

Matemática II — 2008 — Teste — Duração 2h  
RESPONDA ÀS PERGUNTAS NA PRÓPRIA FOLHA — Use o verso como rascunho

NOME: Gabarito \_\_\_\_\_

**Primeira parte (11 valores)** — Para cada uma das perguntas desta parte marque com um X apenas uma alternativa, a que considere mais correcta e completa. **Para estas perguntas, três respostas erradas anulam uma resposta correcta.** Todas as perguntas desta parte têm o mesmo valor.

1. A expressão paramétrica da reta tangente à curva  $C(t) = (t, \cos t, \cos t) = (x, y, z)$  no ponto  $C(\pi)$  é
  - ☐  $(\pi + t, -t, -1)$
  - ☐  $(1, -\sin t, -\sin t)$
  - ☐  $(t, 0, 0)$
  - ☐  $(\pi + t, -1, -1)$  **certa**
2. A curva  $C(t) = (x(t), y(t), z(t))$  para  $t \in [0, 1]$  tem rapidez diferente de zero e a distância percorrida entre  $C(0)$  e  $C(1)$  é 1. Então para a curva  $D(s) = \frac{1}{2}(x(2s), y(2s), z(2s))$  a distância percorrida entre  $D(0)$  e  $D(1/2)$  é:
  - ☐  $1/2$ . **certa**
  - ☐ 1.
  - ☐ 2.
  - ☐ Nenhuma das alternativas acima está correta.
3. Quais das expressões a seguir definem funções harmônicas?
  - ☐  $f(x, y) = 3x + 5y$
  - ☐  $g(x, y) = x^3 - 3xy^2$
  - ☐ Ambas. **certa**
  - ☐ Nenhuma.
4. Se a derivada direcional  $D_A f(1, 1, 1)$  na direção  $A = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  é igual a 2, então a derivada direcional  $D_B f(1, 1, 1)$  na direção  $B = (0, 1, \sqrt{3})$  é igual a:
  - ☐ 1.
  - ☐ 2. **certa**
  - ☐ 4.
  - ☐  $\sqrt{3}$ .
5. A curva derivável  $C : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $C(t) = (x(t), y(t))$  satisfaz  $C'(0) = (x'(0), y'(0)) \neq (0, 0)$  e  $C(0) = (1, 3)$ . Sabendo que para uma certa função derivável  $f(x, y)$  tem-se  $f(C(t)) = 4$  para todo  $t$  e que  $\nabla f(1, 3) = (1, 0)$  então pode-se garantir que
  - ☐  $x'(0) = 0$ . **certa**
  - ☐  $y'(0) = 0$ .
  - ☐  $x'(0) \neq 0$ .
  - ☐ Tanto  $x'(0)$  como  $y'(0)$  podem ser diferentes de zero.

