

MATEMÁTICA II
RESUMO DA AULA DE 28 DE MAIO DE 2008 ROTACIONAL E
DIVERGÊNCIA

BIBLIOGRAFIA: S. LANG,
CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES, CAPÍTULO XII

ISABEL S. LABOURIAU

2-D

U aberto em $\mathbf{R}^2$ $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ $F(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$

Rotacional de F

$$\text{rot } F(x, y) = D_1 q - D_2 p = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}$$

O rotacional de um campo de vetores em $\mathbf{R}^2$ é uma função

U aberto em $\mathbf{R}^3$ $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^3$ $F(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$

Rotacional de F

$$\text{rot } F(x, y, z) = (D_2 f_3 - D_3 f_2, D_3 f_1 - D_1 f_3, D_1 f_2 - D_2 f_1)$$

$$\text{rot } F(x, y, z) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

O rotacional de um campo de vetores em $\mathbf{R}^3$ é um campo de vetores

Notação U aberto em $\mathbf{R}^3$ $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^3$ $F(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = (D_1, D_2, D_3)$$

$$\text{rot } F(x, y, z) = (D_2 f_3 - D_3 f_2, D_3 f_1 - D_1 f_3, D_1 f_2 - D_2 f_1)$$

$$\text{rot } F(x, y, z) = \nabla \times F$$

Exemplo $F(x, y, z) = (\cos xy, x + z, \sin x)$

$$\text{rot } F(x, y, z) = (-1, -\cos x, 1 + x \sin xy)$$

2-D

U aberto em $\mathbf{R}^2$ $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ $F(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$

Divergência de F

$$\operatorname{div} F(x, y) = D_1 p + D_2 q = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}$$

A divergência de um campo de vetores em $\mathbf{R}^2$ é uma função

U aberto em $\mathbf{R}^3$ $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^3$ $F(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$

Divergência de F

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = D_1 f_1 + D_2 f_2 + D_3 f_3$$

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

A divergência de um campo de vetores em $\mathbf{R}^3$ é uma função.

Notação U aberto em $\mathbf{R}^3$ $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^3$ $F(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = (D_1, D_2, D_3)$$

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = D_1 f_1 + D_2 f_2 + D_3 f_3$$

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \nabla \cdot F$$

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \nabla \times F$$

Exemplo $F(x, y, z) = (\cos xy, x + z, \sin x)$

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = -y \sin xy + 0 + 0 = -y \sin xy$$

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = (-1, -\cos x, 1 + x \sin xy)$$

2-D

Teorema 1 (da divergência). *$A \subset \mathbf{R}^2$ região delimitada por um caminho fechado C , C seccionalmente C^1 , parametrizado no sentido anti-horário, $N(t)$ normal à direita do caminho C*

$p, q : A \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe C^1 e $F(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$, então

$$\int_C F \cdot N \, dt = \iint_A \operatorname{div} F \, dy \, dx$$

Teorema 2 (de Gauss da divergência). *$A \subset \mathbf{R}^3$ região delimitada por uma superfície S , S regular, seccionalmente C^1 e orientável,*

$\mathbf{n}$ normal unitária em S para o exterior de A ,

$F(x, y, z)$, de classe C^1 , então

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_A \operatorname{div} F \, dz \, dy \, dx$$

Exemplo $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$

$A \subset \mathbf{R}^3$ cubo unitário $A = [0, 1]^3$ S superfície do cubo,

$\mathbf{n}$ normal unitária para fora

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_A \operatorname{div} F dz dy dx = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{div} F dz dy dx = 3$$

Exercício $F(x, y, z) = (x, y, z)$

$A \subset \mathbf{R}^3$ bola e S esfera, de centro na origem e raio $\rho > 0$,

$\mathbf{n}$ normal unitária para fora da bola.

Calcule

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

Resolução usando o teorema de Gauss

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = 3$$

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_A \operatorname{div} F dz dy dx = \iiint_A 3 dz dy dx$$

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n} d\sigma = 3 \text{ Volume de } A = 4\pi\rho^3$$

2-D

Teorema 3 (corolário do teorema da divergência). $U \subset \mathbf{R}^2$ aberto, $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ de classe C^1 ,

$C_r \subset U$ circunferência de centro P e raio r parametrizada no sentido anti-horário e $\mathbf{n}(t) =$ vetor unitário normal a C_r à direita, então

$$\operatorname{div} F(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r} F \cdot \mathbf{n} ds$$

Interpretação A divergência de F em P é o fluxo médio de saída de F por unidade de área e por unidade de tempo em P .

//

Teorema 4 (corolário do teorema de Gauss da divergência). $U \subset \mathbf{R}^3$ aberto, $P \in U$ e $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^3$ de classe C^1 ,

$S_r \subset \mathbf{R}^3$ bola e esfera de centro P e raio r

$\mathbf{n}$ normal unitária em S_r para o exterior, então

$$\operatorname{div} F(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi\rho^3} \iint_{S_r} F \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

Interpretação A divergência de F em P é o fluxo médio de saída de P por unidade de volume e por unidade de tempo.