

Estabilidade de Pontos de Equilíbrio
notas de aula — Análise Linear

I.S.Labouriau

1992/93

Índice

1	Conjugação de equações diferenciais	2
1.1	conjugação linear	3
1.2	conjugação diferenciável	4
1.3	conjugação topológica	5
2	Operadores hiperbólicos	11
2.1	subespaços invariantes	11
2.2	conjugação topológica	12
2.3	aproximação por operadores hiperbólicos	13
3	Estabilidade	15
3.1	estabilidade segundo Liapunov	15
3.2	estabilidade assintótica	17
4	Operadores não hiperbólicos	19
4.1	operadores lineares nilpotentes	19
4.2	operadores com autovalores imaginários puros	20
4.2.1	geometria da circunferência	20
4.2.2	geometria do toro $\mathbf{T}^2$	21
4.2.3	toros invariantes	24

Capítulo 1

Conjugação de equações diferenciais

Os diferentes tipos de diagramas de fase no plano que estudamos tinham nomes: nó, foco, sela, centro, nó degenerado. Estes nomes davam a idéia de uma classificação dos campos de vetores conforme o tipo de diagrama. Para tornar esta classificação rigorosa e para estendê-la aos campos de vetores lineares em $\mathbf{R}^n$ devemos definir o que são dois diagramas de fase do mesmo tipo. Duas equações diferenciais terão o mesmo tipo de diagrama se conseguirmos transformar as trajetórias de uma delas nas trajetórias da outra.

Definição 1.1 *Duas equações diferenciais:*

$$\dot{x} = v(x) \quad \text{e} \quad \dot{x} = w(x) \quad (1.1)$$

com fluxos

$$\varphi_v(t, p) \quad \varphi_w(t, p) \quad (1.2)$$

são **conjugadas** (ou equivalentes) se e só se existir uma bijeção $h : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$, chamada **conjugação** ou *mudança de coordenadas*, tal que, para todo $t \in \mathbf{R}$ e para todo $p \in \mathbf{R}^n$:

$$h(\varphi_v(t, p)) = \varphi_w(t, h(p)) \quad (1.3)$$

Dizemos também neste caso que os campos de vetores v e w e os seus diagramas de fase são conjugados.

A conjugação é realmente uma relação de equivalência:

1. Para mostrar que a relação é reflexiva basta tomar h como a aplicação identidade.
2. Se $h : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ for uma conjugação entre $\dot{x} = v(x)$ e $\dot{x} = w(x)$, então h^{-1} é uma bijeção que transforma o fluxo φ_w no fluxo φ_v e a relação é simétrica.
3. Para mostrar que a relação é transitiva, suponha que $h(\varphi_u(t, p)) = \varphi_v(t, h(p))$ e que $\tilde{h}(\varphi_v(t, p)) = \varphi_w(t, \tilde{h}(p))$. Então $\tilde{h} \circ h$ é uma bijeção, que transforma o fluxo de u no fluxo de w .

Se $\dot{x} = v(x)$ e $\dot{x} = w(x)$ forem conjugadas por h então usando a relação (1.3) concluímos que h transforma pontos de equilíbrio de $\dot{x} = v(x)$ em pontos de equilíbrio de $\dot{x} = w(x)$. Se $t \mapsto \varphi_v(t, p)$ é uma aplicação periódica então $t \mapsto \varphi_w(t, h(p))$ também é periódica, com exatamente o mesmo período. Para campos de vetores lineares no plano, podemos concluir que dois centros serão conjugados se e só se tiverem exatamente os mesmos autovalores e que um centro não pode ser conjugado a nenhum outro tipo de diagrama de fase.

