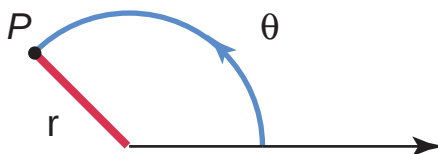


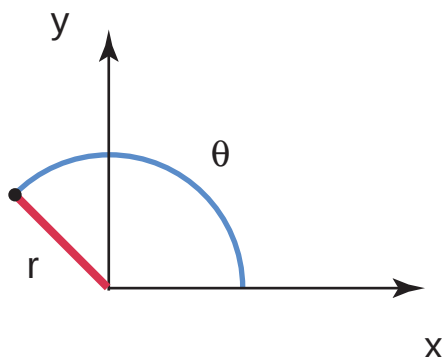
MATEMÁTICA II
 RESUMO DA AULA DE 29 DE ABRIL DE 2008
 INTEGRAIS DUPLAS — COORDENADAS POLARES
 BIBLIOGRAFIA: S. LANG,
 CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES, CAPÍTULO IX

ISABEL S. LABOURIAU

Coordenadas polares Fixada uma semi-reta no plano
 Cada ponto P é representado pela distância r à origem e pelo ângulo θ entre o segmento que liga P à origem e a semi-reta.

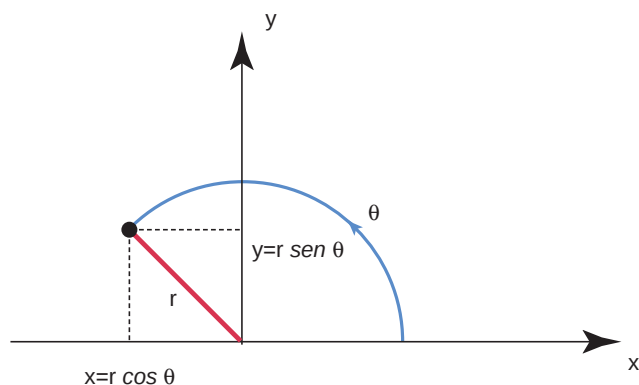


Coordenadas polares Se a semi-reta for o eixo dos xx .
 Cada ponto $P = (x, y)$ é representado:
 pela distância $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ à origem
 e pelo ângulo θ entre o segmento que liga P à origem e o eixo dos xx .



Coordenadas polares Se a semi-reta for o eixo dos xx .
 Cada ponto P representado em coordenadas polares r, θ
 corresponde ao ponto (x, y) , em coordenadas cartesianas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$



Coordenadas polares

Exemplo 1 — circunferência de centro na origem e raio 5 Em coordenadas cartesianas:

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$$

Em coordenadas polares r, θ

$$\{(r, \theta) : r = 5\}$$

Forma paramétrica Em coordenadas cartesianas:

$$C(t) = (5 \cos t, 5 \sin t) \quad t \in \mathbf{R}$$

Em coordenadas polares r, θ

$$(r(t), \theta(t)) = (5, t)$$

Coordenadas polares

Exemplo 2 — semi-reta pela origem Em coordenadas cartesianas:

$$\{(x, y) : y = x \quad x > 0\}$$

Em coordenadas polares r, θ

$$\{(r, \theta) : \theta = \pi/4 \quad r > 0\}$$

Forma paramétrica Em coordenadas cartesianas:

$$C(t) = (t, t) \quad t > 0$$

Em coordenadas polares r, θ

$$(r(t), \theta(t)) = (t, \pi/4) \quad t > 0$$

Coordenadas polares

Exemplo 3 — reta pela origem Em coordenadas cartesianas:

$$\{(x, y) : y = x\}$$

Em coordenadas polares r, θ

$$\{(r, \theta) : \theta = \pi/4 \quad r \in \mathbf{R}\}$$

Forma paramétrica Em coordenadas cartesianas:

$$C(t) = (t, t) \quad t \in \mathbf{R}$$

Em coordenadas polares r, θ

$$(r(t), \theta(t)) = (t, \pi/4) \quad t \in \mathbf{R}$$

Coordenadas polares

Exemplo 4 Encontre a expressão em coordenadas cartesianas para a curva dada em coordenadas polares r, θ por:

$$r = \cos \theta \quad \theta \in \mathbf{R}$$

$$r = \cos \theta \quad \Rightarrow \quad r^2 = r \cos \theta = x \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = x$$

completando o quadrado

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 = \frac{1}{4}$$

$$A^* = \{(r, \theta) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ e } 0 \leq r \leq \cos \theta\}$$

$$P(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y) \text{ transforma } A^* \text{ em } P(A^*) = \{(x, y) : (x - 1/2)^2 + y^2 \leq 1/4\}$$

