

MATEMÁTICA II
RESUMO DAS AULAS DE 1 E 2 DE ABRIL DE 2008
INTEGRAIS DE LINHA

ISABEL S. LABOURIAU

Bibliografia: S. Lang, Calculus of Several Variables, Capítulo VIII

Campos de vetores $U \subset \mathbf{R}^2$ aberto $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ campo de vetores

$$F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$$

F é derivável se f e g forem deriváveis.

Curvas $C : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^2$ curva

C é de classe C^1 se $C(t)$ for derivável e se $C'(t)$ for contínua.

$U \subset \mathbf{R}^2$ aberto $F = (f, g) : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ campo de vetores derivável.

$C : [a, b] \longrightarrow U \subset \mathbf{R}^2$ curva de classe C^1

$h : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R} \quad h(t) = F(C(t)) \cdot C'(t)$

Exemplo 1 $F(x, y) = (x^2y, y^3) \quad C : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}^2 \quad C(t) = (t, t)$

$F(C(t)) = (t^3, t^3) \quad C'(t) = (1, 1).$

$h : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$

$h(t) = F(C(t)) \cdot C'(t) = (t^3, t^3) \cdot (1, 1) = 2t^3$

$U \subset \mathbf{R}^3$ aberto $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^3$ campo de vetores derivável.

$C : [a, b] \longrightarrow U \subset \mathbf{R}^3$ curva de classe C^1

$h : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R} \quad h(t) = F(C(t)) \cdot C'(t)$

Exemplo 2 $F(x, y, z) = (x, y, xz - y) \quad C : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}^3 \quad C(t) = (t, 2t, 4t)$

$F(C(t)) = (t, 2t, 4t^2 - 2t) \quad C'(t) = (1, 2, 4)$

$h : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$

$h(t) = F(C(t)) \cdot C'(t) = 16t^2 - 3t$

$U \subset \mathbf{R}^n$ aberto $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ campo de vetores derivável.

$C : [a, b] \longrightarrow U \subset \mathbf{R}^n$ curva de classe C^1

Integral de F no caminho C :

$$\int_C F = \int_a^b (F(C(t)) \cdot C'(t)) dt$$

Exemplo 1 $F(x, y) = (x^2y, y^3) \quad C : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}^2 \quad C(t) = (t, t)$

$F(C(t)) \cdot C'(t) = (t^3, t^3) \cdot (1, 1) = 2t^3$

$$\int_C F = \int_0^1 2t^3 dt = \left. \frac{2t^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$U \subset \mathbf{R}^n$ aberto $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ campo de vetores derivável.
 $C : [a, b] \longrightarrow U \subset \mathbf{R}^n$ curva de classe C^1

Integral de F no caminho C :

$$\int_C F = \int_a^b (F(C(t)) \cdot C'(t)) dt$$

Exemplo 2 $F(x, y, z) = (x, y, xz - y)$ $C : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}^3$ $C(t) = (t, 2t, 4t)$
 $F(C(t)) \cdot C'(t) = 16t^2 - 3t$

$$\int_C F = \int_0^1 (16t^2 - 3t) dt = \left. \frac{16}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 \right|_0^1 = \frac{16}{3} - \frac{3}{2}$$

$U \subset \mathbf{R}^2$ aberto $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ campo de vetores derivável.
 $C : [a, b] \longrightarrow U \subset \mathbf{R}^2$ curva de classe C^1

Integral de F no caminho C :

$$\int_C F = \int_a^b (F(C(t)) \cdot C'(t)) dt$$

Notação $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ $C : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}^2$ $C(t) = (x(t), y(t))$

$$F(C(t)) \cdot C'(t) = f(x, y) \frac{dx}{dt} + g(x, y) \frac{dy}{dt}$$

$$\int_C F = \int_a^b \left(f(x, y) \frac{dx}{dt} + g(x, y) \frac{dy}{dt} \right) dt = \int_a^b f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

$U \subset \mathbf{R}^2$ aberto $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ campo de vetores derivável.
 $C : [a, b] \longrightarrow U \subset \mathbf{R}^2$ curva de classe C^1 .

