

MATEMÁTICA II  
RESUMO DA AULA DE 3 DE JUNHO DE 2008 TEOREMA DE STOKES

BIBLIOGRAFIA: S. LANG,  
CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES, CAPÍTULO XII

ISABEL S. LABOURIAU

---

2-D

---

**Teorema 1** (de Green).  $A \subset \mathbf{R}^2$  região delimitada por um caminho fechado  $C$ ,  $C$  seccionalmente  $C^1$ , parametrizado no sentido anti-horário,  $p, q : A \longrightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^1$ , então

$$\int_C p \, dx + q \, dy = \iint_A \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) \, dy \, dx$$

ou seja

$$\int_C F = \iint_A \operatorname{rot} F \, dy \, dx$$

---

//

---

---

2-D

---

$U$  aberto em  $\mathbf{R}^2$   $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$   $F(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$

Rotacional de  $F$

$$\operatorname{rot} F(x, y) = D_1 q - D_2 p = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}$$

O rotacional de um campo de vetores em  $\mathbf{R}^2$  é uma função

---

//

---

$U$  aberto em  $\mathbf{R}^3$   $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^3$   $F(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$

Rotacional de  $F$

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = (D_2 f_3 - D_3 f_2, D_3 f_1 - D_1 f_3, D_1 f_2 - D_2 f_1)$$

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

O rotacional de um campo de vetores em  $\mathbf{R}^3$  é um campo de vetores

**Teorema 2** (de Stokes).  $A \subset \mathbf{R}^3$  aberto,  $F : A \longrightarrow \mathbf{R}^3$  de classe  $C^1$ ,  $S \subset A$  superfície regular, seccionalmente  $C^1$  e orientável,  $S$  delimitada por um caminho fechado  $C$ ,  $C$  seccionalmente  $C^1$ , com  $S$  à esquerda de  $C$ , então

$$\int_C F = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

Porque?

- Parametrizo  $S = X(B)$ ,  $C = X(\partial B)$ ,  $B \subset \mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ .
- $\text{rot } F \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$ .

*Exemplo 1*  $F(x, y, z) = (ye^z, xe^z, xye^z)$   
 $\text{rot } F(x, y, z) = \nabla \times F = (D_2 f_3 - D_3 f_2, D_3 f_1 - D_1 f_3, D_1 f_2 - D_2 f_1)$   
 $\text{rot } F(x, y, z) = (xe^z - xe^z, ye^z - ye^z, e^z - e^z) = (0, 0, 0)$

*Conclusão* Se  $C$  for uma curva fechada simples que delimita uma superfície regular orientável  $S$  então

$$\int_C F = 0$$

*Exemplo 2*  $\mathcal{L} \subset \mathbf{R}^3$  o cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $\mathcal{P} \subset \mathbf{R}^3$  o plano  $x + y + z = 1$ ,  
 $C = \mathcal{L} \cap \mathcal{P}$  com a projeção sobre o plano  $xy$  orientada no sentido anti-horário.  
 Calcule:

$$\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz = \int_C F \quad \text{com} \quad F(x, y, z) = (-y^3, x^3, -z^3)$$

$C$  delimita a superfície  $S = \{(x, y, z) : z = 1 - x - y \text{ e } |(x, y)| \leq 1\}$ .  
 $\text{rot } F = (0, 0, 3x^2 + 3y^2) \quad \mathbf{n} = (1, 1, 1)$

$$\int_C F = \iint_S \text{rot } F \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_{|(x,y)| \leq 1} 3x^2 + 3y^2 dy dx$$

$$\int_C F = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r^2 r dr d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

*Exemplo 3*  $S_1$  e  $S_2$  superfícies delimitadas por uma curva  $C$ , em lados opostos de  $C$ .  
 Então

$$\iint_{S_1} \text{rot } F \cdot \mathbf{n} = - \iint_{S_2} \text{rot } F \cdot \mathbf{n}.$$

*Exemplo 2*  $\mathcal{L} \subset \mathbf{R}^3$  o cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $\mathcal{P} \subset \mathbf{R}^3$  o plano  $x + y + z = 1$ ,  
 $S = \{(x, y, z) : z = 1 - x - y \text{ e } |(x, y)| \leq 1\}$ .  
 Calculamos:

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \mathbf{n} d\sigma = \frac{3\pi}{2}$$

Logo, para

$\mathcal{L}^+ \subset \mathbf{R}^3$  parte do cilindro  $\mathcal{L}$  com  $z \geq 1 - x - y$  e  
 $\mathcal{L}^- \subset \mathbf{R}^3$  parte do cilindro  $\mathcal{L}$  com  $z \leq 1 - x - y$

$$\iint_{\mathcal{L}^+} \text{rot } F \cdot \mathbf{n} d\sigma = -\frac{3\pi}{2} \quad \text{e} \quad \iint_{\mathcal{L}^-} \text{rot } F \cdot \mathbf{n} d\sigma = \frac{3\pi}{2}$$

*Exemplo 4*  $S^+$  hemisfério  $|(x, y, z)| = 1, z \geq 0$   
 $S^-$  hemisfério  $|(x, y, z)| = 1, z \leq 0$ ,  
 $S^+$  e  $S^-$  delimitadas pela curva  $C$   $z = 0, x^2 + y^2 = 1$ ,  
 $S^+$  e  $S^-$  em lados opostos de  $C$ ,  
 $B$  bola  $|(x, y, z)| \leq 1$ ,  $S$  esfera  $|(x, y, z)| = 1$ .

Teorema de Gauss:

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_B \text{div } \text{rot } F \, dx \, dy \, dz$$

Teorema de Stokes:

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{S^+} \text{rot } F \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \iint_{S^-} \text{rot } F \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_C F - \int_C F = 0$$

mas..

*Exercício*

$$\text{div}(\text{rot } F) = 0$$

**Teorema 3** (corolário do teorema de Stokes).  $U \subset \mathbf{R}^3$  aberto,  $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^3$  de classe  $C^1$ ,  
 $S \subset U$  superfície regular, seccionalmente  $C^1$  e orientável,  $P \in S$   
 $C_r \subset \mathbf{R}^3$  intersecção da esfera de centro  $P$  e raio  $r$  com  $S$ ,  
que delimita uma superfície de área  $A(r)$ ,  
 $\mathbf{n}$  = vetor unitário normal a  $S$  em  $P$ , então

$$\text{rot } F(P) \cdot \mathbf{n} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{A(r)} \int_{C_r} F$$

*Interpretação* O rotacional de  $F$  em  $P$  é a rotação média de  $F$  por unidade de área em torno de  $P$ .