

MATEMÁTICA II
RESUMO DA AULA DE 8 DE ABRIL DE 2008
INTEGRAIS DE LINHA E POTENCIAIS

BIBLIOGRAFIA: S. LANG,
CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES, CAPÍTULO VIII

ISABEL S. LABOURIAU

Teorema 1. *Sejam $U \subset \mathbf{R}^n$ aberto e F um campo de vetores em U . Suponha que $F = \nabla\varphi$ para algum potencial φ em U . Dados dois caminhos C, D em U do ponto $P \in U$ ao ponto $Q \in U$, então:*

$$\int_C F = \int_D F \quad e \quad \int_C F = \varphi(Q) - \varphi(P).$$

Corolário 1. *Sejam $U \subset \mathbf{R}^n$ aberto e F um campo de vetores em U . Suponha que $F = \nabla\varphi$ para algum potencial φ em U . Então para qualquer caminho fechado C em U*

$$\int_C F = 0$$

Também vale a recíproca:

Teorema 2. *Sejam $U \subset \mathbf{R}^n$ aberto e conexo e F um campo de vetores em U . Suponha que para todos os pares de pontos $P, Q \in U$ e para todos os caminhos C, D em U que ligam P a Q aconteça:*

$$\int_C F = \int_D F.$$

Então existe um potencial φ em U tal que $F = \nabla\varphi$.

Corolário 2. *Sejam $U \subset \mathbf{R}^n$ aberto e conexo e F um campo de vetores em U . Suponha que para qualquer caminho fechado C em U*

$$\int_C F = 0.$$

Então existe um potencial φ em U tal que $F = \nabla\varphi$.

Prova do Teorema Dado $P_0 \in U$ arbitrário fixado, seja $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$\varphi(X) = \int_{P_0}^X F.$$

Queremos mostrar que existe $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ e que se $F = (f_1, \dots, f_n)$ então

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(X) = f_i(X).$$

Prova do Teorema

$$\varphi(X) = \int_{P_0}^X F \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(X + he_i) - \varphi(X)}{h}.$$

$$\frac{\varphi(X + he_i) - \varphi(X)}{h} = \frac{1}{h} \int_X^{X+he_i} F = \frac{1}{h} \int_0^1 F(X + the_i) \cdot he_i dt$$

Caminho: $C(t) = X + the_i$ $C'(t) = he_i$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_0^1 F(X + the_i) \cdot he_i dt &= \frac{1}{h} \int_0^1 f_i(X + the_i) h dt = \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h f_i(X + ue_i) du \longrightarrow f_i(X) \end{aligned}$$

Teorema 3. *Sejam $U = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ e $F = (f, g)$ um campo de vetores em U tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Seja C a circunferência de centro na origem e raio 1, orientada no sentido anti-horário. Então:

(1) *Se $\int_C F = 0$ então existe um potencial φ em U para F .*

(2) *Seja $k = \frac{1}{2\pi} \int_C F = 0$. Então existe um função $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que*

$$F = kG + \nabla \varphi \quad \text{onde} \quad G(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Prova - Caso 1 Se $\int_C F \neq 0$:

$X \in \mathbf{R}^2$, $X \neq (0,0)$, caminho $D = \{D_1, D_2\}$,

$D_1 = \text{arco em } C \text{ de } (1,0) \text{ a } \frac{X}{|X|}$, $D_2 = \text{segmento de } \frac{X}{|X|} \text{ a } X$.

Potencial:

$$\varphi(X) = \int_D F$$

Prova - Caso 2 Seja $k = \frac{1}{2\pi} \int_C F \neq 0$.

$$\int_C (F - kG) = \int_C F - k \int_C G = 2k\pi - 2k\pi = 0$$

Pelo Caso 1

$$(F - kG) = \nabla \varphi$$