

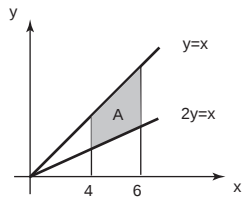
NOME: Gabarito_____

Primeira parte (6 valores) — Para cada uma das perguntas desta parte marque com um X apenas uma alternativa, a que considere mais correcta e completa. **Para estas perguntas, três respostas erradas anulam uma resposta correcta.** Todas as perguntas desta parte têm o mesmo valor.

1) Seja $\varphi(x, y) = y \sin(x)$ e $\Omega = \{(x, y) : x \in [-1, 1] \text{ e } |x| \leq y \leq 1\}$. Então $\iint_{\Omega} \varphi(x, y) dy dx$ vale:

- ☐ 0 **certa**
☐ 1
☐ -1
☐ Nenhuma das alternativas acima está correcta.

2) Para a região A indicada na figura $\iint_A x^2 \sin xy$ vale:



- ☐ $\int_2^6 \int_{2y}^y x^2 \sin xy dx dy$ ☐ $\int_4^6 \int_{x/2}^x x^2 \sin xy dy dx$ ☐ $\int_{2y}^y \int_2^6 x^2 \sin xy dy dx$ ☐ $\int_{x/2}^x \int_4^6 x^2 \sin xy dx dy$
☒ $\int_4^6 \int_{x/2}^x x^2 \sin xy dy dx$ **certa**

3) Seja B o disco no plano com centro em $(0, 1/2)$ e raio $1/2$. Então $\iint_B e^{x+y}$ vale: **certa** $\int_0^\pi \int_0^{\sin \theta} r e^{r(\cos \theta + \sin \theta)} dr d\theta$

- ☐ $\int_0^\pi \int_0^{\sin \theta} e^{r(\cos \theta + \sin \theta)} dr d\theta$ ☐ $\int_0^\pi \int_0^{\sin \theta} r e^{r(\cos \theta + \sin \theta)} dr d\theta$ ☐ $\int_0^\pi \int_0^{\sin \theta} r^2 \sin \theta e^{r(\cos \theta + \sin \theta)} dr d\theta$
☐ $\int_0^\pi \int_0^{\cos \theta} e^{r(\cos \theta + \sin \theta)} dr d\theta$ ☐ $\int_0^\pi \int_0^{\cos \theta} r e^{r(\cos \theta + \sin \theta)} dr d\theta$ ☐ $\int_0^\pi \int_0^{\cos \theta} r^2 \sin \theta e^{r(\cos \theta + \sin \theta)} dr d\theta$

4) A integral repetida

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{9-y^2} dy dx = \text{certa} = \int_0^3 (9-y^2) dy$$

vale o mesmo que

- ☐ $\int_0^3 (9-y^2) dy$ ☐ $\left(\int_0^3 \sqrt{9-y^2} dx \right) \left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{9-y^2} dy \right)$
☐ $\int_0^3 (9-y^2) dx$ ☐ $\left(\int_0^3 1 dx \right) \left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{9-y^2} dy \right)$

- 5) Considere os dois arcos da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1 que vão do ponto $(-1, 0)$ ao ponto $(1, 0)$. Designando por C_1 o arco que passa por $(0, 1)$ e por C_{-1} o arco que passa por $(0, -1)$ e para

$$E = \int_{C_1} G - \int_{C_{-1}} G = \text{certa} = -2\pi \quad \text{com} \quad G(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

tem-se:

$$\square \quad E = -2\pi \quad \square \quad E = -\pi \quad \square \quad E = 0 \quad \square \quad E = \pi \quad \square \quad E = 2\pi$$

