

GABARITO

Primeira parte (10 valores) — Para cada uma das perguntas desta parte marque com um X apenas uma alternativa, a que considere mais correcta e completa. **Para estas perguntas, três respostas erradas anulam uma resposta correcta.** Todas as perguntas desta parte têm o mesmo valor.

1) Seja $C(t)$ a curva $C(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbf{R}$. Então:

- ☐ $C(t)$ não tem pontos regulares.
- ☐ $C(0)$ não é um ponto regular da curva. **certa**
- ☐ uma parametrização da reta tangente à curva $C(t)$ no ponto $C(0)$ é dada por $A(s) = (2 + s, 2 - s)$, $s \in \mathbf{R}$.
- ☐ uma parametrização da reta tangente à curva $C(t)$ no ponto $C(0)$ é dada por $A(s) = (2s, 3s^2)$, $s \in \mathbf{R}$.

2) A curva dada em coordenadas polares (ρ, θ) por $r = \sin \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$ representa

- ☐ um segmento de reta horizontal.
- ☐ um segmento de reta vertical.
- ☐ uma circunferência com centro em $(1/2, 0)$.
- ☐ uma circunferência com centro em $(0, 1/2)$. **certa**

3) Quais das expressões a seguir definem funções harmônicas?

- ☐ $f(x, y) = x^3y - xy^3$
- ☐ $g(x, y) = x^3 - 3xy^2$
- ☐ Ambas. **certa**
- ☐ Nenhuma.

4) Qual dos pontos abaixo está no plano tangente em $(\sqrt{\pi}/3, -\sqrt{\pi}/3, \sqrt{\pi}/3)$ à superfície $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \cos(x^2 + y^2 + z^2) = 1/2\}$? **pergunta anulada, nenhuma alternativa certa.**

- ☐ $(1, 1, 1)$
- ☐ $(1, -1, 0)$
- ☐ $(1, 1, 0)$
- ☐ $(1, -1, 1)$

5) Seja $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ uma função derivável com derivada contínua com $\nabla f(1, 1) = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Então pode-se concluir que:

- ☐ A curva de nível de f que passa por $(1, 1)$ é tangente à reta $(1 + t\sqrt{3}, 1 - t\sqrt{2})$.
- ☐ A função $g(x) = f(x, 1)$ é crescente em $x = 1$.
- ☐ Ambas as afirmações acima estão corretas. **certa**
- ☐ Nenhuma das alternativas acima está correta.

6) Seja $\varphi(x, y) = 5$, $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in [-3, 3], -x^2 \leq y \leq 0\}$ e $V = \iint_{\Omega} \varphi(x, y)$. Então:

- ☐ $V = 2 \int_{-3}^0 \left(\int_{-x^2}^0 \varphi(x, y) dy \right) dx$. **certa**
- ☐ $V = \int_{-\sqrt{3}}^0 \left(\int_{-3}^{-\sqrt{-y}} \varphi(x, y) dx \right) dy + \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{\sqrt{-y}}^3 \varphi(x, y) dx \right) dy$.
- ☐ Ambas as afirmações acima estão corretas.
- ☐ Nenhuma das alternativas acima está correta.

7) Sejam $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ uma função infinitamente derivável, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e

$$F(x, y) = \left(\frac{g'(r)}{r} x, \frac{g'(r)}{r} y \right) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

- ☐ Então $\frac{\partial f_1}{\partial y} \equiv \frac{\partial f_2}{\partial x}$.
- ☐ Então a integral de F entre dois pontos não depende do caminho, desde que este não passe pela origem.
- ☐ Ambas as afirmações acima estão corretas. **certa**
- ☐ Nenhuma das alternativas acima está correta.

8) A integral repetida

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-y^2} dy dx$$

vale o mesmo que

- ☐ $\int_0^2 (4-y^2) dy$ **certa**
- ☐ $\left(\int_0^2 \sqrt{4-y^2} dx \right) \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-y^2} dy \right)$
- ☐ $\int_0^2 (4-y^2) dx$
- ☐ $\left(\int_0^2 1 dx \right) \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-y^2} dy \right)$

9) Sejam $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $\varphi : A \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x, y) = \cos x + \sin^2 y$. Então:

- ☐ O máximo de φ em A é atingido no interior de A .
- ☐ O máximo de φ em A é atingido na fronteira de A . **certa**
- ☐ O máximo de φ em A não é atingido em A .
- ☐ A função φ não tem máximo em A .

