

MATEMÁTICA II
RESUMO DAS AULAS DE 27 E 28 DE MAIO DE 2008
INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

BIBLIOGRAFIA: S. LANG,
CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES, CAPÍTULO XII

ISABEL S. LABOURIAU

Definição A parametrização $X(t, u)$ de uma superfície S é *injetiva* em $\mathcal{R} \subset \mathbf{R}^3$ se para (t, u) e $(s, v) \in \mathcal{R}$

$$(t, u) \neq (s, v) \Rightarrow X(t, u) \neq X(s, v)$$

Se $S \subset \mathbf{R}^3$ for uma superfície com uma parametrização que é injetiva exceto em um número finito de curvas deriváveis então X é chamada uma *parametrização regular* de S .

Exemplo 1 - Esfera A esfera S^2 de centro na origem raio 1 é parametrizada pelas coordenadas esféricas:

$$X(\varphi, \theta) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$$

para $(\varphi, \theta) \in \mathcal{R}$

$$\mathcal{R} = \{(\varphi, \theta) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$X(1, 0) = X(1, 2\pi)$ logo X não é injetiva, mas X é uma parametrização regular da esfera.

Exemplo 2 - Parabolóide Superfície parametrizada por:

$$X(t, u) = (t, u, t^2 + u^2)$$

para $(t, u) \in \mathbf{R}^2$ X é injetiva, logo X é uma parametrização regular do parabolóide.

Produto vetorial e área A, B vetores em $\mathbf{R}^3$

$$|A \times B| = |A| |B| \sin \theta$$

$|A \times B|$ é a área do paralelogramo de vértices $(0, 0, 0), A, B, A + B$.

$X(t, u)$ parametrização regular de uma superfície S , $(t, u) \in \mathcal{R} \subset \mathbf{R}^2$.

$$N(t, u) = \frac{\partial}{\partial t} X(t, u) \times \frac{\partial}{\partial u} X(t, u)$$

é o vetor normal à superfície em um ponto regular (t, u) .

Definição A área da superfície $S \subset \mathbf{R}^3$ com parametrização regular $X(\mathcal{R})$ é

$$\text{Área} = \iint_S d\sigma = \iint_{\mathcal{R}} \left| \frac{\partial}{\partial t} X(t, u) \times \frac{\partial}{\partial u} X(t, u) \right| dt du$$

Exemplo 1 - Esfera Parametrização regular da esfera S de centro na origem raio $\rho > 0$:

$$X(\varphi, \theta) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi)$$

para $(\varphi, \theta) \in \mathcal{R} = \{(\varphi, \theta) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ Vetores tangentes a S em $X(\varphi, \theta)$:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} X(\varphi, \theta) = (\rho \cos \varphi \cos \theta, \rho \cos \varphi \sin \theta, -\rho \sin \varphi)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} X(\varphi, \theta) = (-\rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \cos \theta, 0)$$

$$\text{Normal } N(\varphi, \theta) = (\rho^2 \sin^2 \varphi \cos \theta, \rho^2 \sin^2 \varphi \sin \theta, \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi)$$

$$|N(\varphi, \theta)| = \rho^2 |\sin \varphi| = \rho^2 \sin \varphi$$

$$\text{Área} = \iint_{\mathcal{R}} |N(\varphi, \theta)| d\varphi d\theta = \rho^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 4\pi\rho^2$$

Exemplo 2 - Parabolóide $P \subset \mathbf{R}^3$ Parametrização regular: $X(t, u) = (t, u, f(t, u))$ com $f(t, u) = t^2 + u^2$, para $(t, u) \in \mathbf{R}^2$ Vetores tangentes a P em $X(t, u)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} X(t, u) = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial t}) = (1, 0, 2t)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} X(t, u) = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial u}) = (0, 1, 2u)$$

$$\text{Normal } N(t, u) = (-\frac{\partial f}{\partial t}, -\frac{\partial f}{\partial u}, 1) = (-2t, -2u, 1)$$

$$|N(t, u)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 1} = \sqrt{4t^2 + 4u^2 + 1}$$

Área para $f(t, u) \leq 2$:

$$\text{Área} = \iint_{|(t,u)| \leq \sqrt{2}} |N(t, u)| dt du = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4r^2 + 1} r dr = \frac{13\pi}{3}$$

usando

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4r^2 + 1} r dr = \frac{1}{8} \int_1^9 u^{1/2} du = \frac{1}{8} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_1^9 = \frac{13}{6}$$

Superfície S que é o gráfico de uma função $z = f(x, y)$ Parametrização regular: $X(t, u) = (t, u, f(t, u))$, para $(t, u) \in \mathbf{R}^2$ Vetores tangentes a S em $X(t, u)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} X(t, u) = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial t}) \quad \frac{\partial}{\partial u} X(t, u) = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial u})$$

Normal

$$N(t, u) = (-\frac{\partial f}{\partial t}, -\frac{\partial f}{\partial u}, 1) \quad |N(t, u)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2}$$

Área para $(t, u) \in \mathcal{R}$:

$$\text{Área} = \iint_{\mathcal{R}} |N(t, u)| dt du = \iint_{\mathcal{R}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2} dt du$$

Superfície S definida implicitamente por $g(x, y, z) = 0$ Se $\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$ então $g(x, y, f(x, y)) = 0$ com

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-\partial g / \partial x}{\partial g / \partial z} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\partial g / \partial y}{\partial g / \partial z}$$