A situação é diferente quando tentamos decidir se dois operadores lineares diagonalizáveis S e T em $\mathbf{R}^2$, são conjugados, supondo que 0 não seja autovalor de nenhum deles. Devemos tentar construir uma bijeção $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ transformando o fluxo de S no fluxo de T . Começamos por exigir que $h(0) = 0$, já que a origem é o único ponto de equilíbrio nos dois casos. Como os operadores são diagonalizáveis, existem bases de autovetores de S e de T , que denotamos por $\{b_1, b_2\}$ e $\{v_1, v_2\}$ respectivamente. Se tomarmos $h(b_1) = v_1$ então a trajetória de $\dot{x} = Sx$ passando por b_1 deve ser transformada por h na trajetória de $\dot{x} = Tx$ passando por v_1 (faça um desenho!), isto é, $h(e^{\alpha_1 t} b_1) = e^{\beta_1 t} v_1$, onde α_1 e β_1 são os autovalores de S e de T associados a b_1 e a v_1 , respectivamente. Repetimos a construção para a outra metade do eixo v_1 , definindo $h(-e^{\alpha_1 t} b_1) = -e^{\beta_1 t} v_1$ e para o autoespaço gerado por v_2 tomando $h(e^{\alpha_2 t} b_2) = e^{\beta_2 t} v_2$ e $h(-e^{\alpha_2 t} b_2) = -e^{\beta_2 t} v_2$ onde α_2 e β_2 são os autovalores de S e de T associados a b_2 e a v_2 . A aplicação h fica completamente determinada se exigirmos que $h(a_1 v_1 + a_2 v_2) = h(a_1 v_1) + h(a_2 v_2)$. É fácil ver que h assim definida é uma bijeção que satisfaz a condição (1.3).

Em particular podemos obter uma bijeção h do plano que transforma as trajetórias de uma sela nas de um nó instável. Neste caso a aplicação h não é contínua na origem, porque uma sucessão de pontos do autoespaço associado ao autovalor negativo que tende para a origem é transformada numa sucessão de pontos cuja norma tende para ∞ .

Como todos os operadores diagonalizáveis do plano são conjugados, a definição de conjugação 1.1 não corresponde à nossa idéia de tipo de diagrama de fase no plano: nós estáveis e instáveis e selas são todos do mesmo tipo segundo esta definição. Isto acontece porque estamos exigindo muito pouco da mudança de coordenadas h . A seguir veremos várias exigências possíveis e as suas consequências.

1.1 conjugação linear

No universo das equações lineares é natural pedir que as mudanças de coordenadas sejam também lineares.

Definição 1.2 *Dois campos de vetores lineares em $\mathbf{R}^n$ são linearmente conjugados se existir uma conjugação entre eles no sentido da definição 1.1 acima em que a mudança de coordenadas h é uma transformação linear inversível.*

A relação de conjugação linear continua a ser uma relação de equivalência porque o conjunto das transformações lineares inversíveis forma um grupo com a operação de composição:

basta reler a demonstração de que a conjugação é uma relação de equivalência para ver que para a relação ser reflexiva só é preciso que a identidade pertença ao conjunto de mudanças de coordenadas permitidas; para mostrar que a relação é simétrica usamos a inversa da mudança de coordenadas e para a transitividade usamos a composta de duas mudanças de coordenadas.

Como as transformações lineares são contínuas, se $\dot{x} = Tx$ e $\dot{x} = Sx$ são linearmente conjugadas por h e se $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_T(t, p_0) = p_1$ então $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_S(t, h(p_0)) = h(p_1)$. A nova definição parece ser mais razoável, agora um nó estável não pode ser equivalente a uma sela nem a um nó instável.

Teorema 1.1 *Duas equações diferenciais lineares $\dot{x} = Tx$ e $\dot{x} = Sx$ em $\mathbf{R}^n$ são linearmente conjugadas se e só se S e T são representadas por matrizes semelhantes.*

Demonstração:

Se S e T são representadas numa base dada por matrizes semelhantes A e B , isto quer dizer que existe uma matriz inversível P tal que $A = PBP^{-1}$. Portanto $e^{At} = Pe^{Bt}P^{-1}$ e para qualquer $p \in \mathbf{R}^n$ e qualquer $t \in \mathbf{R}$ temos

$$\varphi_A(t, Pp) = e^{At}Pp = Pe^{Bt}p = P\varphi_B(t, p).$$

Para mostrar a recíproca suponha que exista uma matriz inversível C tal que para qualquer $p \in \mathbf{R}^n$ e qualquer $t \in \mathbf{R}$ tenhamos $e^{At}Cp = Ce^{Bt}p$. Derivando e tomando $t = 0$ obtemos $ACp = CBp$ para todo $p \in \mathbf{R}^n$ donde se conclui que A e B são semelhantes. $\square$

Corolário 1.1 *Duas equações diferenciais lineares $\dot{x} = Tx$ e $\dot{x} = Sx$ em $\mathbf{R}^n$ são linearmente conjugadas se e só se S e T têm a mesma forma canônica de Jordan.*

1.2 conjugação diferenciável

A conjugação linear é muito restritiva. Se ela for usada para classificar equações diferenciais lineares teremos demasiados tipos de diagramas de fase — as classes de equivalência são muitas e muito pequenas para os nossos propósitos, porque a exigência sobre h foi exageradamente forte. Podemos enfraquecer esta definição pedindo que a mudança de coordenadas seja apenas diferenciável.