10) O plano tangente à superfície parametrizada por $X(t, \theta) = (t \cos \theta, e^t, \theta)$ no ponto $X(0, \pi) = (0, 1, \pi)$:

- ☐ é perpendicular ao vetor $(1, 1, 0)$. **certa**
- ☐ é paralelo ao plano $ex + y = 0$.
- ☐ contém o vetor $(2, 1, 0)$.
- ☐ a superfície não tem plano tangente neste ponto.

- 11) Se $X_m = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ for o centro de massa da região delimitada pelo cone $3(x^2 + y^2) = z^2$ com $z \geq 0$ e pela esfera de centro na origem e raio 1, com densidade $f(x, y, z) = z$ então:

☐ $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi d\rho d\varphi d\theta = \bar{z} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 \rho^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$
☐ $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 \rho^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \bar{z} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi d\rho d\varphi d\theta$ **certa**
☐ $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 \rho^4 \cos^2 \varphi d\rho d\varphi d\theta = \bar{z} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 \rho^3 \cos \varphi d\rho d\varphi d\theta$
☐ $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 \rho^3 \cos \varphi d\rho d\varphi d\theta = \bar{z} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 \rho^4 \cos^2 \varphi d\rho d\varphi d\theta$

Segunda parte (10 valores) —Todas as perguntas desta parte têm o mesmo valor.

- 12) Escreva a expressão em coordenadas cilíndricas da integral tripla que determina o volume delimitado pelo hiperbolóide $z^2 - 1 - x^2 - y^2 = 0$ e pelo plano $z = -2$.

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{-2}^{-\sqrt{1+r^2}} r dz \right) dr \right) d\theta$$

- 13) Encontre o valor máximo de $f(x, y, z) = x - y + z$ na esfera $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ e o(s) ponto(s) em que o máximo é atingido.

Multiplicadores de Lagrange para $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$

$$\nabla f(x, y, z) = (1, -1, 1) \quad \nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

Os candidatos a pontos de máximo são solução de:

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y = z \quad \text{e} \quad x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ou seja são os pontos $\pm P$ com $P = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$. Como $f(P) = 2\sqrt{3}$ e $f(-P) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ então o valor máximo é $2\sqrt{3}$, atingido em P .

- 14) Calcule a massa da parte da região delimitada pelo cone $z^2 = x^2 + y^2$ com $z \leq 0$ que fica dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com densidade $f(x, y, z) = -z$.

Em coordenadas cilíndricas

$$\text{massa} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{4-r^2}}^{-r} -zr dz dr d\theta = 2\pi$$

Em coordenadas esféricas

$$\text{massa} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{3\pi/4}^{\pi} -\rho^3 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d\rho d\theta = 2\pi$$

15) Seja C o caminho que delimita o triângulo T de perímetro $3\sqrt{2}$ e de área $\sqrt{3}/2$, formado pelos três segmentos de reta que ligam os pontos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ orientado neste sentido.

15.1) Parametrize a superfície T .

$$X(t, s) = (t(1-s), s, (1-s)(1-t)) \quad t \in [0, 1] \quad s \in [0, 1]$$

outra parametrização

$$X(t, s) = (t, s, 1-t-s) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad 0 \leq s \leq 1-t$$

15.2) Encontre a normal unitária $\mathbf{n}$ à superfície T em cada um dos seus pontos.

A superfície está contida no plano que passa pelos 3 pontos dados, e que é perpendicular a $(1, 1, 1) = N$.

A normal unitária é $\mathbf{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$. Esta é a normal para a segunda parametrização

15.3) Parametrize o caminho C .

