

Matemática II — 2008 — exame — Duração 3h
RESPONDA ÀS PERGUNTAS NA PRÓPRIA FOLHA — Use o verso como rascunho

NOME: Gabarito_____

Primeira parte (10 valores) — Para cada uma das perguntas desta parte marque com um X apenas uma alternativa, a que considere mais correcta e completa. **Para estas perguntas, três respostas erradas anulam uma resposta correcta.** Todas as perguntas desta parte têm o mesmo valor.

1) A reta tangente à curva $C(t) = (\sin(t), \cos^3(t))$ no ponto $C(0)$ é dada por:

- ☐ $y = 3x + 1.$
- ☐ $y = x/3 + 1.$
- ☐ $y = 1.$ **certa**
- ☐ $x = 1.$

2) Seja $\varphi(x, y) = x^2y^2 + x^3y^2 + x^2 - 2y$. Então:

- ☐ $(0, 0)$ é ponto de máximo de φ .
- ☐ $(0, 0)$ é ponto de mínimo de φ .
- ☐ $(0, 0)$ é ponto crítico de φ , mas não é mínimo nem máximo.
- ☐ $(0, 0)$ não é ponto crítico de φ . **certa**

3) Seja $\psi(x, y) = x^2 - y^2$. Se a curva $C : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ estiver contida numa curva de nível da função ψ , pode-se concluir que:

- ☐ $\nabla\psi(C(t))$ é tangente à curva C em todos os pontos de C .
- ☐ $\nabla\psi(C(t)) = 0$ para todo $t \in \mathbf{R}$.
- ☐ $\nabla\psi(C(t))$ é constante para todo $t \in \mathbf{R}$.
- ☐ $\nabla\psi(C(t))$ é perpendicular à velocidade da curva C em todos os pontos de C . **certa**

4) Se a derivada direcional $D_A f(1, 1, 1)$ na direção $A = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ for igual a 2, então a derivada direcional $D_B f(1, 1, 1)$ na direção $B = (0, -1, -\sqrt{3})$ é igual a:

- ☐ -2 **certa**
- ☐ -1
- ☐ 1.
- ☐ 2.

5) Seja $\varphi(x, y) = y \sin(x)$ e $\Omega = \{(x, y) : x \in [-1, 1] \text{ e } |x| \leq y \leq 1\}$. Então $\iint_{\Omega} \varphi(x, y) dy dx$ vale:

- ☐ 0 **certa**
☐ -1
☐ 1
☐ Nenhuma das alternativas acima está correta.

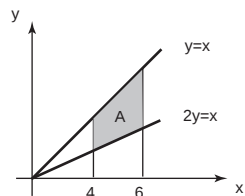
6) Considere os dois arcos da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1, que vão do ponto $(-1, 0)$ ao ponto $(1, 0)$. Se C_1 for o arco que passa por $(0, 1)$ e C_{-1} o arco que passa por $(0, -1)$ então, para

$$E = \int_{C_{-1}} G - \int_{C_1} G \quad \text{com} \quad G(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

tem-se:

- ☐ $E = -2\pi$ ☐ $E = -\pi$ ☐ $E = 0$ ☐ $E = \pi$ ☐ $E = 2\pi$ **certa**

7) Para a região A indicada na figura $\iint_A x^2 \sin xy$ vale:



- ☐ $\int_4^6 \int_{x/2}^x x^2 \sin xy dy dx$ **certa** ☐ $\int_{2y}^y \int_2^6 x^2 \sin xy dy dx$ ☐ $\int_{x/2}^x \int_4^6 x^2 \sin xy dx dy$ ☐ $\int_2^6 \int_{2y}^y x^2 \sin xy dx dy$

8) Seja B o disco no plano com centro em $(1/2, 0)$ e raio $1/2$. Então $\iint_B e^{x+y}$ vale: **certa** $\int_0^\pi \int_0^{\cos \theta} r e^{r(\cos \theta + \sin \theta)} dr d\theta$

- ☐ $\int_0^\pi \int_0^{\sin \theta} e^{r(\cos \theta + \sin \theta)} dr d\theta$ ☐ $\int_0^\pi \int_0^{\sin \theta} r e^{r(\cos \theta + \sin \theta)} dr d\theta$ ☐ $\int_0^\pi \int_0^{\sin \theta} r^2 \sin \theta e^{r(\cos \theta + \sin \theta)} dr d\theta$
☐ $\int_0^\pi \int_0^{\cos \theta} e^{r(\cos \theta + \sin \theta)} dr d\theta$ ☐ $\int_0^\pi \int_0^{\cos \theta} r e^{r(\cos \theta + \sin \theta)} dr d\theta$ ☐ $\int_0^\pi \int_0^{\cos \theta} r^2 \sin \theta e^{r(\cos \theta + \sin \theta)} dr d\theta$

