

MATEMÁTICA II 2008
FOLHA DE EXERCÍCIOS 3
DERIVADAS PARCIAIS E GRADIENTE

- (1) Seja $f(x, y, z) = z - e^x \sin y$ e $P = (\ln 3, 3\pi/2, -3)$. Calcule
- a derivada direcional de f em P na direção de $(1, 2, 2)$,
 - os valores máximo e o mínimo da derivada direcional de f em P .
- (2) Calcule a derivada direcional das funções abaixo, nos pontos e direções indicados:
- $\ln(x^2 + y^2)^{1/2}$ em $P = (1, 1)$ na direção de $(2, 1)$
 - $xy + yz + zx$ em $P = (-1, 1, 7)$ na direção de $(3, 4, -12)$
 - $4x^2 + 9y^2$ em $P = (2, 1)$ na direção de máximo da derivada direcional.
- (3) Para a distribuição de temperatura em um plano dada por

$$f(x, y) = 10 + 6 \cos x \cos y + 3 \cos 2x + 4 \cos 3y$$

encontre as direções em que o crescimento da temperatura é máximo e mínimo no ponto $(\pi/3, \pi/3)$.

- (4) Para a distribuição de temperatura no espaço dada por

$$f(x, y, z) = (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2$$

encontre as direções em que o crescimento da temperatura é máximo e mínimo no ponto $(2, -1, 2)$. Calcule a derivada direcional de f neste ponto e nesta direção.

- (5) Sejam f uma função derivável em um aberto U e P um ponto de U .
- Se A for um vetor unitário na direção de $\nabla f(P)$ e com sentido oposto ao de $\nabla f(P)$, quanto vale a derivada direcional de f em P na direção de A ?
 - Se P for um ponto de máximo de f em U , ou seja, $f(X) \leq f(P)$ para todo $X \in U$, mostre que $\nabla f(P) = 0$.
- (6) Para g uma função de $r = |(x, y, z)|$ e $f(x, y, z) = g(r)$, mostre que

$$\left(\frac{dg}{dr}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$$

- (7) Para $r = |(x, y, z)|$ e $f(x, y, z) = g(r)$, calcule $\nabla f(X)$ para cada uma das funções g abaixo:

$$a) g(r) = 1/r \quad b) g(r) = r^2 \quad c) g(r) = 1/r^3 \quad d) g(r) = e^{-r^2}$$

$$e) g(r) = \ln 1/r \quad f) g(r) = 4/r^m \quad g) g(r) = \cos r$$

- (8) Verifique que as funções abaixo são harmônicas:

$$(a) f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \ln r$$

$$(b) f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{r}.$$

- (9) (a) Para $f(x, y) = g(r)$ com $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ verifique que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr}.$$

(b) Para $f(x, y) = e^{-r^2}$ verifique que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4f(x, y)(r^2 - 1).$$

(c) Para $f(x, y, z) = g(r)$ com $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ verifique que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dg}{dr}.$$

(10) Encontre todos os pontos críticos (e guarde seus resultados!) de:

- a) $x^2 + 4xy - y^2 - 8x - 6y$ b) $x + y \sin x$ c) $x^2 + y^2 + z^2$ d) $(x + y)e^{-xy}$ f) $xy + xz$
g) $x^4 + y^2$ h) $(x - y)^4$ i) $x \sin y$ j) $x^2 + 2y^2 - x$ k) $e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}$ l) $e^{(x^2 + y^2 + z^2)}$

(11) Encontre o valor mínimo de cada uma das funções do exercício 10 e encontre todos os pontos em que o valor da função é este mínimo.

MINI-PROJETO

CONDIÇÕES PARA QUE UMA FUNÇÃO SÓ DEPENDA DA DISTÂNCIA À ORIGEM

Seja S a esfera centrada na origem de raio 1. Demonstre as afirmações abaixo.

- A) Para A e B dois vetores unitários, com $A \cdot B = 0$ é sempre verdade que a curva $F(t) = (\cos t)A + (\sin t)B$ está contida em S . Dica: calcule $F(t) \cdot F(t)$.
- B) Suponha que dois pontos distintos P e Q pertençam a S e considere a curva $L(t) = P + t(Q - P)$ com $0 \leq t \leq 1$. Se existir um $t \in [0, 1]$ tal que $L(t) = 0$ então $t = 1/2$ e $P = -Q$.
- C) Suponha que dois pontos distintos P e Q pertençam a S com $P \neq -Q$. Encontre uma curva $C(t)$ contida em S ligando P a Q (ou seja, $C(t) \cdot C(t) = 1$ e $C(t_1) = P$, $C(t_2) = Q$). Dica: divida $L(t)$ do exercício B pela sua norma.
- D) Suponha que Q seja um vetor unitário seja $P = -Q$. Encontre uma curva $C(t)$ contida em S ligando P a Q . Dica: h sempre algum vetor unitário perpendicular a Q . Use o exercício A.
- E) Suponha que uma certa função derivável $f(x, y)$ satisfaça $\nabla f(x, y) = c(x, y)$ em todos os pontos $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ com $c \in \mathbf{R}$ uma constante. Então f é constante na circunferência de centro na origem em raio $a > 0$. Dica: calcule a derivada de $f(a \cos t, a \sin t)$.
- F) Se f for uma função derivável de n variáveis e se existir uma função h tal que $\nabla f(X) = h(X)X$ então f é constante na esfera de centro na origem em raio $a > 0$. Dica: calcule a derivada de $f(C(t))$ onde C é a curva do exercício C ou do exercício D.
- G) Se g for uma função derivável de uma variável cuja derivada nunca vale zero e se $f(X) = g(r)$ com $r = |X|$ então se $\nabla f(X)$ é paralelo a X para todo $X \neq 0$. Dica: paralelo a X quer dizer que é um múltiplo de X por um escalar diferente de zero. Como o escalar pode variar com X isto quer dizer que $\nabla f(X) = h(X)X$.

Terminou os exercícios A a G? Parabéns, voce acaba de provar:

Teorema 1. Uma função derivável $f(X)$ só depende da distância de X à origem se e somente se $\nabla f(X)$ é paralelo a X sempre que $\nabla f(X) \neq 0$.