Definição 1.3 *Dois campos de vetores lineares em $\mathbf{R}^n$ são diferenciavelmente conjugados se existir uma conjugação entre eles no sentido da definição 1.1 acima em que a mudança de coordenadas h é um difeomorfismo.*

Para os esquecidos, um difeomorfismo é uma bijeção diferenciável cuja inversa também é diferenciável. Segue-se que em qualquer ponto de $\mathbf{R}^n$ a derivada de um difeomorfismo é um operador linear inversível. Os difeomorfismos de $\mathbf{R}^n$ formam um grupo com a operação de composição, de modo que a conjugação diferenciável é uma relação de equivalência. Se dois campos de vetores são diferenciavelmente conjugados então o comportamento assintótico de trajetórias correspondentes quando $t \rightarrow \pm\infty$ é o mesmo porque os difeomorfismos são funções contínuas.

A conjugação diferenciável ainda é bastante forte, como se vê pelo resultado abaixo:

Teorema 1.2 *Duas equações diferenciais lineares são diferenciavelmente conjugadas se e só se são linearmente conjugadas.*

Demonstração:

Dois campos de vetores topologicamente conjugados são sempre diferenciavelmente conjugados já que toda transformação linear inversível é um difeomorfismo.

Para obter a recíproca, seja $h : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ um difeomorfismo que cojuga $\dot{x} = Ax$ e $\dot{x} = Bx$, ou seja, um difeomorfismo tal que para todo $t \in \mathbf{R}$ e para todo $p \in \mathbf{R}^n$ temos

$$h(e^{At}p) = e^{Bt}h(p).$$

Derivando esta expressão em ordem a p e tomando $p = 0$ obtemos:

$$Dh(e^{At}0) \cdot e^{At} = e^{Bt} \cdot Dh(0).$$

Como $e^{At}0 = 0$, a aplicação $H = Dh(0)$ é a conjugação linear procurada. □

1.3 conjugação topológica

A conjugação diferenciável não trouxe informação nova sobre as equações diferenciais lineares. É preciso enfraquecer ainda mais a definição e para isso podemos exigir continuidade em vez de diferenciabilidade.

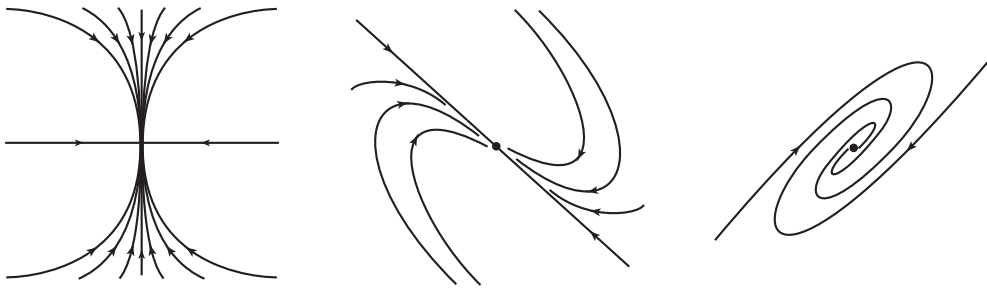
Definição 1.4 *Dois campos de vetores lineares em $\mathbf{R}^n$ são topologicamente conjugados se existir uma conjugação entre eles no sentido da definição 1.1 acima em que a mudança de coordenadas h é um homeomorfismo.*

Lembre-se que um homeomorfismo é uma bijeção contínua cuja inversa também é contínua e que os homeomorfismos de $\mathbf{R}^n$ formam um grupo com a operação de composição — a conjugação topológica também é uma relação de equivalência. Dois campos de vetores diferenciavelmente conjugados são sempre topologicamente conjugados já que todo difeomorfismo é um homeomorfismo. Se uma trajetória de um campo de vetores se aproxima de

um ponto de equilíbrio quando $t \rightarrow \infty$, então a trajetória correspondente de um campo topologicamente conjugado se aproximará da imagem do ponto de equilíbrio. Em particular se todas as trajetórias que começam numa vizinhança do ponto de equilíbrio se aproximam dele quando $t \rightarrow \infty$, então este campo só pode ser topologicamente conjugado a um outro com a mesma propriedade.

