

MATEMÁTICA II
RESUMO DA AULA DE 21 DE MAIO DE 2008
SUPERFÍCIES PARAMETRIZADAS

BIBLIOGRAFIA: S. LANG,
CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES, CAPÍTULO XII

ISABEL S. LABOURIAU

Parametrização de uma superfície em $\mathbf{R}^3$ $X(t, u) = (x_1(t, u), x_2(t, u), x_3(t, u))$
Superfície parametrizada: $S = \{(x, y, z) = X(t, u)\}$

Exemplo 1 - Esfera A esfera de raio $\rho > 0$ é parametrizada pelas coordenadas esféricas:

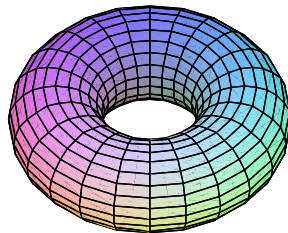
$$X(\varphi, \theta) = (\rho \cos \varphi \cos \theta, \rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi)$$

para $0 \leq \varphi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Exemplo 2 - Toro É a superfície parametrizada por:

$$X(\varphi, \theta) = ((a + b \cos \varphi) \cos \theta, (a + b \cos \varphi) \sin \theta, b \sin \varphi)$$

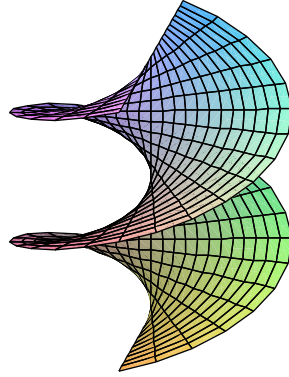
para $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.



Exemplo 3 - Helicóide É a superfície parametrizada por:

$$X(t, \theta) = (t \cos \theta, t \sin \theta, \theta)$$

para $0 \leq t \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.



$X(t, u)$ parametrização de uma superfície S .

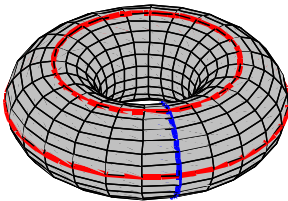
Curvas coordenadas Para a superfície parametrizada por $X(t, u) = (x_1(t, u), x_2(t, u), x_3(t, u))$ para cada u fixado, $C_1(t) = X(t, u)$ curva com velocidade

$$C'_1(t) = \frac{\partial}{\partial t} X(t, u) = A_1$$

para cada t fixado, $C_2(u) = X(t, u)$ curva com velocidade

$$C'_2(u) = \frac{\partial}{\partial u} X(t, u) = A_2$$

Exemplo: toro com curvas coordenadas azul: θ constante; vermelho: φ constante.



Definição (t, u) é ponto regular se os vetores

$$\frac{\partial}{\partial t} X(t, u) = A_1 \quad \frac{\partial}{\partial u} X(t, u) = A_2$$

forem linearmente independentes.

$X(t, u)$ parametrização de uma superfície S .

$$\frac{\partial}{\partial t}X(t, u) = A_1 \qquad \frac{\partial}{\partial u}X(t, u) = A_2$$

Definição O *plano tangente à superfície* em um ponto regular (t, u) é o plano que passa por $X(t, u)$ e é paralelo ao subespaço vetorial gerado por A_1 e A_2 .

Definição O *vetor normal à superfície* em um ponto regular (t, u) é

$$N(t, u) = \frac{\partial}{\partial t}X(t, u) \times \frac{\partial}{\partial u}X(t, u)$$

e o vetor normal unitário é $\mathbf{n}(t, u) = \frac{N(t, u)}{|N(t, u)|}$