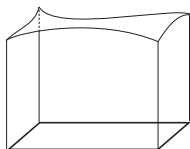


MATEMÁTICA II
RESUMO DA AULA DE 15 DE ABRIL DE 2008
INTEGRAIS DUPLAS

BIBLIOGRAFIA: S. LANG,
CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES, CAPÍTULO IX

ISABEL S. LABOURIAU

Volume delimitado pelo gráfico de uma função contínua sobre um retângulo $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbf{R}$



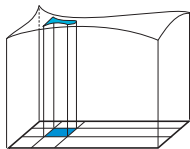
retângulo

$$\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$$

volume

$$\iint_{\mathcal{R}} f = \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dy dx$$

retângulo $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbf{R}$ contínua



2^n subdivisões: $x_i = a + ih_1$ $y_i = b + ih_2$ $i = 0, 1, \dots, 2^n$
 $h_1 = (b - a)/2^n$ $h_2 = (d - c)/2^n$ $r_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$

retângulo r_{ij} com área $\alpha_n = h_1 h_2 = \frac{\mathcal{A}}{2^{2n}}$ com $\mathcal{A}$ = área de $\mathcal{R}$.

V_{ij} = volume sobre o pequeno retângulo

$$\alpha_n \min_{(x,y) \in r_{ij}} f(x, y) \leq V_{ij} \leq \alpha_n \max_{(x,y) \in r_{ij}} f(x, y)$$

pequeno volume aproximado $V_{ij} \approx \alpha_n f(x_i, y_j)$

retângulo $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbf{R}$ contínua

Volume total aproximado α_n área do pequeno retângulo

$$s_n = \sum_{i,j=1}^{2^n} \alpha_n \min_{(x,y) \in r_{ij}} f(x, y) \leq S_n = \sum_{i,j=1}^{2^n} \alpha_n \max_{(x,y) \in r_{ij}} f(x, y)$$

s_n é a aproximação por defeito S_n é a aproximação por excesso.

$$A_n = \sum_{i,j=1}^{2^n} \alpha_n f(x_i, y_j)$$

A_n é a aproximação fácil de calcular, $s_n \leq A_n \leq S_n$

retângulo $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ com área $\mathcal{A}$

Como $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbf{R}$ é contínua, então

a sucessão s_n é crescente e a sucessão S_n é decrescente.

As duas sucessões têm limite quando $n \rightarrow \infty$ porque são monótonas e limitadas.

V_{ij} = volume sobre o pequeno retângulo $\alpha_n = \frac{\mathcal{A}}{2^{2n}}$ área do pequeno retângulo

$$\alpha_n \min_{(x,y) \in r_{ij}} f(x, y) \leq V_{ij} \leq \alpha_n \max_{(x,y) \in r_{ij}} f(x, y)$$

Erro na aproximação em um pequeno retângulo

$$e_{ij} = \frac{\mathcal{A}}{2^{2n}} \left(\max_{(x,y) \in r_{ij}} f(x, y) - \min_{(x,y) \in r_{ij}} f(x, y) \right)$$

Como f é contínua, posso tomar $(\max_{(x,y) \in r_{ij}} f(x, y) - \min_{(x,y) \in r_{ij}} f(x, y))$ tão pequeno quanto eu queira.

retângulo $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ com área $\mathcal{A}$

Como $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbf{R}$ é contínua, então

a sucessão s_n é crescente e a sucessão S_n é decrescente.

As duas sucessões têm limite quando $n \rightarrow \infty$.