O caminho é dado por três segmentos de reta:

$$C_1(t) = (t, 0, 1-t) \quad C_2(t) = (1-t, t, 0) \quad C_3(t) = (0, 1-t, t) \quad t \in [0, 1]$$

16) Considere o caminho C do exercício 15) que delimita o triângulo T de perímetro $3\sqrt{2}$ e de área $\sqrt{3}/2$, formado pelos três segmentos de reta que ligam os pontos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ orientado no sentido anti-horário e $\mathbf{n}$ a normal unitária à superfície T . Para $F(x, y, z) = (y, z, x)$ calcule

16.1) $\text{div } F(x, y, z)$ e $\text{rot } F(x, y, z)$.

$$\text{div } F(x, y, z) = 0 \quad \text{rot } F(x, y, z) = (-1, -1, -1)$$

16.2) $\int_C F dC$.

Pelo Teorema de Stokes, $\int_C F dC = \iint_T \text{rot } F \cdot \mathbf{n} d\sigma$, logo basta resolver o próximo exercício.

16.3) $\iint_T \text{rot } F \cdot \mathbf{n} d\sigma$.

$$\iint_T \text{rot } F \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_T (-1, -1, -1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) d\sigma = -\sqrt{3} \iint_T 1 d\sigma = -\sqrt{3} \text{ área de } T = -\frac{3}{2}$$

Matemática II — 2008 — exame — época de recurso — Duração 3h
RESPONDA ÀS PERGUNTAS NA PRÓPRIA FOLHA — Use o verso como rascunho

GABARITO

Primeira parte (10 valores) — Para cada uma das perguntas desta parte marque com um X apenas uma alternativa, a que considere mais correcta e completa. **Para estas perguntas, três respostas erradas anulam uma resposta correcta.** Todas as perguntas desta parte têm o mesmo valor.

1) Seja $C(t)$ a curva $C(t) = (2e^t, 2e^{-t})$, $t \in \mathbf{R}$. Então:

- ☐ $C(t)$ não tem pontos regulares.
- ☐ $C(0)$ não é um ponto regular da curva.
- ☐ uma parametrização da reta tangente à curva $C(t)$ no ponto $C(0)$ é dada por $A(s) = (2 + s, 2 - s)$, $s \in \mathbf{R}$. **certa**
- ☐ uma parametrização da reta tangente à curva $C(t)$ no ponto $C(0)$ é dada por $A(s) = (2s, 3s^2)$, $s \in \mathbf{R}$.

2) A curva dada em coordenadas polares (ρ, θ) por $r = \cos \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$ representa

- ☐ um segmento de reta horizontal.
- ☐ um segmento de reta vertical.
- ☐ uma circunferência com centro em $(1/2, 0)$. **certa**
- ☐ uma circunferência com centro em $(0, 1/2)$.

3) Quais das expressões a seguir definem funções harmônicas?

- ☐ $f(x, y) = x^3 - xy^2$
- ☐ $g(x, y) = x^3 - 3xy^2$ **certa**
- ☐ Ambas.
- ☐ Nenhuma.

4) Qual dos pontos abaixo está no plano tangente em $(\sqrt{\pi}/3, \sqrt{\pi}/3, \sqrt{\pi}/3)$ à superfície $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \cos(x^2 + y^2 + z^2) = 1/2\}$? **pergunta anulada, nenhuma alternativa certa.**

- ☐ $(1, 1, 1)$
- ☐ $(1, -1, 0)$
- ☐ $(1, 1, 0)$
- ☐ $(1, -1, 1)$

5) Seja $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ uma função derivável com derivada contínua com $\nabla f(1, 1) = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Então pode-se concluir que:

- ☐ A curva de nível de f que passa por $(1, 1)$ é tangente à reta $(t + 3, 0)$.
- ☐ A função $g(x) = f(x, 1)$ é crescente em $x = 1$. **certa**
- ☐ Ambas as afirmações acima estão corretas.
- ☐ Nenhuma das alternativas acima está correta. **certa**

6) Seja $\varphi(x, y) = 5x$, $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in [-3, 3], -x^2 \leq y \leq 0\}$ e $V = \iint_{\Omega} \varphi(x, y)$. Então:

- ☐ $V = 2 \int_{-3}^0 \left(\int_{-x^2}^0 \varphi(x, y) dy \right) dx.$
- ☐ $V = \int_{-\sqrt{3}}^0 \left(\int_{-3}^{-\sqrt{-y}} \varphi(x, y) dx \right) dy + \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{\sqrt{-y}}^3 \varphi(x, y) dx \right) dy.$
- ☐ Ambas as afirmações acima estão corretas. **certa**
- ☐ Nenhuma das alternativas acima está correta.

