

MATEMÁTICA II
RESUMO DA AULA DE 30 DE ABRIL DE 2008
TEOREMA DE GREEN
BIBLIOGRAFIA: S. LANG,
CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES, CAPÍTULO X

ISABEL S. LABOURIAU

$$U \text{ aberto em } \mathbf{R}^2 \quad F : U \longrightarrow \mathbf{R}^2 \quad F(x, y) = (p(x, y), q(x, y)) \\ C : [a, b] \longrightarrow U \quad C(t) = (x(t), y(t)) \quad C'(t) = (x'(t), y'(t))$$

$$F(C(t)) \cdot C'(t) = p(x, y)x'(t) + q(x, y)y'(t)$$

$$\int_C F = \int_a^b F(C(t)) \cdot C'(t) dt = \int_C p \, dx + q \, dy$$

Teorema 1 (de Green). $A \subset \mathbf{R}^2$ região delimitada por um caminho fechado C ,
 C seccionalmente C^1 , parametrizado no sentido anti-horário, $p, q : A \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe C^1 , então

$$\int_C p \, dx + q \, dy = \iint_A \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dy dx$$

Lema 1 (Meio Teorema de Green - caso particular). $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$
 $C_1(t) = (t, g_1(t)) \quad C_2(t) = (t, g_2(t)) \quad t \in [a, b],$
 $C_3(t) = (a, t) \quad t \in [g_1(a), g_2(a)],$
 $C_4(t) = (b, t) \quad t \in [g_1(b), g_2(b)],$
 $C = \{C_1, C_4, C_2^-, C_3^-\}. \quad \text{Então}$

$$\int_C p \, dx = \iint_A \left(-\frac{\partial p}{\partial y} \right) dy dx$$

Prova $C_4(t) = (x_4(t), y_4(t)) \quad x'_4(t) = 0$

$$\int_{C_4} p \, dx = \int_{g_1(b)}^{g_2(b)} p(C_4(t))x'_4(t)dt = 0$$

e também $\int_{C_3^-} p \, dx = 0$. Resta ver que $\int_{C_2} p \, dx - \int_{C_1} p \, dx = \iint_A \frac{\partial p}{\partial y} dy dx$

Lema 2 (Meio Teorema de Green - caso particular). $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$
 $C_1(t) = (t, g_1(t)) \quad C_2(t) = (t, g_2(t)) \quad t \in [a, b],$
 $C_3(t) = (a, t) \quad C_4(t) = (b, t) \quad C = \{C_1, C_4, C_2^-, C_3^-\}. \text{ Então}$

$$\int_C p \, dx = \iint_A \left(-\frac{\partial p}{\partial y} \right) dy dx$$

Prova Resta ver que $\int_{C_2} p \, dx - \int_{C_1} p \, dx = \iint_A \frac{\partial p}{\partial y} dy dx$

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{\partial p}{\partial y} dy dx &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial p}{\partial y}(x, y) dy dx = \int_a^b p(x, y) \Big|_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dx = \\ &= \int_a^b p(x, g_2(x)) - p(x, g_1(x)) dx = \int_{C_2} p \, dx - \int_{C_1} p \, dx \end{aligned}$$

Lema 3 (Meio Teorema de Green - caso particular). $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$
 $C = \text{caminho à volta de } A \text{ no sentido anti-horário. Então}$

$$\int_C p \, dx = \iint_A \left(-\frac{\partial p}{\partial y} \right) dy dx$$

Lema 4 (Meio Teorema de Green - outro caso particular). $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : c \leq y \leq d \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$
 $C = \text{caminho à volta de } A \text{ no sentido anti-horário. Então}$

$$\int_C q \, dy = \iint_A \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right) dy dx$$

Se A puder ser escrita das duas maneiras, então vale o Teorema de Green.

Exemplo 1 Calcule a integral de $F(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$ sobre a elipse $4x^2 + y^2 = 4$.

$$\begin{aligned} p(x, y) &= y + 3x & q(x, y) &= 2y - x \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 1 & \frac{\partial q}{\partial x} &= -1 \end{aligned}$$

$$\int_C p \, dx + q \, dy = \iint_A -2 \, dy dx = -2 \text{ área da elipse} = -4\pi$$

Exemplo 2 Calcule a integral de $F(x, y) = (3xy, x^2)$ sobre o retângulo de vértices $(-1, 0), (3, 0), (3, 2), (-1, 2)$ percorrido no sentido anti-horário.

$$\begin{aligned} p(x, y) &= 3xy & q(x, y) &= x^2 \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 3x & \frac{\partial q}{\partial x} &= 2x \end{aligned}$$

Pelo teorema de Green a integral vale o mesmo que:

$$\int_{-1}^3 \int_0^2 2x - 3x \, dy dx = -2 \int_{-1}^3 x dx = -8$$

Teorema 2 (de Green - versão geral). *A $\subset \mathbf{R}^2$ região delimitada pelas curvas $C_1, \dots, C_m$ de classe C^1 parametrizadas de maneira que A esteja à esquerda de cada uma delas,*

$p, q : A \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe C^1 , então para $C = \{C_1, \dots, C_m\}$

$$\int_C p \, dx + q \, dy = \iint_A \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) \, dy dx$$

Exemplo 3 Calcule a integral sobre um hexágono de lado 5 centrado na origem percorrido no sentido anti-horário de

$$G(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

$$p(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

H = hexágono C = circunferência de centro (0,0) e raio 1.

A = região entre as duas curvas

Pelo teorema de Green:

$$\int_H p dx + q dy - \int_C p dx + q dy = \iint_A \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) \, dy dx = \iint_A 0 \, dy dx = 0$$

Conclusão

$$\int_H G = \int_C G = 2\pi$$