Definição 1.5 *Seja $\dot{x} = Ts$ uma equação diferencial linear com fluxo $\varphi_T(t, p)$ e $p_0 \in \mathbf{R}^n$ um ponto de equilíbrio. Dizemos que p_0 é um **atrator** se e só se existir uma vizinhança U de p_0 tal que se $p \in U$ então $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_T(t, p) = p_0$.*

Exemplos de diagramas de fase de campos de vetores no plano para os quais a origem é um atrator:



Teorema 1.3 *Para um operador linear $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ as afirmações abaixo são equivalentes:*

1. *A origem é um atrator para $\dot{x} = Tx$.*
2. *Todos os autovalores de T têm parte real negativa.*
3. *Para qualquer norma $|\cdot|$ em $\mathbf{R}^n$ existem constantes $k > 0$ e $b > 0$ tais que :*

$$\forall t \geq 0 \quad \forall p \in \mathbf{R}^n \quad |\varphi_T(t, p)| \leq ke^{-bt}|p|$$

4. *Existem uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbf{R}^n$ e uma constante $b > 0$ tais que :*

$$\forall t \geq 0 \quad \forall p \in \mathbf{R}^n \quad \|\varphi_T(t, p)\| \leq e^{-bt}\|p\|$$

5. *A equação $\dot{x} = Tx$ é topologicamente conjugada a $\dot{x} = -x$.*

As afirmações: 4) $\implies$ 3) $\implies$ 1) e 5) $\implies$ 1) são triviais.

Para ver que 1) $\implies$ 2) basta observar que se algum dos autovalores de T tiver parte real maior que zero, então para todas as condições iniciais no autoespaço associado as soluções de $\dot{x} = Tx$ satisfazem $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_T(t, p)| = \infty$. Se em vez disso algum autovalor de T tiver parte real igual a zero então existem soluções constantes ou periódicas de $\dot{x} = Tx$ para condições iniciais no autoespaço associado.

Resta provar 2) $\implies$ 4) e que 1) $\implies$ 5). Para isto usaremos o seguinte resultado:

Lema 1.1 *Seja $T : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ um operador linear com autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Sejam a e $b \in \mathbf{R}$ tais que $a \leq \operatorname{Re}(\lambda_j) \leq b$ para todo $j = 1, \dots, r$. Então existe uma base β de $\mathbf{R}^n$ com $T|_{\beta} = A$ e com $\|\cdot\|$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a norma e o produto escalar usuais na base β , tal que :*

$$a\|x\|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \leq b\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

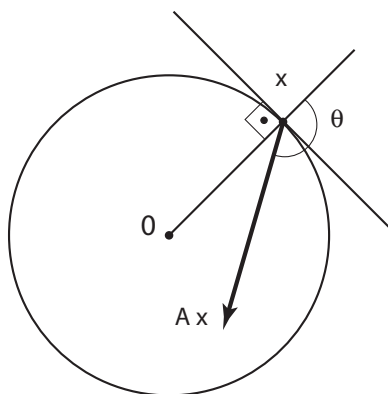
Se os autovalores de A tiverem parte real negativa então existe $b < 0$ que é maior que todas as partes reais, e o lema implica que

$$\|Ax\| \|x\| \cos \theta = \langle Ax, x \rangle \leq b\|x\|^2$$

logo,

$$\cos \theta < 0 \quad \text{e por isso} \quad \theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[< \pi.$$

Neste caso, o campo de vetores Ax aponta para dentro de qualquer esfera de centro na origem.



Demonstração do Lema 1.1:

Suponhamos inicialmente que T seja representado por um único bloco de Jordan com autovalores reais ou seja, que T seja da forma $T = \lambda I + N$ com N uma matriz nilpotente. Se N estiver em forma canônica, e se $\{b_j\}$ for a base correspondente, então $Nb_j = b_{j+1}$ para $j = 1, \dots, n-1$ e $Nb_n = 0$. Tomando $v_j = b_j/\varepsilon^{j-1}$ para $\varepsilon > 0$ temos uma nova base de $\mathbf{R}^n$ na qual T é representada pela matriz $A = \lambda I + \varepsilon N$.