Erro na aproximação em um pequeno retângulo

$$e_{ij} = \frac{\mathcal{A}}{2^{2n}} \left(\max_{(x,y) \in r_{ij}} f(x, y) - \min_{(x,y) \in r_{ij}} f(x, y) \right)$$

Erro total na aproximação

$$\sum e_{ij} = \frac{\mathcal{A}}{2^{2n}} \sum \left(\max_{(x,y) \in r_{ij}} f(x, y) - \min_{(x,y) \in r_{ij}} f(x, y) \right)$$

Como f é contínua, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum e_{ij} = 0 \quad \text{logo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

retângulo $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ com área $\mathcal{A}$

$f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbf{R}$ contínua

Definição

$$\iint_{\mathcal{R}} f = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

retângulo $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ com área $\mathcal{A}$
 f e $g : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbf{R}$ contínuas

Propriedades da integral dupla

- $\iint_{\mathcal{R}} f + g = \iint_{\mathcal{R}} f + \iint_{\mathcal{R}} g.$
- $\iint_{\mathcal{R}} kf = k \iint_{\mathcal{R}} f$ para $k \in \mathbf{R}.$
- Se $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathcal{R}$ então $\iint_{\mathcal{R}} f \leq \iint_{\mathcal{R}} g.$

Definição $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbf{R}$ é *seccionalmente contínua* se:
 f for limitada E f for contínua, exceto sobre um número finito de curvas C^1 .

Exemplo $g : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \geq x^2 \\ 0 & \text{se } y < x^2 \end{cases}$$

é seccionalmente contínua

Exemplo $f : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } y \geq x^2 \\ 0 & \text{se } y < x^2 \end{cases}$$

é seccionalmente contínua, $f(x, y) = (x^2 + y^2)g(x, y)$

Teorema 1. Se $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ for seccionalmente contínua em um retângulo $\mathcal{R}$ então existe $\iint_{\mathcal{R}} f.$

Definição Dadas $\Omega \subset \mathcal{R}$ região delimitada por um número finito de curvas C^1 e $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ seccionalmente contínua, define-se $\iint_{\Omega} f$ como

$$\iint_{\Omega} f = \iint_{\mathcal{R}} g$$

onde $g : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ é a função seccionalmente contínua dada por

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

Definição equivalente Dadas $\Omega \subset \mathcal{R}$ região delimitada por um número finito de curvas C^1 e $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ seccionalmente contínua, define-se $\iint_{\Omega} f$ como

$$\iint_{\Omega} f = \iint_{\mathcal{R}} f \chi_{\Omega}$$

onde $\chi_\Omega : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ é a função seccionalmente contínua dada por

$$\chi_\Omega(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

$\chi_\Omega(x, y)$ é a função característica de Ω .

Integrais repetidas

Exemplo $f : [0, 1] \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbf{R}$ $f(x, y) = x \sin y$
distribuição marginal $f_x : [0, \pi] \longrightarrow \mathbf{R}$ $y \mapsto f_x(y) = f(x, y) = x \sin y$.

$$\int_0^\pi f_x(y) dy = \int_0^\pi x \sin y dy = -x \cos y \Big|_{y=0}^{y=\pi} = 2x = \int_0^\pi f(x, y) dy$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^\pi f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 (2x) dx = x^2 \Big|_0^1 = 1$$

$f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbf{R}$ seccionalmente contínua.

$$g(x) = \int_c^d f_x(y) dy = \int_c^d f(x, y) dy$$

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

Teorema 2. Dados $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ e $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ seccionalmente contínua então

$$\iint_{\mathcal{R}} f = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

Exemplo $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, \pi]$ $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ $f(x, y) = x \sin y$

$$\iint_{\mathcal{R}} f = \int_0^1 \left(\int_0^\pi f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 (2x) dx = x^2 \Big|_0^1 = 1$$

Exemplo $\Omega = \{(x, y) : x \in [0, 1] \quad x \leq y \leq 2 - x\}$

$f(x, y) = xy$

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^1 \left(\int_x^{2-x} f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 (2x - 4x^2) dx = 1 - \frac{4}{3}$$

Cuidado com a ordem da integração!

Exemplo $\Omega = \{(x, y) : x \in [0, 1] \quad x^2 \leq y \leq x\}$

$f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x f(x, y) dy \right) dx = \frac{1}{4} + -\frac{1}{12} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21}$$