Área para $(x, y) \in \mathcal{R}$:

$$\text{Área} = \iint_{\mathcal{R}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

ou seja

$$\text{Área} = \iint_{\mathcal{R}} \frac{\sqrt{(\partial g / \partial x)^2 + (\partial g / \partial y)^2 + (\partial g / \partial z)^2}}{|\partial g / \partial z|} dx dy$$

$X(t, u)$ parametrização regular de uma superfície S , $(t, u) \in \mathcal{R} \subset \mathbf{R}^2$. Vetor normal à superfície

$$N(t, u) = \frac{\partial}{\partial t} X(t, u) \times \frac{\partial}{\partial u} X(t, u)$$

$f(x, y, z)$ função seccionalmente contínua $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$

Definição A integral de f sobre a superfície $S \subset \mathbf{R}^3$ é

$$\iint_S f d\sigma = \iint_{\mathcal{R}} f(X(t, u)) \left| \frac{\partial}{\partial t} X(t, u) \times \frac{\partial}{\partial u} X(t, u) \right| dt du$$

Caso particular: para $f(x, y, z) \equiv 1$

$$\iint_S f d\sigma = \text{Área de } S$$

Exemplo 3 $S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y \text{ e } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y \leq 1\}$

Calcule $\iint_S \varphi d\sigma$ para $\varphi(x, y, z) = x$.

S é o gráfico de $z = f(x, y) = x^2 + y$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y \leq 1\}$

$$|N(x, y)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2 + 4x^2}$$

$$\iint_S \varphi d\sigma = \iint_{\mathcal{R}} x \sqrt{2 + 4x^2} dx dy = \int_{-1}^1 \int_0^1 x \sqrt{2 + 4x^2} dx dy$$

$$\int_0^1 x \sqrt{2 + 4x^2} dx = \frac{6^{3/2} - 2^{3/2}}{12}$$

$$\iint_S \varphi d\sigma = \frac{6^{3/2} - 2^{3/2}}{6}$$

Exemplo 3 $S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y \text{ e } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y \leq 1\}$

S é o gráfico de $z = f(x, y) = x^2 + y$

Parametrização regular: $X(x, y) = (x, y, f(x, y)) = (x, y, x^2 + y)$,

para $0 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$ Vetores tangentes a S em $X(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}X(x, y) = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}) = (1, 0, 2x) \quad \frac{\partial}{\partial y}X(x, y) = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}) = (0, 1, 1)$$

Normal

$$N(x, y) = (-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1) = (-2x, -2y, 1)$$

Outra parametrização regular: $Y(t, u) = X(u, t) = (u, t, u^2 + t)$,

para $0 \leq t \leq 1$ e $-1 \leq u \leq 1$

Normal $\tilde{N}$ que aponta para o outro lado de S :

$$\tilde{N}(t, u) = -N(u, t)$$

Definição Uma superfície $S \subset \mathbf{R}^3$ é *orientável* se a normal unitária for uma função contínua bem definida sobre todo S isto é, se estiverem bem definidos os dois lados de S .

$X(t, u)$ parametrização regular de uma superfície *orientável* S , $(t, u) \in \mathcal{R} \subset \mathbf{R}^2$ com normal:

$$N(t, u) = \frac{\partial}{\partial t}X(t, u) \times \frac{\partial}{\partial u}X(t, u)$$

Vetor *unitário* normal à superfície: $\frac{N(t, u)}{|N(t, u)|}$.

$\mathbf{n}(t, u)$ vetor *unitário* normal a S para fora $\mathbf{n}(t, u) = \pm \frac{N}{|N|}$.

$F(x, y, z)$ campo de vetores $F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$

Definição A *integral* de F sobre a superfície $S \subset \mathbf{R}^3$ é

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_{\mathcal{R}} F(X(t, u)) \cdot \mathbf{n} \left| \frac{\partial}{\partial t}X(t, u) \times \frac{\partial}{\partial u}X(t, u) \right| dt du$$

Se $N(t, u)$ apontar para fora de S então

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_{\mathcal{R}} F(X(t, u)) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t}X(t, u) \times \frac{\partial}{\partial u}X(t, u) \right) dt du$$

Exemplo 4 - Esfera de raio 1

$$X(\varphi, \theta) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$$

para $(\varphi, \theta) \in \mathcal{R} = \{(\varphi, \theta) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ Normal

$$N(\varphi, \theta) = (\sin^2 \varphi \cos \theta, \sin^2 \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \varphi) = \sin \varphi X(\varphi, \theta)$$

$F(x, y, z) = (x, y, 0)$

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_{\mathcal{R}} F(X(\varphi, \theta)) \cdot N(\varphi, \theta) d\varphi d\theta$$

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \varphi \, d\varphi \, d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

Exemplo 5 - Parabolóide P , $z = x^2 + y^2$ parametrização

$$X(x, y) = (x, y, f(x, y)) \quad f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$N(x, y) = (1, 0, 2x) \times (0, 1, 2y) = (-2x, -2y, 1)$$

é a normal que aponta para dentro de P .

Exercício Calcule a integral de $F(x, y, z) = (y, -x, z^2)$ sobre o parabolóide, para $0 \leq z \leq 1$ segundo a normal orientada para fora. $\mathcal{R} = \{(x, y) : |(x, y)| \leq 1\}$ e $F(X(x, y)) \cdot N(x, y) = (x^2 + y^2)^2$

$$\iint_P F \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = - \iint_{\mathcal{R}} F(X((x, y))) \cdot N(x, y) \, dx \, dy$$

em coordenadas polares:

$$\iint_P F \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^4 r \, dr \, d\theta = -\frac{\pi}{3}$$