7) Sejam $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ uma função infinitamente derivável, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e

$$F(x, y) = \left(\frac{g'(r)}{r} x, \frac{g'(r)}{r} y \right) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

- ☐ Então a integral de F sobre a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1 é igual a zero.
- ☐ Então $\frac{\partial f_1}{\partial y} \equiv \frac{\partial f_2}{\partial x}.$
- ☐ Ambas as afirmações acima estão corretas.
- ☐ Nenhuma das alternativas acima está correta.

8) A integral repetida

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-y^2} dy dx$$

vale o mesmo que

- ☐ $\int_0^2 (4-y^2) dy$ **certa**
- ☐ $\left(\int_0^2 \sqrt{4-y^2} dx \right) \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-y^2} dy \right)$
- ☐ $\int_0^2 (4-y^2) dx$
- ☐ $\left(\int_0^2 1 dx \right) \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-y^2} dy \right)$

9) Sejam $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $\varphi : A \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x, y) = \cos x - \sin^2 y$. Então:

- ☐ O máximo de φ em A é atingido no interior de A . **certa**
- ☐ O máximo de φ em A é atingido na fronteira de A .
- ☐ O máximo de φ em A não é atingido em A .
- ☐ A função φ não tem máximo em A .

10) O plano tangente à superfície parametrizada por $X(t, \theta) = (t \cos \theta, e^t, \theta)$ no ponto $X(1, \pi) = (-1, e, \pi)$:

- ☐ é perpendicular ao vetor $(1, 1, 0)$.
- ☐ é paralelo ao plano $ex + y = 0$.
- ☐ contém o vetor $(2, 1, 0)$.
- ☐ a superfície não tem plano tangente neste ponto. **certa**

- 11) Se $X_m = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ for o centro de massa da região delimitada pelo cone $3(x^2 + y^2) = z^2$ com $z \geq 0$ e pela esfera de centro na origem e raio 1, com densidade $f(x, y, z) = z$ então:

☐ $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi d\rho d\varphi d\theta = \bar{z} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 \rho^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$
☐ $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 \rho^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \bar{z} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi d\rho d\varphi d\theta$ **certa**
☐ $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 \rho^4 \cos^2 \varphi d\rho d\varphi d\theta = \bar{z} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 \rho^3 \cos \varphi d\rho d\varphi d\theta$
☐ $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 \rho^3 \cos \varphi d\rho d\varphi d\theta = \bar{z} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 \rho^4 \cos^2 \varphi d\rho d\varphi d\theta$

Segunda parte (10 valores) —Todas as perguntas desta parte têm o mesmo valor.

- 12) Escreva a expressão em coordenadas cilíndricas da integral tripla que determina o volume delimitado pelo hiperbolóide $z^2 - 1 - x^2 - y^2 = 0$ e pelo plano $z = 2$.

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{\sqrt{1+r^2}}^2 r dz \right) dr \right) d\theta$$

- 13) Encontre o valor máximo de $f(x, y, z) = x - y + z$ na esfera $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$ e o(s) ponto(s) em que o máximo é atingido.

Multiplicadores de Lagrange para $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2$

$$\nabla f(x, y, z) = (1, -1, 1) \quad \nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

Os candidatos a pontos de máximo são solução de:

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y = z \quad \text{e} \quad x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

ou seja são os pontos $\pm P$ com $P = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$. Como $f(P) = \sqrt{6}$ e $f(-P) = -\sqrt{6}$ então o valor máximo é $\sqrt{6}$, atingido em P .

- 14) Calcule a massa da parte da região delimitada pelo cone $z^2 = x^2 + y^2$ com $z \geq 0$ que fica dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com densidade $f(x, y, z) = z$.

Em coordenadas cilíndricas

$$\text{massa} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{4-r^2}} z r dz dr d\theta = 2\pi$$

Em coordenadas esféricas

$$\text{massa} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\pi/4} z \rho^2 \cos \varphi df f d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\pi/4} \rho^3 \cos \varphi \sin \varphi df f d\rho d\theta = 2\pi$$

- 15) As perguntas restantes eram iguais em todos os exames.