- 6) A integral de $F(x, y) = (\sin xy, x^2 y)$ ao longo da elipse $4x^2 + y^2 = 4$ parametrizada no sentido anti-horário vale o mesmo que:

$$\begin{aligned} \square \quad \text{certa} \quad \int_{-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{-2\sqrt{1-x^2}} (2xy - x \cos xy) dy dx & \quad \square \quad \int_{-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{-2\sqrt{1-x^2}} (x \cos xy - 2xy) dy dx \\ \square \quad \int_{-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{-2\sqrt{1-x^2}} (x^2 - y \cos xy) dy dx & \quad \square \quad \int_{-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{-2\sqrt{1-x^2}} (y \cos xy - x^2) dy dx \end{aligned}$$

- 7) O plano tangente à superfície parametrizada por $X(t, \theta) = (t \cos \theta, t^2 + 1, t \sin \theta)$ no ponto $X(1, \pi) = (-1, 2, 0)$:

- ☐ contém o vetor $(0, 1, 0)$.
☐ é paralelo ao plano xz .
☐ é perpendicular ao vetor $(2, 1, 0)$. **certa**
☐ a superfície não tem plano tangente neste ponto.

Segunda parte (14 valores) —Todas as perguntas desta parte têm o mesmo valor.

- 8) Escreva a expressão em coordenadas cilíndricas da integral tripla que determina o volume delimitado pelo hiperbolóide de revolução de uma folha $z^2 + 1 - x^2 - y^2 = 0$ e pela esfera de centro na origem e raio 1.

A esfera está toda dentro do hiperbolóide, o volume é o volume da esfera. Em coordenadas cilíndricas:

$$\text{volume} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{+\sqrt{1-z^2}} r dr dz d\theta$$

- 9) Seja $X_m = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ o centro de massa da região delimitada pelo cone $3(x^2 + y^2) = z^2$ com $z \geq 0$ e pela esfera de centro na origem e raio 1 com densidade $f(x, y, z) = z$. Calcule $\bar{z}$.

Sugestão: para algumas formas de resolver o problema pode ajudar saber que a geratriz deste cone faz um ângulo $\pi/6$ com o eixo dos zz .

em coordenadas esféricas

$$\text{massa} = \mu = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi/6} \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta \cdot \int_0^1 \rho^3 d\rho \cdot \int_0^{\pi/6} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{\pi}{16}$$

$$M_{z=0} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi/6} \rho^4 \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta \cdot \int_0^1 \rho^4 d\rho \cdot \int_0^{\pi/6} \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{2\pi}{15} \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right)$$

em coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned}\text{massa} = \mu &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{1-r^2}} f^*(x, y, z) r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{1-r^2}} z r \, dz \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{16} \\ M_{z=0} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{1-r^2}} z f^*(x, y, z) r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{1-r^2}} z^2 r \, dz \, dr \, d\theta = \frac{2\pi}{15} \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right)\end{aligned}$$

Em qualquer dos casos

$$\bar{z} = \frac{M_{z=0}}{\mu}$$

- 10) Use uma integral tripla para calcular o volume da parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ com $z \leq 0$ que fica acima do plano $z = -2$.

em coordenadas cilíndricas

$$\text{volume} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{-2}^{-r} r \, dz \, dr \, d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

em coordenadas esféricas

$$\text{volume} = \int_0^{2\pi} \int_{3\pi/4}^{\pi} \int_0^{2/\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

- 11) Seja $F(x, y, z) = (x + e^{yz}, \sin xz, x + y + z)$.

11.1) Calcule a divergência e o rotacional de F .

$$\operatorname{div} F = 2 \quad \operatorname{rot} F = (1 - x \cos xz, ye^{yz} - 1, z \cos xz - ze^{yz})$$

11.2) Calcule a integral de F sobre a superfície que delimita o cubo $\mathbf{C} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : |x| \leq 2, |y| \leq 2, |z| \leq 2\}$.

S = superfície do cubo $\mathbf{n}$ = normal unitária apontando para fora de S . Pelo teorema da divergência:

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_C \operatorname{div} F \, dV = \iiint_C 2 \, dV = 2 \text{ volume do cubo} = 128$$