

MATEMÁTICA II 2008

FOLHA DE EXERCÍCIOS 2

DERIVADAS PARCIAIS, GRADIENTE, FUNÇÕES COMPOSTAS

- (1) Calcule as derivadas parciais de segunda ordem das funções $\varphi(x, y)$ dadas pelas expressões abaixo e verifique em cada caso que $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$:

a) e^{xy} b) $\sin(xy)$ c) $x^2 + y^2 + 3xy$ d) $2xy + y^2$ e) $e^{x^2+y^2}$ f) $\sin(x^2 + y)$
g) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}$ h) $2x - 3y$ i) $\sqrt{x^2 + y^2}$ j) $\arctan(x^2 - 2xy)$ k) $\cosh(x+y)$ l) e^{x+2y}

- (2) Para cada uma das funções $\psi(x, y, z)$ dadas pelas expressões abaixo, calcule

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right).$$

a) $xy+z$ b) xyz c) x^2yz d) $\sin(xyz)$ e) e^{xyz} f) $\sinh(x+y+z)$ g) $x^2 \sin(yz)$

- (3) Diz-se que uma função de três variáveis $\psi(x, y, z)$ satisfaz a *equação de Laplace* se

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0.$$

Verifique quais das funções abaixo satisfazem a equação de Laplace:

a) $x^2 + y^2 - 2z^2$ b) xyz c) $e^{3x+4y} \cos(5z)$

- (4) Seja $\phi(x, y, z)$ tal que $\nabla \phi(1, 1, 1) = (5, 2, 1)$. Para $C(t) = (t^2, t^{-3}, t)$ calcule $\left. \frac{d}{dt} \phi(C(t)) \right|_{t=1}$.

- (5) Sejam $\varphi(x, y) = e^{9x+2y}$ e $\psi(x, y) = \sin(4x+y)$ e $C(t)$ uma curva tal que $C(0) = (0, 0)$. Calcule $C'(0)$ sabendo que

$$\left. \frac{d}{dt} \varphi(C(t)) \right|_{t=0} = 2 \quad \left. \frac{d}{dt} \psi(C(t)) \right|_{t=0} = 1.$$

- (6) (a) Sejam P um vetor constante, f uma função derivável e $g(t) = f(tP)$. Calcule $g'(t)$.
(b) Seja f uma função derivável definida em todo o espaço e que satisfaça $f(tP) = tf(P)$ para todos os números $t \in \mathbf{R}$ e para todos os pontos P . Mostre que para todo P tem-se

$$f(P) = \nabla f(0) \cdot P.$$

- (7) Encontre a equação do plano tangente e a da reta normal a cada uma das superfícies abaixo nos pontos indicados.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ em $(6, 2, 3)$ b) $xy + yz + xz - 1 = 0$ em $(1, 1, 0)$

c) $x^2 + xy^2 + y^3 + z + 1 = 0$ em $(2, -3, 4)$ d) $2y - z^3 - 3xz = 0$ em $(1, 7, 2)$

- (8) Sejam $f(x, y, z) = z - e^x \sin y$ e $P = (\ln 3, 3\pi/2, -3)$. Encontre:

(a) $\nabla f(P)$,

(b) a reta por P normal à superfície de nível de f que passa por P ,

(c) o plano tangente a esta superfície no ponto P .

- (9) Obtenha a equação paramétrica da reta tangente à curva em que se intersectam as superfícies abaixo nos pontos indicados:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ e $x^2 + y^2 = 13$ em $(3, 2, -6)$

(b) $xy + z = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ em $(2, 1, -2)$

Dica: a reta tangente é a intersecção dos dois planos tangentes.

- (10) Obtenha a equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto P para cada uma das funções abaixo:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $P = (3, 4, 25)$

(b) $f(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$ e $P = (3, -4, \frac{3}{5})$.