Integral de F no caminho C :

$$\int_C F = \int_a^b (F(C(t)) \cdot C'(t)) dt$$

Exemplo 3 Calcule a integral de $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) = (3x^2, x^2y^5)$ sobre a parábola $y = x^2$ de $(x, y) = (-1, 1)$ a $(x, y) = (1, 1)$.

Parametrização da parábola:

$C : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}^2$ $C(t) = (t, t^2)$

$$F(C(t)) \cdot C'(t) = (3t^2, t^{12}) \cdot (1, 2t) = 3t^2 + 2t^{13}$$

$$\int_C F = \int_{-1}^1 (3t^2 + 2t^{13}) dt = \left. t^3 + \frac{2}{14}t^{14} \right|_{-1}^1 = 2$$

$U \subset \mathbf{R}^2$ aberto $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ campo de vetores derivável.
 $C : [a, b] \longrightarrow U \subset \mathbf{R}^2$ curva de classe C^1 .
Integral de F no caminho C :

$$\int_C F = \int_a^b (F(C(t)) \cdot C'(t)) dt$$

Exemplo 3 Calcule a integral de $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) = (3x^2, x^2y^5)$ sobre a parábola $y = x^2$ de $(x, y) = (-1, 1)$ a $(x, y) = (1, 1)$.

Outra parametrização da parábola:

$$D : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}^2 \quad D(s) = (s^3, s^6)$$

$$F(D(s)) \cdot D'(s) = (3s^6, s^{36}) \cdot (3s^2, 6s^5) = 9s^8 + 6s^{41}$$

$$\int_D F = \int_{-1}^1 (9s^8 + 6s^{41}) ds = s^9 + \frac{6}{42}s^{42} \Big|_{-1}^1 = 2$$

COINCIDÊNCIA?

Exemplo 3 Parametrizações da parábola de $(x, y) = (-1, 1)$ a $(x, y) = (1, 1)$:
 $C : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}^2 \quad C(t) = (t, t^2) \quad D : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}^2 \quad D(s) = (s^3, s^6)$

$$D(s) = C(t(s)) \quad t(s) = s^3$$

$$F(D(s)) = F(C(t(s))) \quad \frac{dD}{ds}(s) = \frac{dC}{dt}(t(s)) \frac{dt}{ds}(s)$$

$$F(D(s)) \cdot D'(s) = F(C(t(s))) \cdot \frac{dC}{dt}(t(s)) \frac{dt}{ds}(s)$$

$$\int_D F = \int_{-1}^1 F(D(s)) \cdot D'(s) ds = \int_{-1}^1 F(C(t(s))) \cdot \frac{dC}{dt}(t(s)) \frac{dt}{ds}(s) ds$$

$$\int_D F = \int_{-1}^1 F(C(t)) \cdot \frac{dC}{dt}(t) dt = \int_C F$$

Reparametrização Duas parametrizações da mesma curva:

$$C : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^n \quad D : [c, e] \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

$$D(s) = C(t(s)) \quad t(c) = a, t(e) = b.$$

$$F(D(s)) = F(C(t(s))) \quad \frac{dD}{ds}(s) = \frac{dC}{dt}(t(s)) \frac{dt}{ds}(s)$$

$$F(D(s)) \cdot D'(s) = F(C(t(s))) \cdot \frac{dC}{dt}(t(s)) \frac{dt}{ds}(s)$$

$$\int_D F = \int_c^e F(D(s)) \cdot D'(s) ds = \int_c^e F(C(t(s))) \cdot \frac{dC}{dt}(t(s)) \frac{dt}{ds}(s) ds$$

$$\int_D F = \int_{t(c)}^{t(e)} F(C(t)) \cdot \frac{dC}{dt}(t) dt = \int_a^b F(C(t)) \cdot \frac{dC}{dt}(t) dt = \int_C F$$