6. O plano tangente em  $(0, 0, \sqrt{\pi}/2)$  a  $\{(x, y, z) : \sin(x^2 + y^2 + z^2) = \sqrt{2}/2\}$
- ☐ É perpendicular à reta  $(0, 0, t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ . **certa**
  - ☐ É perpendicular à reta  $(t, t, t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .
  - ☐ É perpendicular à reta  $(t, 0, 0)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .
  - ☐ É perpendicular à reta  $(0, t, t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .
7. Sejam  $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  e  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}$  dada por  $\varphi(x, y) = \cos x - \sin^2 y$ . Então:
- ☐ A origem é ponto de máximo de  $\varphi$  em  $U$ . **certa**
  - ☐ A origem é ponto de mínimo de  $\varphi$  em  $U$ .
  - ☐ A origem é ponto crítico de  $\varphi$  mas não é máximo nem mínimo de  $\varphi$  em  $U$ .
  - ☐ A origem não é ponto crítico de  $\varphi$ .
8. Dadas duas funções deriváveis  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$ , com  $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ , se  $(x_0, y_0)$  for ponto de máximo de  $f$  no conjunto  $A = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$  então
- ☐  $\nabla g(x_0, y_0)$  é perpendicular a  $\nabla f(x_0, y_0)$ .
  - ☐  $\nabla g(x_0, y_0)$  é paralelo a  $\nabla f(x_0, y_0)$ . **certa**
  - ☐  $\nabla f(x_0, y_0)$  é tangente ao conjunto  $A$  em  $(x_0, y_0)$ .
  - ☐  $\nabla f(x_0, y_0)$  pertence ao conjunto  $A$  em  $(x_0, y_0)$ .
9. A curva derivável  $C : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$  liga o ponto  $C(-\pi) = (1, 0)$  ao ponto  $C(\pi) = (-1, 1)$  e a curva  $D : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$  é dada por  $D(t) = C(-t)$ . Sabendo que para um certo campo  $F(x, y)$  tem-se  $\int_C F = \pi$  então
- ☐  $\int_D F = \pi$
  - ☐  $\int_D F = 1$
  - ☐  $\int_D F = 0$
  - ☐  $\int_D F = -1$
  - ☐  $\int_D F = -\pi$  **certa**
10. Considere o campo  $F(x, y) = e^{r^2}(x, y)$  com  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  e as curvas  $C(t) = (-t, 1 - t)$ ,  $t \in [0, 1]$  e  $D(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\theta \in [\pi/2, \pi]$ . Então:
- ☐  $\int_C F > \int_D F$ .
  - ☐  $\int_C F = \int_D F$ . **certa**
  - ☐  $\int_C F < \int_D F$ .
11. Dadas  $f, g : \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$  deriváveis, e  $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  com  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$  pode-se concluir que:
- ☐ Existe uma função  $\varphi(x, y)$  tal que  $F(x, y) = \nabla \varphi(x, y)$ .
  - ☐ A integral de  $F$  sobre a circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio 1 é igual a zero.
  - ☐ Ambas as afirmações acima estão corretas.
  - ☐ Nenhuma das alternativas acima está correta. **certa**

**Segunda parte (9 valores)** —Todas as perguntas desta parte têm o mesmo valor.

12. A curva parmetrizada por  $C(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$  com  $t \in [0, 2\pi]$  é conhecida como astróide. Calcule a distância percorrida sobre o astróide entre  $C(0)$  e  $C(\pi/4)$ .

*Resposta*

A distância é  $D = \int_0^{\pi/4} |C'(t)| dt = \frac{3}{4}$ .

Cálculos:

$$\begin{aligned} C'(t) &= (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t) \\ |C'(t)|^2 &= 9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t = 9\cos^2 t \sin^2 t \\ |C'(t)| &= 3\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} = 3|\cos t \sin t| \\ D &= \int_0^{\pi/4} |C'(t)| dt = 3 \int_0^{\pi/4} |\cos t \sin t| dt \end{aligned}$$

Para  $0 \leq t \leq \pi/4$  tem-se  $\sin t \geq 0$  e  $\cos t \geq 0$  logo  $|\cos t \sin t| = \cos t \sin t$ , logo

$$D = 3 \int_0^{\pi/4} \cos t \sin t dt = \frac{3}{2} \sin t \Big|_0^{\pi/4} = \frac{3}{4}$$

---

*Outro teste* Calcule a distância percorrida sobre o astróide entre  $C(0)$  e  $C(\pi/6)$ .

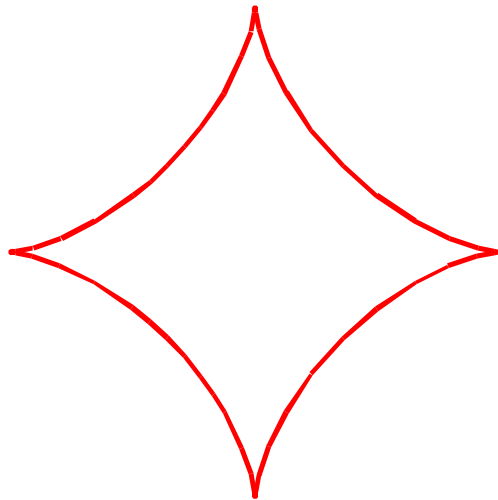
*Resposta*

Como acima,

$$D = 3 \int_0^{\pi/6} \cos t \sin t dt = \frac{3}{2} \sin t \Big|_0^{\pi/6} = \frac{3}{8}$$

---

**Atenção** Escrever  $\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} = \cos t \sin t$  é mesmo um erro. Tente calcular a distância entre  $C(0)$  e  $C(\pi)$  (metade do desenho abaixo) para ver porque.



