

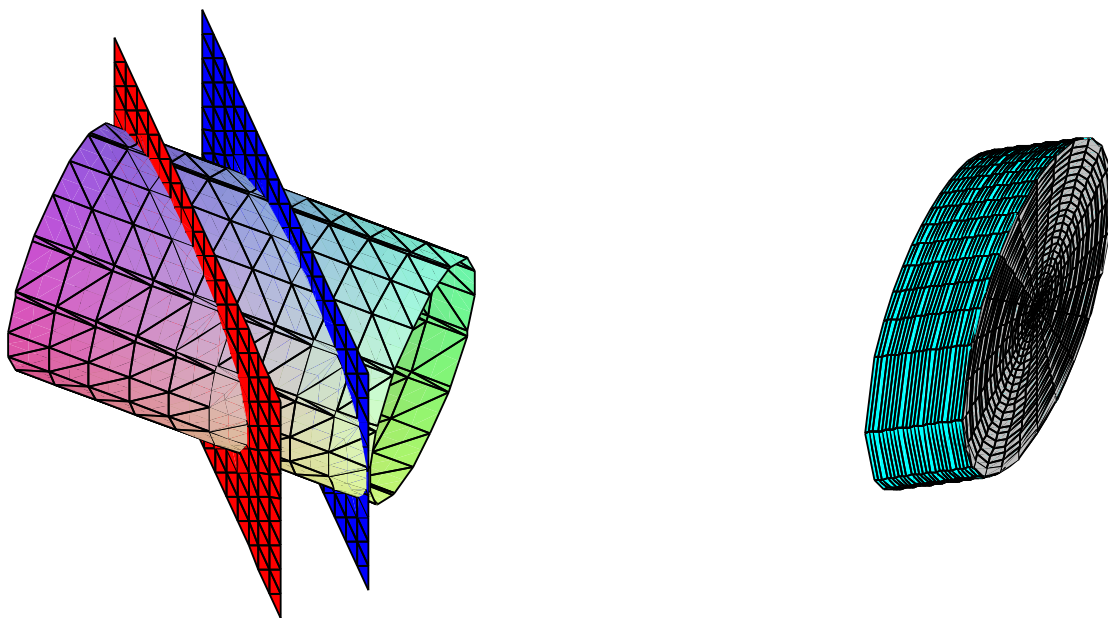
MATEMÁTICA II — SEGUNDO TESTE SURPRESA
27 DE MAIO DE 2008 — DURAÇÃO 30 MINUTOS

Seja $\bar{X} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ o centro de massa da região Ω delimitada por:

$$x^2 + z^2 - 4 = 0 \quad x - y + 1 = 0 \quad x - y - 1 = 0$$

com densidade uniforme igual a 1.

Use integrais triplas para calcular o volume da região e a primeira coordenada do seu centro de massa.



Resolução: (três métodos diferentes de resolver e duas maneiras de calcular as integrais)

Parametrização da região:

$$\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + z^2 \leq 4 \text{ e } x - 1 \leq y \leq x + 1\}$$

ou em coordenadas cilíndricas (r, θ, y) com $G(r, \theta, y) = (r \cos \theta, y, r \sin \theta)$:

$$\Omega^* = \{(r, \theta, y) : 0 \leq r \leq 2 \text{ e } r \cos \theta - 1 \leq y \leq r \cos \theta + 1 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Para calcular $\bar{x}$ usamos:

$$M_{x=\bar{x}} = 0 \quad \text{e} \quad M_{x=\bar{x}} = M_{x=0} + \bar{x} \text{Volume}.$$

Pode-se calcular $M_{x=0}$ e o volume separadamente e resolver em ordem a $\bar{x}$ ou calcular $M_{x=\bar{x}}$ e obter os dados daí.

Cálculos em coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}
 M_{x=\bar{x}} &= \iiint_{\Omega} (x - \bar{x}) \, dz \, dy \, dx = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x-1}^{x+1} (x - \bar{x}) \, dy \, dx \, dz \\
 &\quad \int_{x-1}^{x+1} (x - \bar{x}) \, dy = (x - \bar{x}) \int_{x-1}^{x+1} dy = 2(x - \bar{x}) \\
 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x-1}^{x+1} (x - \bar{x}) \, dy \, dx &= \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 2(x - \bar{x}) \, dx = x^2 - 2\bar{x}x \Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} = 4\bar{x}\sqrt{4-x^2} \\
 M_{x=\bar{x}} &= \bar{x} \, 4 \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} \, dx = 8\pi\bar{x}
 \end{aligned}$$

para o último cálculo reconhecemos $2 \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} \, dx$ como a área do disco de raio 2.

Cálculos em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}
 M_{x=\bar{x}} &= \iiint_{\Omega} (x - \bar{x}) \, dz \, dy \, dx = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r \cos \theta - 1}^{r \cos \theta + 1} (r \cos \theta - \bar{x}) r \, dy \, dr \, d\theta \\
 \int_{r \cos \theta - 1}^{r \cos \theta + 1} (r \cos \theta - \bar{x}) r \, dy &= (r \cos \theta - \bar{x}) r \int_{r \cos \theta - 1}^{r \cos \theta + 1} dy = (r \cos \theta - \bar{x}) r [y]_{r \cos \theta - 1}^{r \cos \theta + 1} = 2(r \cos \theta - \bar{x}) r \\
 M_{x=\bar{x}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 2(r \cos \theta - \bar{x}) r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 2r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^2 2r\bar{x} \, dr \, d\theta = \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta \int_0^2 2r^2 \, dr - \int_0^{2\pi} d\theta \, \bar{x} \int_0^2 2r \, dr = 8\pi\bar{x}
 \end{aligned}$$

Conclusão: $M_{x=\bar{x}} = 8\pi\bar{x} = 0$ se e só se $\bar{x} = 0$.

Como $M_{x=\bar{x}} = M_{x=0} + \bar{x}\text{Volume}$ então o volume é o coeficiente de $\bar{x}$, ou seja, o volume é 8π e $M_{x=0} = 0$.

Para obter o volume e o momento $M_{x=0}$ separadamente, as integrais envolvidas são semelhantes e podem ser calculadas da mesma maneira.

3º método

Sem integrais triplas é fácil ver que a região tem o mesmo volume que um cilindro de altura 2 (distância entre os planos) e base de raio 2. Por simetria, $\bar{x} = 0$. Isto serve para verificar os cálculos.