

MATEMÁTICA II
RESUMO DAS AULAS DE 13 E 14 DE MAIO DE 2008
INTEGRAIS TRIPLAS

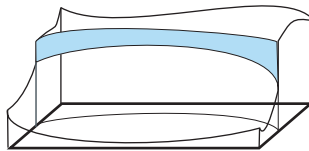
BIBLIOGRAFIA: S. LANG,
CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES, CAPÍTULO XI

ISABEL S. LABOURIAU

2-D

Volume delimitado pelo gráfico de uma função seccionalmente contínua sobre um retângulo
 $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbf{R}$

//



2-D

retângulo $\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$

$$\text{volume} = \iint_{\mathcal{R}} f = \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dy dx$$

//

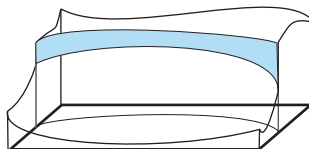
Massa de uma chapa retangular com densidade $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbf{R}$, seccionalmente contínua

$$\text{massa} = \iint_{\mathcal{R}} f = \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dy dx$$

2-D

Definição $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbf{R}$ é seccionalmente contínua se:
 f for limitada e f for contínua, exceto sobre um número finito de curvas C^1 .

//



Definição $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \longrightarrow \mathbf{R}$ é seccionalmente contínua se:
 f for limitada e f for contínua, exceto sobre um número finito de superfícies C^1 .

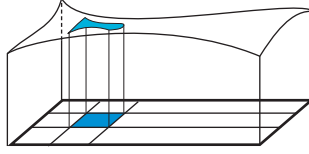
2-D

retângulo $\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ com área $\mathcal{A}$

$f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ seccionalmente contínua

2^n subdivisões de cada intervalo

2^{2n} pequenos retângulos r_{ij} com área $\alpha_n = \frac{\mathcal{A}}{2^{2n}}$.



//

paralelepípedo $\mathcal{P} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ com volume $\mathcal{V}$

$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbf{R}$ seccionalmente contínua

2^n subdivisões de cada intervalo

2^{3n} pequenos paralelepípedos p_{ijk} com volume $\alpha_n = \frac{\mathcal{V}}{2^{3n}}$.

2-D

$M_{ij} =$ massa do pequeno retângulo

$$\alpha_n \min_{(x,y) \in r_{ij}} f(x,y) \leq M_{ij} \leq \alpha_n \max_{(x,y) \in r_{ij}} f(x,y)$$

//

$M_{ij} =$ massa do pequeno paralelepípedo

$$\alpha_n \min_{(x,y,z) \in p_{ijk}} f(x,y,z) \leq M_{ij} \leq \alpha_n \max_{(x,y,z) \in p_{ijk}} f(x,y,z)$$

2-D

Massa total aproximada do retângulo

$$s_n = \sum_{i,j=1}^{2^n} \alpha_n \min_{(x,y) \in r_{ij}} f(x,y) \leq S_n = \sum_{i,j=1}^{2^n} \alpha_n \max_{(x,y) \in r_{ij}} f(x,y)$$

//

Massa total aproximada do paralelepípedo

$$s_n = \sum_{i,j,k=1}^{2^n} \alpha_n \min_{(x,y,z) \in p_{ijk}} f(x,y,z) \leq S_n = \sum_{i,j,k=1}^{2^n} \alpha_n \max_{(x,y,z) \in p_{ijk}} f(x,y,z)$$

s_n é a aproximação por defeito S_n é a aproximação por excesso.

A sucessão s_n é crescente e a sucessão S_n é decrescente.

As duas sucessões têm limite quando $n \rightarrow \infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n - s_n = 0$.

Definição

$$\text{massa} = \iiint_{\mathcal{P}} f = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Notação

$$\iiint_{\mathcal{P}} f = \iiint_{\mathcal{P}} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

paralelepípedo $\mathcal{P} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ com volume $\mathcal{V}$
 f e $g : \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{R}$ seccionalmente contínuas

Propriedades da integral tripla

- $\iiint_{\mathcal{P}} 1 = \mathcal{V}$
- $\iiint_{\mathcal{P}} f + g = \iiint_{\mathcal{P}} f + \iiint_{\mathcal{P}} g$.
- $\iiint_{\mathcal{P}} kf = k \iiint_{\mathcal{P}} f$ para $k \in \mathbf{R}$.
- Se $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathcal{P}$ então $\iiint_{\mathcal{P}} f \leq \iiint_{\mathcal{P}} g$.
- $\iiint_{\mathcal{P}} f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) \, dz \right) \, dy \right) \, dx$

Exercício 1 paralelepípedo $\mathcal{P} = [0, 2] \times [0, 1] \times [-1, 1]$ com volume $\mathcal{V} = 4$

