

MATEMÁTICA II

DIVERGÊNCIA E ROTACIONAL

BIBLIOGRAFIA: S. LANG, CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES, CAPÍTULO X

ISABEL S. LABOURIAU

U aberto em $\mathbf{R}^2$ $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ $F(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$

Rotacional de F

$$\text{rot } F(x, y) = D_1 q - D_2 p = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}$$

Teorema 1 (de Green). $A \subset U$ região delimitada por um caminho fechado C , C seccionalmente C^1 , parametrizado no sentido anti-horário, $p, q : A \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe C^1 , então

$$\int_C p \, dx + q \, dy = \iint_A \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) \, dy \, dx$$

U aberto em $\mathbf{R}^2$ $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ $F(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$

Rotacional de F

$$\text{rot } F(x, y) = D_1 q - D_2 p = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}$$

Teorema 2 (de Green). $A \subset U$ região delimitada por um caminho fechado C , C seccionalmente C^1 , parametrizado no sentido anti-horário, $F : A \longrightarrow \mathbf{R}^2$ de classe C^1 , então

$$\int_C F = \iint_A \text{rot } F \, dy \, dx$$

U aberto em $\mathbf{R}^2$ $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ $F(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$
 $C : [a, b] \longrightarrow U$ caminho seccionalmente C^1

$$\int_C F = \int_a^b F(C(t)) \cdot C'(t) \, dt$$

s = distância percorrida sobre o caminho $C(t)$

$$s = \int_a^b |C'(t)| \, dt \quad \Rightarrow \quad |C'(t)| = \frac{ds}{dt}$$

$\mathbf{u}(t)$ = vetor unitário na direção e sentido de $C'(t)$:

$$\mathbf{u}(t) = \frac{1}{|C'(t)|} C'(t) \quad \Rightarrow \quad C'(t) = \mathbf{u}(t) \frac{ds}{dt}$$

$$\int_C F = \int_C F \cdot \mathbf{u} \, ds$$

Teorema 3 (de Green). $A \subset U$ região delimitada por um caminho fechado C , C seccionalmente C^1 , parametrizado no sentido anti-horário, $\mathbf{u}(t)$ = vetor unitário na direção e sentido de $C'(t)$
 s = distância ao longo de C e $F : A \longrightarrow \mathbf{R}^2$ de classe C^1 , então

$$\int_C F \cdot \mathbf{u} \, ds = \iint_A \text{rot } F \, dydx$$

Teorema 4 (corolário do teorema de Green). $U \subset \mathbf{R}^2$ aberto, $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ de classe C^1 , $C_r \subset U$ circunferência de centro P e raio r parametrizada no sentido anti-horário e $\mathbf{u}(t)$ = vetor unitário tangente a C_r , então

$$\text{rot } F(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r} F \cdot \mathbf{u} \, ds$$

Prova do corolário do teorema de Green $X \in U$ e $H(X) = \text{rot } F(X) - \text{rot } F(P)$ então
 $\lim_{X \rightarrow P} H(X) = 0$
 D_r = disco de centro P e raio r ,

$$\begin{aligned} \int_{C_r} F \cdot \mathbf{u} \, ds &= \iint_{D_r} \text{rot } F(P) \, dydx + \iint_{D_r} H(X) \, dydx \\ \iint_{D_r} \text{rot } F(P) \, dydx &= \text{rot } F(P) \iint_{D_r} 1 \, dydx = \pi r^2 \text{rot } F(P) \end{aligned}$$

Então

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r} F \cdot \mathbf{u} \, ds = \text{rot } F(P)$$

porque

$$\left| \iint_{D_r} H(X) \, dydx \right| \leq \pi r^2 \max_{|x-P| \leq r} |H(X)|$$

logo

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} H(X) \, dydx = 0$$

Interpretação do corolário do teorema de Green $C_r(t)$ = circunferência de centro P e raio r
com vetor tangente unitário $\mathbf{u}(t)$.

$$\text{rot } F(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r} F \cdot \mathbf{u} \, ds$$

$F(C_r(t)) \cdot \mathbf{u}(t) = |F(C_r(t))| \cos \theta$
 $F(C_r(t)) \cdot \mathbf{u}(t) = 0$ se $F(C_r(t))$ for paralelo a $C_r(t)$.
 $F(C_r(t)) \cdot \mathbf{u}(t)$ = componente de F na direção tangente a C_r .
O rotacional de F em P é a média da rotação de F por unidade de área e por unidade de tempo em torno de P .

