^3$ aberto

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

Se existir um potencial $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}$ para F , então

Exercício Dado um campo de vetores $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^3$ em $U \subset \mathbf{R}^3$ aberto

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

Se alguma das seguintes desigualdades acontecer:

.....

então não é possível encontrar um potencial para F .

Teorema 4. Dado um campo de vetores $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ em $U \subset \mathbf{R}^2$ aberto $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. Se $F(X) = \nabla\varphi(X)$, então

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Verifique se é possível encontrar um potencial para:

Exemplo 1 de novo $F(x, y) = (3x^2y^2, 2x^3y) = (f(x, y), g(x, y))$

Exemplo 20 $F(x, y) = (e^{x+y}, e^{x-y}) = (f(x, y), g(x, y))$

Exemplo 30 $F(x, y) = (2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2}) = (f(x, y), g(x, y))$

Teorema 5. Dado um campo de vetores $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ em $U \subset \mathbf{R}^2$ aberto $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. Se $F(X) = \nabla\varphi(X)$, então

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Verifique se é possível encontrar um potencial para:

Exemplo 35 $F(x, y) = (2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2}) = (f(x, y), g(x, y))$

Exemplo 40 $F(x, y) = (2xy^2, 2x^2y + 3y^2) = (f(x, y), g(x, y))$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4xy = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Encontre um potencial (já vimos que pode existir) para:

Exemplo 40 $F(x, y) = (2xy^2, 2x^2y + 3y^2) = (f(x, y), g(x, y))$

Se $F(x, y) = \nabla\varphi(x, y)$ então

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = f(x, y) = 2xy^2 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = g(x, y) = 2x^2y + 3y^2$$

$$\varphi(x, y) = \int f(x, y)dx = \int 2xy^2dx = x^2y^2 + c(y)$$

Se $\varphi(x, y) = x^2y^2 + c(y)$ então

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2x^2y + c'(y) = g(x, y) = 2x^2y + 3y^2$$

logo, $c'(y) = 3y^2$ e $c(y) = y^3 + k$ com k uma constante. O potencial é $\varphi(x, y) = x^2y^2 + y^3 + k$ com k uma constante.

Quando é que existe um potencial para um campo de vetores dado?

Teorema 6. Se $f, g : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ forem funções deriváveis em um retângulo $\mathcal{R} \subset \mathbf{R}^2$ e se as derivadas parciais de f e de g forem contínuas em $\mathcal{R}$ e tais que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

então existe um potencial para o campo de vetores

$$F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$$

Quando é que existe um potencial para um campo de vetores dado?

Teorema 7. Se $f_1, f_2, f_3 : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbf{R}$ forem funções deriváveis em um paralelepípedo $\mathcal{P} \subset \mathbf{R}^3$ e se as derivadas parciais de f_1 , de f_2 e de f_3 forem contínuas em $\mathcal{P}$ e tais que

$$D_1f_2 = D_2f_1 \quad D_1f_3 = D_3f_1 \quad D_2f_3 = D_3f_2$$

isto é, se

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3}$$

então existe um potencial para o campo de vetores

$$F(x_1, x_2, x_3) = (f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3))$$

Exemplo 50 Decida se existe um potencial para:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2) = (f_1, f_2, f_3)$$

O potencial existe se:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3}$$

Encontre o potencial $\nabla\varphi = (f_1, f_2, f_3)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = f_1 = x_2 + x_3 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = f_2 = x_1 + x_3 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = f_3 = x_1 + x_2$$

$$\varphi = x_1x_2 + x_1x_3 + c(x_2, x_3)$$

$$\varphi = x_1x_2 + x_2x_3 + d(x_1, x_3)$$

$$\varphi = x_1x_3 + x_2x_3 + e(x_1, x_2)$$

logo $\varphi = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + K$, com $K \in \mathbf{R}$ constante.

Exemplo 55 Decida se existe um potencial para:

$$F(x, y, z) = (y \cos(xy + z), x \cos(xy + z), \cos(xy + z)) = (f, g, h)$$

O potencial existe se

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z}$$

Já que sabemos que o potencial existe: calcule o potencial. Resposta: $\varphi(x, y, z) = \sin(xy + z)$.

Exemplo 60 Decida se existe um potencial para:

$$G(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{r^2} (-y, x) = (f(x, y), g(x, y))$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

logo, existe um potencial em qualquer retângulo que não contenha a origem.

Exercício - revisão

(1) Verifique que $\sec^2 s = \operatorname{tg}^2 s + 1$.

(2) Calcule $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg}(x)$

(3) Calcule $\int \frac{dx}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{y} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

(4) Calcule $\int \frac{-y}{x^2 + y^2} dx = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

Exemplo 60 Encontre um potencial (já sabemos que existe) para:

$$G(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad \text{para } (x, y) \text{ em } \mathcal{R} =]1, 3[\times]-1, 1[$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \varphi(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + c(y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + c(y) \right) = \frac{x}{x^2 + y^2} + c'(y)$$

Um potencial em $\mathcal{R}$ é $\varphi(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$