

MATEMÁTICA II
RESUMO DA AULA DE 21 DE MAIO DE 2008
MOMENTO E CENTRO DE MASSA

BIBLIOGRAFIA: S. LANG,
CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES, CAPÍTULO XI

ISABEL S. LABOURIAU

Placa $A \subset \mathbf{R}^2$ com densidade $\varphi(x, y)$ e massa $\mu = \iint_A \varphi$.

Definição Momento $M_{x=x_0}$ da placa em relação à reta $x = x_0$

$$M_{x=x_0} = \iint_A (x - x_0) \varphi(x, y) dy dx.$$

Momento $M_{y=y_0}$ da placa em relação à reta $y = y_0$

$$M_{y=y_0} = \iint_A (y - y_0) \varphi(x, y) dy dx.$$

Definição O centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$ da placa é o ponto que satisfaz

$$M_{x=\bar{x}} = 0 = M_{y=\bar{y}}$$

Placa $A \subset \mathbf{R}^2$ com densidade $\varphi(x, y)$ e massa $\mu = \iint_A \varphi$.

Definição O centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$ da placa é o ponto que satisfaz

$$M_{x=\bar{x}} = 0 \quad M_{y=\bar{y}} = 0$$

ou seja

$$\iint_A (x - \bar{x}) \varphi(x, y) dy dx = 0 \quad \iint_A (y - \bar{y}) \varphi(x, y) dy dx = 0.$$

Teorema 1. O centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$ da placa é o ponto que satisfaz

$$M_{x=0} = \mu \bar{x} \quad e \quad M_{y=0} = \mu \bar{y}.$$

Exercício Calcule o centro de massa da parte do disco de centro na origem e raio 1 que está no primeiro quadrante, com densidade constante $\varphi(x, y) = 1$. $A = \{(x, y) : |(x, y)| \leq$

$1, x \geq 0, y \geq 0\}$ Massa: $\mu = \iint_A 1 = \frac{\pi}{4}$

Momento em relação ao eixo dos yy :

$$M_{x=0} = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x dy dx$$

Em coordenadas polares: $A = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$ Momento em relação ao eixo dos yy :

$$M_{x=0} = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r \cos \theta r \, dr \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3} \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{\mu} = \frac{4}{3\pi}$$

$$M_{y=0} = \frac{1}{3} \quad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{\mu} = \frac{4}{3\pi}$$

Sólido $A \subset \mathbf{R}^3$ com densidade $\varphi(x, y, z)$ e massa $\mu = \iiint_A \varphi$.

Definição O centro de massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ do sólido é o ponto que satisfaz

$$M_{x=0} = \mu \bar{x} \quad M_{y=0} = \mu \bar{y} \quad \text{e} \quad M_{z=0} = \mu \bar{z}$$

onde

$$M_{x=x_0} = \iiint_A (x - x_0) \varphi(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

$$M_{y=y_0} = \iiint_A (y - y_0) \varphi(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

$$M_{z=z_0} = \iiint_A (z - z_0) \varphi(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

ou, o que é equivalente, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ satisfaz

$$M_{x=\bar{x}} = 0 \quad M_{y=\bar{y}} = 0 \quad M_{z=\bar{z}} = 0.$$

Exercício Calcule o centro de massa da parte da esfera de centro na origem e raio 1 que está no primeiro octante, com densidade constante $f(x, y, z) = 1$. $A = \{(x, y, z) : |(x, y, z)| \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

em coordenadas esféricas:

$$A^* = \{(\rho, \theta, \varphi) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi/2, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

$$\text{Massa: } \mu = \iiint_A 1 = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$M_{z=0} = \iiint_A z \, dz \, dy \, dx = \iiint_{A^*} (\rho \cos \varphi)(\rho^2 \sin \varphi) \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$M_{z=0} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^3 \cos \varphi \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \frac{\pi}{16}$$

$$\bar{z} = \frac{M_{z=0}}{\mu} = \frac{3}{8}$$

$$\bar{x} = \frac{3}{8} \quad \bar{y} = \frac{3}{8}$$