13. Encontre o valor mínimo (ou máximo) de  $f(x, y) = x + y$  na circunferência  $\{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$ .

*Resposta*

Este exercício está resolvido no livro texto.

14. Calcule a integral de  $F(x, y) = (x(x^2 + y^2), y(x^2 + y^2))$  sobre o arco de parábola  $y = -\sqrt{x}$  que vai de  $(0, 0)$  a  $(1, -1)$ .

*Resposta 1:*

Parametrização do arco de parábola:  $C(t) = (t^2, -t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

$$C'(t) = (2t, -1)$$

$$F(C(t)) = (t^2(t^4 + t^2), -t(t^4 + t^2)) \quad F(C(t)) \cdot C'(t) = 2t^3(t^4 + t^2) + t(t^4 + t^2) = 2t^7 + 3t^5 + t^3$$

$$\int_C F = \int_0^1 (2t^7 + 3t^5 + t^3) dt = \left. \frac{2}{8}t^8 + \frac{3}{6}t^6 + \frac{1}{4}t^4 \right|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

---

*Outro teste* Calcule a integral de  $F(x, y) = (x(x^2 + y^2), y(x^2 + y^2))$  sobre o arco de parábola  $y = \sqrt{x}$  que vai de  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$ .

*Resposta 2:* Outra maneira de resolver:

$F = \nabla\psi$  com  $\psi(x, y) = r^4/4$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  ou seja  $\psi(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2$ . Logo a integral não depende do caminho, só do ponto inicial e do final e vale:

$$\int_C F = \psi(1, 1) - \psi(0, 0) = \frac{2^2}{4} - 0 = 1$$

NOME: Gabarito \_\_\_\_\_

**Primeira parte (11 valores)** — Para cada uma das perguntas desta parte marque com um X apenas uma alternativa, a que considere mais correcta e completa. **Para estas perguntas, três respostas erradas anulam uma resposta correcta.** Todas as perguntas desta parte têm o mesmo valor.

1. A expressão paramétrica da reta tangente à curva  $C(t) = (t, \sin t, \cos t) = (x, y, z)$  no ponto  $C(\pi)$  é
  - ☐  $(\pi + t, -t, -1)$  **certa**
  - ☐  $(1, \cos t, -\sin t)$
  - ☐  $(t, 0, 0)$
  - ☐  $(\pi + t, -1, -1)$
2. A curva  $C(t) = (x(t), y(t), z(t))$  para  $t \in [0, 1]$  tem rapidez diferente de zero e a distância percorrida entre  $C(0)$  e  $C(1)$  é 1. Então para a curva  $D(s) = 2(x(2s), y(2s), z(2s))$  a distância percorrida entre  $D(0)$  e  $D(1/2)$  é:
  - ☐  $1/2$ .
  - ☐ 1.
  - ☐ 2. **certa**
  - ☐ Nenhuma das alternativas acima está correta.
3. Quais das expressões a seguir definem funções harmônicas?
  - ☐  $f(x, y) = 3x + 5y$  **certa**
  - ☐  $g(x, y) = x^3 + 3xy^2$
  - ☐ Ambas.
  - ☐ Nenhuma.
4. Se a derivada direcional  $D_A f(1, 1, 1)$  na direção  $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$  é igual a 1, então a derivada direcional  $D_B f(1, 1, 1)$  na direção  $B = (1, \sqrt{3}, 0)$  é igual a:
  - ☐ 1. **certa**
  - ☐ 2.
  - ☐ 4.
  - ☐  $\sqrt{3}$ .
5. A curva derivável  $C : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $C(t) = (x(t), y(t))$  satisfaz  $C'(0) = (x'(0), y'(0)) \neq (0, 0)$  e  $C(0) = (1, 3)$ . Sabendo que para uma certa função derivável  $f(x, y)$  tem-se  $f(C(t)) = 4$  para todo  $t$  e que  $\nabla f(1, 3) = (0, 1)$  então pode-se garantir que
  - ☐  $x'(0) = 0$ .
  - ☐  $y'(0) = 0$ . **certa**
  - ☐  $y'(0) \neq 0$ .
  - ☐ Tanto  $x'(0)$  como  $y'(0)$  podem ser diferentes de zero.