9) A integral repetida

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{9-y^2} dy dx = \text{certa} = \int_0^3 (9-y^2) dy$$

vale o mesmo que

- ☐ $\int_0^3 (9-y^2) dx$ ☐ $\left(\int_0^3 1 dx \right) \left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{9-y^2} dy \right)$
☐ $\int_0^3 (9-y^2) dy$ ☐ $\left(\int_0^3 \sqrt{9-y^2} dx \right) \left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{9-y^2} dy \right)$

- 10) A integral de $F(x, y) = (x^2y, \sin xy)$ ao longo da elipse $4x^2 + y^2 = 4$ parametrizada no sentido anti-horário vale o mesmo que:

$$\begin{aligned} \square \text{ certa } \int_{-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{-2\sqrt{1-x^2}} (2xy - x \cos xy) dy dx & \quad \square \int_{-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{-2\sqrt{1-x^2}} (x \cos xy - 2xy) dy dx \\ \square \int_{-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{-2\sqrt{1-x^2}} (x^2 - y \cos xy) dy dx & \quad \square \int_{-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{-2\sqrt{1-x^2}} (y \cos xy - x^2) dy dx \end{aligned}$$

- 11) O plano tangente à superfície parametrizada por $X(t, \theta) = (t \cos \theta, t^2 + 1, t \sin \theta)$ no ponto $X(0, \pi) = (0, 0, 0)$:

- ☐ é perpendicular ao vetor $(0, 1, 0)$.
☐ é paralelo ao plano xz .
☐ contém o vetor $(2, 1, 0)$.
☐ a superfície não tem plano tangente neste ponto. **certa**

Segunda parte (10 valores) —Todas as perguntas desta parte têm o mesmo valor.

- 12) Para a função $\varphi(x, y) = xe^y + y^2$ calcule $\int_C (\nabla \varphi)$ para uma curva $C : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ de classe C^1 tal que $C(0) = (0, 0)$ e $C(1) = (\pi, 0)$.

$$\int_C \nabla \varphi = \int_0^1 \nabla \varphi(C(t)) \cdot C'(t) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} (\varphi(C(t))) dt = \varphi(C(1)) - \varphi(C(0)) = \pi$$

- 13) Escreva a expressão em coordenadas cilíndricas da integral tripla que determina o volume delimitado pelo hiperbolóide de revolução de uma folha $z^2 + 1 - x^2 - y^2 = 0$ e pelos planos $z = 1$ e $z = 2$.

$$\text{volume} = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{\sqrt{1+z^2}} r dr dz d\theta$$

- 14) Encontre o valor mínimo de $f(x, y) = x + y^2$ na elipse $\{(x, y) : (x - 1)^2 + 3y^2 = 1\}$ e o(s) ponto(s) em que o mínimo é atingido.

Usando multiplicadores de Lagrange, a elipse é dada por $g(x, y) = 0$ onde:

$$g(x, y) = (x - 1)^2 + 3y^2 - 1 \quad \nabla g(x, y) = (2(x - 1), 6y) \quad \nabla f(x, y) = (1, 2y)$$

Os pontos de mínimo de f na elipse satisfazem $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ para algum $\lambda \in \mathbf{R}$. Os pontos que satisfazem esta equação são da forma $(x, 0)$ ou $(5/2, y)$. Destes, os únicos que estão na elipse são os pontos $(0, 0)$ e $(2, 0)$. Como $f(0, 0) = 0$ e $f(2, 0) = 2$, o ponto de mínimo é $(0, 0)$ e o valor mínimo de f na elipse é zero.

Para as perguntas 15 e 16, veja a resolução do segundo teste.

- 15) Use uma integral tripla para calcular o volume da parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ com $z \leq 0$ que fica acima do plano $z = -2$.
 16) Seja $F(x, y, z) = (x + e^{yz}, \sin xz, x + y + z)$.

16.1) Calcule a divergência e o rotacional de F .

16.2) Calcule a integral de F sobre a superfície que delimita o cubo $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : |x| \leq 2, |y| \leq 2, |z| \leq 2\}$.