

MATEMÁTICA II 2008

FOLHA DE EXERCÍCIOS 1

CURVAS, COMPRIMENTO CURVAS DE NÍVEL, DERIVADAS PARCIAIS

(1) Novas funções

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

- (a) Calcule as derivadas de $\sinh t$ e de $\cosh t$.
- (b) Verifique que $\sinh t$ é uma função ímpar e que $\cosh t$ é uma função par. ($f(t)$ é ímpar se $f(-t) = -f(t)$, e é par se $f(-t) = f(t)$).
- (c) Faça o gráfico de $\sinh t$ e de $\cosh t$, $t \in \mathbf{R}$.
- (d) Calcule $\cosh^2 t - \sinh^2 t$ e simplifique. Calcule também $\cosh^2 t + \sinh^2 t$.
- (e) Represente o lugar geométrico de $X_1(t) = (\cosh t, \sinh t)$ para $t \in \mathbf{R}$ (é uma curva conhecida).
- (f) Calcule a velocidade, a rapidez e o vetor aceleração de $X_1(t)$.

(2) Curvas e velocidade

- (a) Calcule a velocidade, a rapidez e o vetor das curvas:
 - (i) $(e^t, \cos t, \sin t)$
 - (ii) $(\sin 2t, \ln(1+t), t)$
 - (iii) $(\cos t, \sin t)$
 - (iv) $(\cos 3t, \sin 3t)$
- (b) Para as curvas de (2(a)iii) e (2(a)iv) mostre que o vetor velocidade é perpendicular ao vetor posição da curva e que o vetor aceleração tem o sentido contrário ao da curva. Será isto verdade para os dois primeiros exercícios?
- (c) Sejam A e B dois vetores constantes. Calcule a velocidade de $X(t) = A + Bt$.
- (d) Seja $X(t)$ uma curva derivável. Um plano ou uma reta perpendicular a $X'(t)$ é dito *normal* à curva no ponto $X(t)$ (ou no ponto t). Encontre a equação de uma reta normal às curvas dos exercícios (2(a)iii) e (2(a)iv) em $t = \pi/3$.
- (e) Encontre a equação de um plano normal à curva (e^t, t, t^2) em $t = 1$. Mesmo exercício para $t = 0$.
- (f) Mostre que se A e B são dois vetores constantes e diferentes de zero e se $X(t) = e^{2t}A + e^{-2t}B$ então $X''(t)$ tem a mesma direção que $X(t)$.

(3) Comprimento de arco

- (a) Calcule o comprimento das hélices:
 - (i) $(\cos t, \sin t, t)$ entre $t = 0$ e $t = 1$.
 - (ii) $(\cos 2t, \sin 2t, 3t)$ entre $t = 1$ e $t = 3$.
 - (iii) $(\cos 4t, \sin 4t, t)$ entre $t = 0$ e $t = \pi/8$.

(b) Calcule o comprimento das curvas:

(i) (t, t^2) entre $t = 0$ e $t = 1$. Dica: lembre-se do exercício 1.

(ii) $(t, 2t, t^2)$ entre $t = 1$ e $t = 3$. Dica: 3(b)ii) Quando chegar a $\int \sqrt{1+u^2} du$ tente a substituição $u = \cosh t$ para completar o quadrado do radicando.

(iii) $(e^{3t}, e^{-3t}, 3\sqrt{2}t)$ entre $t = 0$ e $t = 1/3$. Dica: calcule o quadrado de $e^{3t} + e^{-3t}$, para simplificar $\sqrt{e^{6t} + e^{-6t} + 2}$.

(4) Esboce as curvas de nível das funções $\varphi(x, y)$ dadas pelas expressões abaixo e calcule as suas derivadas parciais $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$:

a) $x^2 + 2y^2$ b) $y - x^2$ c) $y - 3x^2$ d) $3x^2 + 3y^2$ e) xy f) $(x-1)(y-3)$

g) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}$ h) $2x-3y$ i) $\sqrt{x^2+y^2}$ j) x^2-y^2 k) y^2-x^2 l) $(x-5)^2 - (y+3)^2$

(5) Para cada uma das funções $\psi(x, y, z)$ dadas pelas expressões abaixo, calcule as derivadas parciais $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial z}$.

a) $xy+z$ b) x^2y^5+1 c) $\cos(xy)$ d) $\sin(xyz)$ e) e^{xyz} f) xyz g) $x^2 \sin(yz)$

(6) Calcule $\nabla \psi(P)$ no ponto $P = (1, 2, 3)$ para ψ das alíneas a), b), e) do exercício 5.

(7) Calcule $\nabla \psi(P)$ no ponto $P = (1, \pi, \pi)$ para ψ das alíneas c), d), g) do exercício 5.