Teorema 5 (de Green). $A \subset \mathbf{R}^2$ região delimitada por um caminho fechado C , C seccionalmente C^1 , parametrizado no sentido anti-horário, $p, q : A \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe C^1 e $F(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$, então

$$\int_C F = \int_C p \, dx + q \, dy = \iint_A \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) \, dy \, dx$$

Aplicação $G(x, y) = (-q(x, y), p(x, y))$

$$\int_C G = \int_C -q \, dx + p \, dy = \iint_A \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) \, dy \, dx$$

Provamos: $C : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^2$ caminho fechado seccionalmente C^1 , parametrizado no sentido anti-horário, $C(t) = (x(t), y(t))$

$$\int_C -q \, dx + p \, dy = \iint_A \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) \, dy \, dx$$

$$\int_C -q \, dx + p \, dy = \int_a^b (-q, p) \cdot (x', y') \, dt = \int_a^b (p, q) \cdot (y', -x') \, dt$$

$$\int_C -q \, dx + p \, dy = \int_a^b F(x(t), y(t)) \cdot (y'(t), -x'(t)) \, dt$$

Divergência de F

$$\operatorname{div} F(x, y) = D_1 p + D_2 q = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}$$

Definição A normal à direita da curva $C(t) = (x(t), y(t))$ é o vetor

$$N(t) = \left(\frac{dy}{dt}, -\frac{dx}{dt} \right).$$

Teorema 6 (da divergência). $A \subset \mathbf{R}^2$ região delimitada por um caminho fechado C , C seccionalmente C^1 , parametrizado no sentido anti-horário, $p, q : A \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe C^1 e $F(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$, então

$$\int_C F \cdot N \, dt = \iint_A \operatorname{div} F \, dy \, dx$$

Teorema 7 (corolário do teorema da divergência). $U \subset \mathbf{R}^2$ aberto, $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ de classe C^1 ,

$C_r \subset U$ circunferência de centro P e raio r parametrizada no sentido anti-horário e $\mathbf{n}(t)$ = vetor unitário normal a C_r à direita, então

$$\operatorname{div} F(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r} F \cdot \mathbf{n} \, ds$$

onde $C_r : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^2$ e $\int_{C_r} F \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_a^b F(C_r(t)) \cdot \mathbf{n}(t) \frac{ds}{dt} \, dt$

Interpretação A divergência de F em P é o fluxo médio de saída de F por unidade de área e por unidade de tempo em P .

Prova do corolário do teorema da divergência $X \in U$ e $H(X) = \operatorname{div} F(X) - \operatorname{div} F(P)$
então $\lim_{X \rightarrow P} H(X) = 0$

D_r = disco de centro P e raio r ,

$$\begin{aligned} \int_{C_r} F \cdot \mathbf{n} \, ds &= \iint_{D_r} \operatorname{div} F(P) \, dydx + \iint_{D_r} H(X) \, dydx \\ \iint_{D_r} \operatorname{div} F(P) \, dydx &= \operatorname{div} F(P) \iint_{D_r} 1 \, dydx = \pi r^2 \operatorname{div} F(P) \end{aligned}$$

Então

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r} F \cdot \mathbf{u} \, ds = \operatorname{div} F(P)$$

porque

$$\left| \iint_{D_r} H(X) \, dydx \right| \leq \pi r^2 \max_{|x-P| \leq r} |H(X)|$$

logo

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} H(X) \, dydx = 0$$