disco de centro $(1/2, 0)$ e raio $1/2$

Coordenadas polares

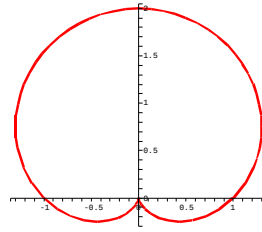
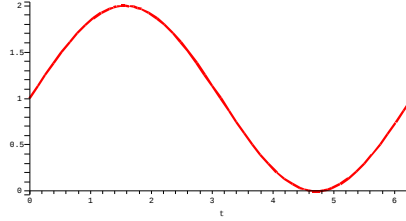
Exemplo 5 Encontre a expressão em coordenadas cartesianas para a curva dada em coordenadas polares r, θ por:

$$r = \sec \theta \quad \theta \in \mathbf{R}$$

$$r = \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \Rightarrow \quad r \cos \theta = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Coordenadas polares

Exemplo 6 $r = 1 + \sin \theta$



Definição Dada $f(x, y)$ define-se $f^*(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ou seja $f^* = f \circ P$ com $P(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$.

Exemplo 7 $f(x, y) = x^2 y^3$ $f^*(r, \theta) = r^5 \cos^2 \theta \sin^3 \theta$

Exemplo 8

$$f(x, y) = \frac{1}{xy(x^2 + y^2 - 1)}$$

definida no setor $S = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$

$$f^*(r, \theta) = \frac{1}{r^2(r^2 - 1) \cos \theta \sin \theta}$$

está definida no retângulo $S^* = \{(r, \theta) : 0 < r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$

Área $P(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$ transforma o retângulo

$$\mathcal{R} = \{(r, \theta) : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, 0 \leq r_1 \leq r \leq r_2\}$$

em um setor angular.

Área do setor angular:

$$(r_2^2 - r_1^2) \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} = \bar{r}(r_2 - r_1)(\theta_2 - \theta_1) \quad \text{com} \quad \bar{r} = \frac{r_2 + r_1}{2}.$$

área do setor angular = $\bar{r} \times$ (área do retângulo $\mathcal{R}$).

Teorema 1. *Seja $S \subset \mathbf{R}^2$ o conjunto*

$$S = \{(x, y) : x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, a \leq \theta \leq b, c \leq r \leq d\}$$

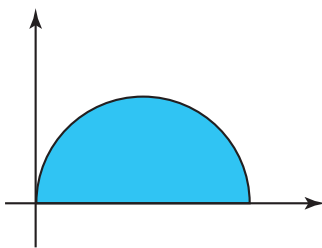
e seja S^ o retângulo*

$$S^* = \{(r, \theta) : a \leq \theta \leq b, c \leq r \leq d\}.$$

Se $f : S \rightarrow \mathbf{R}$ for uma função seccionalmente contínua então

$$\iint_S f(x, y) dy dx = \iint_{S^*} f^*(r, \theta) r dr d\theta$$

Exemplo 9 $S = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq 0 \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$ $f(x, y) = x$



$$\iint_S f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}} x dy dx = \int_0^1 x \sqrt{\frac{1}{4} - (x - 1/2)^2} dx$$

Exemplo 9 $S = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq 0 \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$ $f(x, y) = x$
 $S^* = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi/2 \quad 0 \leq r \leq \cos \theta\}$ $f^*(r, \theta) = r \cos \theta$.

$$\iint_S f(x, y) dy dx = \iint_{S^*} f^*(r, \theta) r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} r^2 \cos \theta dr d\theta$$

$$\int_0^{\cos \theta} r^2 dr = \frac{1}{3} \cos^3 \theta \quad \int_0^{\cos \theta} r^2 \cos \theta dr = \frac{1}{3} \cos^4 \theta$$

para calcular $\int \cos^4 \theta d\theta$: $2 \cos^2 \theta = 1 + 2 \cos 2\theta$

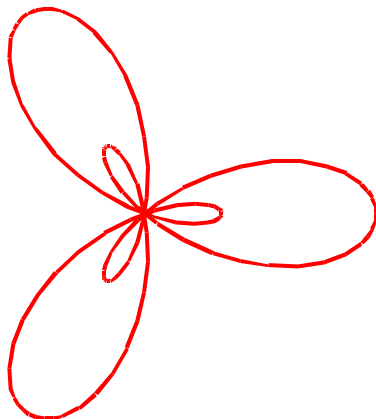
$$4 \cos^4 \theta = (2 \cos^2 \theta)^2 = 1 + 4 \cos 2\theta + 4 \cos^2 2\theta$$

$$4 \cos^4 \theta = 1 + 4 \cos 2\theta + 2(1 + 2 \cos 4\theta) = 3 + 4 \cos 2\theta + 4 \cos 4\theta$$

$$\int \cos^4 \theta d\theta = \frac{3\theta}{4} + \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta$$

$$\iint_S f(x, y) dy dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3} \cos^4 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}$$

Exemplo 10 $r = 1/2 + \cos 3t$



Exemplo 11 $r = 1/2 + \cos 4t$