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{P}} e^{x+y} &= \int_0^2 \left(\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 e^{x+y} dz \right) \, dy \right) \, dx \\ \int_{-1}^1 e^{x+y} dz &= e^{x+y} z \Big|_{z=-1}^{z=1} = 2e^{x+y} \\ \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 e^{x+y} dz \right) \, dy &= \int_0^1 2e^{x+y} \, dy = 2e^x (e - 1) \\ \iiint_{\mathcal{P}} e^{x+y} &= \int_0^2 2e^x (e - 1) \, dx = 2(e^2 - 1)(e - 1) \end{aligned}$$

Exercício 2 paralelepípedo $\mathcal{P} = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ com volume $\mathcal{V} = 1$

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{P}} ye^{xy} &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 ye^{xy} dz \right) \, dy \right) \, dx \\ \int_0^1 ye^{xy} dz &= ye^{xy} \int_0^1 1 dz = ye^{xy} \\ \int_0^1 \left(\int_0^1 ye^{xy} dz \right) \, dy &= \int_0^1 ye^{xy} \, dy = \end{aligned}$$

Mais fácil:

$$\iiint_{\mathcal{P}} ye^{xy} = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 ye^{xy} dz \right) dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 ye^{xy} dx \right) dy$$

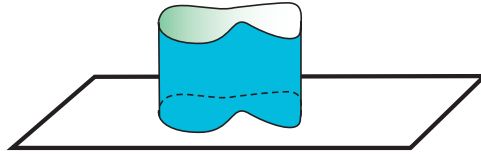
$$\int_0^1 ye^{xy} dx = e^{xy} \Big|_{x=0}^{x=1} = e^y - 1 \quad \iiint_{\mathcal{P}} ye^{xy} = \int_0^1 e^y - 1 dy = e - 2$$

2-D

Definição Dadas $\Omega \subset \mathcal{R}$ região delimitada por um número finito de curvas C^1 e $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ seccionalmente contínua em um retângulo $\mathcal{R}$, define-se $\iint_{\Omega} f = \iint_{\mathcal{R}} g$ onde $g : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ é dada por

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

//



2-D

Definição Dadas $\Omega \subset \mathcal{R}$ região delimitada por um número finito de curvas C^1 e $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ seccionalmente contínua em um retângulo $\mathcal{R}$, define-se $\iint_{\Omega} f = \iint_{\mathcal{R}} g$ onde $g : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ é dada por

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

//

Definição Dadas $\Omega \subset \mathcal{P}$ região delimitada por um número finito de superfícies C^1 e $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{R}$ seccionalmente contínua em um paralelepípedo $\mathcal{P}$, define-se $\iiint_{\Omega} f = \iiint_{\mathcal{P}} g$ onde $g : \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{R}$ é dada por

$$g(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{se } (x, y, z) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x, y, z) \notin \Omega \end{cases}$$

Exercício 3 Calcule o volume do tetraedro T de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.
 Tetraedro: $T = \{(x, y, z) : x + y + z \leq 1 \text{ e } x, y, z \in [0, 1]\}$
 Volume:

$$\iiint_T 1 \, dz \, dy \, dx$$

$$\text{Tetraedro: } T = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1 - x \quad 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

$$\iiint_T 1 \, dz \, dy \, dx = \frac{1}{6}$$

Exercício 4 Mostre o teorema de Arquimedes:

Teorema 1 (Arquimedes ≈ -250). *Para uma esfera e um cone perfeitamente inscritos em um cilindro, os volumes do cone, da esfera e do cilindro estão na relação 1:2:3.*



Exercício 4 - Mostre:

Teorema 2 (Arquimedes ≈ -250). *Para uma esfera e um cone perfeitamente inscritos em um cilindro, os volumes do cone, da esfera e do cilindro estão na relação 1:2:3.*

Esfera: $S = \{(x, y, z) : |(x, y, z)| \leq r\}$
 Cilindro: $C = \{(x, y, z) : |(x, y)| \leq r \text{ e } -r \leq z \leq r\}$
 Cone: $N = \{(x, y, z) : |(x, y)| \leq (r - z)/2 \text{ e } -r \leq z \leq r\}$

Sugestões: O teorema fica provado se verificarmos que $\iiint_S 1 \, dz \, dy \, dx = 2 \iiint_N 1 \, dz \, dy \, dx$
 e que $\iiint_C 1 \, dz \, dy \, dx = 3 \iiint_N 1 \, dz \, dy \, dx$
 O cone $M = \{(x, y, z) : |(x, y)| \leq z/2 \text{ e } 0 \leq z \leq 2r\}$ tem o mesmo volume que N .