Exemplo 4 Calcule a integral de

$$G(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

sobre a circunferência de centro na origem e raio 2,

de $(x, y) = (2, 0)$ a $(x, y) = (\sqrt{3}, 1)$.

$$C(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta) \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right].$$

$$\int_C G = \frac{\pi}{6}$$

Coordenadas polares $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ $x^2 + y^2 = r^2$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$$

Exemplo 4

$$G(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\int_C G = \int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy =$$

$$\int_C \frac{-r \cos \theta}{r^2} (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) + \frac{r \sin \theta}{r^2} (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) = \int_C d\theta$$

Definição Um caminho C é uma sucessão finita de curvas $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ com $C_j : [a_j, b_j] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ em que

$$C_j(b_j) = C_{j+1}(a_{j+1})$$

A integral de um campo $F(X)$ sobre o caminho C é definida como

$$\int_C f = \int_{C_1} F + \int_{C_2} F + \dots + \int_{C_m} F$$

Exemplo 5 Calcule a integral de $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) = (x^2, xy)$ sobre o caminho que segue a parábola $x = y^2$ da origem a $(x, y) = (1, 1)$ e que depois segue o segmento de reta de $(x, y) = (1, 1)$ à origem.

Definição Dada uma curva $C(t)$ com $C : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$, a curva inversa $C^- : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ é a curva:

$$C^-(t) = C(a + b - t)$$

Teorema 1. Dados $U \subset \mathbf{R}^n$ aberto, F um campo de vetores em U e $C : [a, b] \longrightarrow U$ uma curva então

$$\int_{C^-} F = - \int_C F.$$

Exemplo 5 Calcule a integral de $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) = (x^2, xy)$ sobre o segmento de reta de $(x, y) = (1, 1)$ à origem.

Teorema 2. *Sejam $U \subset \mathbf{R}^n$ aberto e F um campo de vetores em U . Suponha que $F = \nabla\varphi$ para algum potencial φ em U . Dados dois caminhos C, D em U do ponto $P \in U$ ao ponto $Q \in U$, então:*

$$\int_C F = \int_D F \quad e \quad \int_C F = \varphi(Q) - \varphi(P).$$

Prova $C(t)$ caminho $C(a) = P \quad C(b) = Q$

$$\begin{aligned} \int_C F &= \int_a^b \nabla\varphi(C(t)) \cdot C'(t) dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (\varphi(C(t))) dt = \varphi(C(b)) - \varphi(C(a)). \end{aligned}$$

Exemplo 6 $\varphi(x, y, z) = x^2 y^3 z$

$$F(x, y, z) = (2xy^3z, 3x^2y^2z, x^2y^3) = \nabla\varphi(x, y, z)$$

$$P = (1, 2, 3) \quad Q = (0, 1, 0)$$

$$\int_P^Q F = \varphi(Q) - \varphi(P) = -24$$

Teorema 3. *Sejam $U \subset \mathbf{R}^n$ aberto e F um campo de vetores em U . Suponha que $F = \nabla\varphi$ para algum potencial φ em U . Dados dois caminhos C, D em U do ponto $P \in U$ ao ponto $Q \in U$, então:*

$$\int_C F = \int_D F \quad e \quad \int_C F = \varphi(Q) - \varphi(P).$$

Corolário 1. *Sejam $U \subset \mathbf{R}^n$ aberto e F um campo de vetores em U . Suponha que $F = \nabla\varphi$ para algum potencial φ em U . Então para qualquer caminho fechado C em U*

$$\int_C F = 0$$

Exemplo 7 $C(t) = (\cos \theta, \sin \theta) = (x, y) \quad \theta \in [0, 2\pi]$

$$G(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \int_C G &= \int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

Logo não existe potencial para G em $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$.