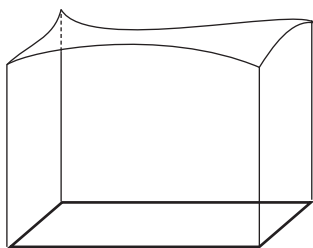


MATEMÁTICA II
RESUMO DA AULA DE 8 DE ABRIL DE 2008
INTEGRAIS DUPLAS

BIBLIOGRAFIA: S. LANG,
CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES, CAPÍTULO IX

ISABEL S. LABOURIAU

Volume delimitado pelo gráfico de uma função contínua sobre um retângulo $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbf{R}$



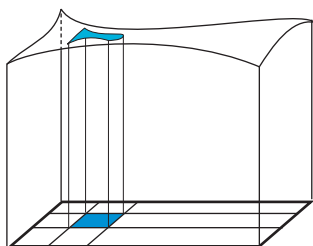
retângulo

$$\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$$

volume

$$\int \int_{\mathcal{R}} f = \int \int_{\mathcal{R}} f(x, y) dy dx$$

retângulo $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbf{R}$ contínua



2^n subdivisões: $x_i = a + ih_1$ $y_i = b + ih_2$ $i = 0, 1, \dots, 2^n$

$$h_1 = (b - a)/2^n \quad h_2 = (d - c)/2^n$$

Pequeno retângulo $r_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ com área $\alpha_n = h_1 h_2$.

V_{ij} = volume sobre o pequeno retângulo

$$\alpha_n \min_{(x,y) \in r_{ij}} f(x, y) \leq V_{ij} \leq \alpha_n \max_{(x,y) \in r_{ij}} f(x, y)$$

volume aproximado

$$V_{ij} \approx \alpha_n f(x_i, y_j)$$

retângulo $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbf{R}$ contínua

Volume total aproximado

$$s_n = \sum_{i,j=1}^{2^n} \alpha_n \min_{(x,y) \in r_{ij}} f(x,y) \leq S_n = \sum_{i,j=1}^{2^n} \alpha_n \max_{(x,y) \in r_{ij}} f(x,y)$$

s_n é a aproximação por defeito S_n é a aproximação por excesso.

$$A_n = \sum_{i,j=1}^{2^n} \alpha_n f(x_i, y_j)$$

A_n é a aproximação fácil de calcular, $s_n \leq A_n \leq S_n$

retângulo $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$

Como $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbf{R}$ é contínua, então

a sucessão s_n é crescente e a sucessão S_n é decrescente.

As duas sucessões têm limite quando $n \rightarrow \infty$ porque são monótonas e limitadas. Além disso, como f é contínua, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Definição

$$\int \int_{\mathcal{R}} f = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Exercício Mostre que existe o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ e que é igual a $\int \int_{\mathcal{R}} f$.