6. O plano tangente em  $(\sqrt{\pi}/2, 0, 0)$  a  $\{(x, y, z) : \sin(x^2 + y^2 + z^2) = \sqrt{2}/2\}$
- ☐ É perpendicular à reta  $(0, 0, t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .
  - ☐ É perpendicular à reta  $(t, t, t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .
  - ☐ É perpendicular à reta  $(t, 0, 0)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ . **certa**
  - ☐ É perpendicular à reta  $(0, t, t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .
7. Sejam  $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  e  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}$  dada por  $\varphi(x, y) = -\cos x + \sin^2 y$ . Então:
- ☐ A origem é ponto de máximo de  $\varphi$  em  $U$ .
  - ☐ A origem é ponto de mínimo de  $\varphi$  em  $U$ . **certa**
  - ☐ A origem é ponto crítico de  $\varphi$  mas não é máximo nem mínimo de  $\varphi$  em  $U$ .
  - ☐ A origem não é ponto crítico de  $\varphi$ .
8. Dadas duas funções deriváveis  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$ , com  $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ , se  $(x_0, y_0)$  for ponto de máximo de  $f$  no conjunto  $A = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$  então
- ☐  $\nabla g(x_0, y_0)$  é perpendicular a  $\nabla f(x_0, y_0)$ .
  - ☐  $\nabla g(x_0, y_0)$  é paralelo a  $\nabla f(x_0, y_0)$ . **certa**
  - ☐  $\nabla f(x_0, y_0)$  é tangente ao conjunto  $A$  em  $(x_0, y_0)$ .
  - ☐  $\nabla f(x_0, y_0)$  pertence ao conjunto  $A$  em  $(x_0, y_0)$ .
9. A curva derivável  $C : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$  liga o ponto  $C(-1) = (\pi, 0)$  ao ponto  $C(1) = (-\pi, \pi)$  e a curva  $D : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$  é dada por  $D(t) = C(-t)$ . Sabendo que para um certo campo  $F(x, y)$  tem-se  $\int_C F = 1$  então
- ☐  $\int_D F = \pi$
  - ☐  $\int_D F = 1$
  - ☐  $\int_D F = 0$
  - ☐  $\int_D F = -1$  **certa**
  - ☐  $\int_D F = -\pi$
10. Considere o campo  $F(x, y) = e^{r^2}(x, y)$  com  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  e as curvas  $C(t) = (-t, 1 - t)$ ,  $t \in [0, 1]$  e  $D(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\theta \in [\pi/2, \pi]$ . Então:
- ☐  $\int_C F > \int_D F$ .
  - ☐  $\int_C F = \int_D F$ . **certa**
  - ☐  $\int_C F < \int_D F$ .
11. Dadas  $f, g : [-2, 2] \times [-3, 3] \rightarrow \mathbf{R}$  deriváveis, e  $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  com  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$  pode-se concluir que:
- ☐ Existe uma função  $\varphi(x, y)$  tal que  $F(x, y) = \nabla \varphi(x, y)$ .
  - ☐ A integral de  $F$  sobre a circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio 1 é igual a zero.
  - ☐ Ambas as afirmações acima estão corretas. **certa**
  - ☐ Nenhuma das alternativas acima está correta.