Supondo que $a < \lambda < b$, basta mostrar que se $\|x\| = 1$ então $a \leq \langle Ax, x \rangle \leq b$. Se $(x_1, \dots, x_n)$ são as coordenadas de x na base $\{v_j\}$ então

$$\langle Ax, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle + \varepsilon \langle Nx, x \rangle = \lambda \|x\|^2 + \varepsilon \langle Nx, x \rangle.$$

A função $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x) = \langle Nx, x \rangle$ é contínua e por isso tem um máximo M e um mínimo m na esfera de raio 1, $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| = 1\}$. Se escolhermos ε de maneira que $M\varepsilon + \lambda < b$ e $m\varepsilon + \lambda > a$, concluímos que se $\|x\| = 1$ então

$$a \leq \langle Ax, x \rangle = \lambda + \varepsilon f(x) \leq b.$$

A demonstração no caso em que T tem um par de autovalores complexos conjugados e a sua forma real tem um único bloco é análoga e é deixada como exercício.

Suponhamos que $V = W_1 \oplus W_2$ com W_1 e W_2 dois subespaços T -invariantes e que o lema seja válido em W_1 e em W_2 , isto é, que existem bases β_1 e β_2 de W_1 e W_2 respectivamente, nas quais o lema é verdadeiro. Usando $\beta_1 \cup \beta_2$ como base de V , se $x_1 \in W_1$ e $x_2 \in W_2$, obtemos $\langle A(x_1 + x_2), x_1 + x_2 \rangle = \langle Ax_1, x_1 \rangle + \langle Ax_2, x_2 \rangle$ e verificamos que o lema é verdadeiro em V . $\square$

Demonstração do Teorema 1.3:

Usaremos o Lema 1.1 para provar $2) \implies 4)$. Seja A a matriz de T na base do lema e suponhamos que os autovalores de A tenham parte real menor que $-b < 0$. Seja $x(t)$ uma solução de $\dot{x} = Ax$ com $x(0) \neq 0$. Queremos estimar

$$\mathcal{L}(t) = \|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle. \quad (1.4)$$

Para todo $t \in \mathbf{R}$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt}(t) = 2\langle \dot{x}(t), x(t) \rangle = 2\langle Ax(t), x(t) \rangle \leq -2b\|x(t)\|^2 = -2b\mathcal{L}(t). \quad (1.5)$$

Seja $y(t)$ a solução de $\dot{y} = -2by$ com $y(0) = \mathcal{L}(0) = \|x(0)\|^2$. De (1.5) conclui-se que para todo $t \geq 0$

$$\mathcal{L}(t) \leq y(t) = \mathcal{L}(0)e^{-2bt} \quad \text{isto é} \quad \|x(t)\|^2 \leq e^{-2bt}\|x(0)\|^2$$

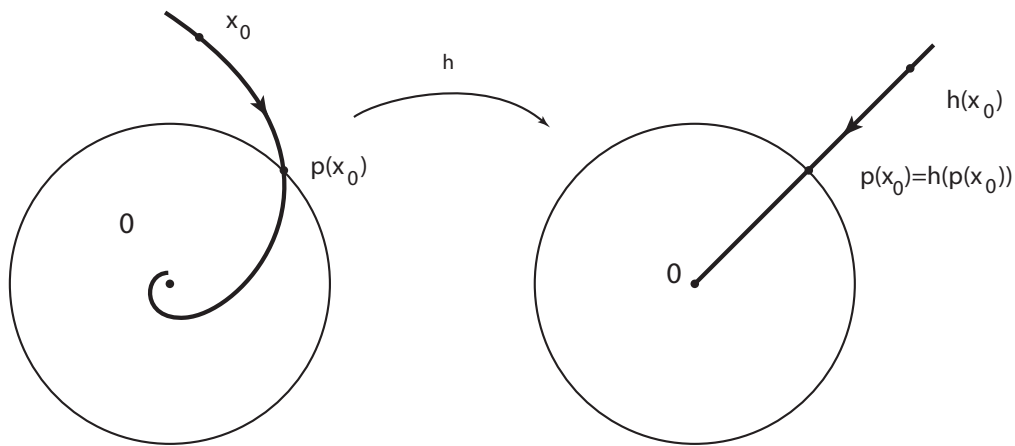
o que completa a demonstração de que $2) \implies 4)$.

Agora já demonstramos que todas as afirmações do teorema, exceto 5), são equivalentes. Só nos falta demonstrar $1) \implies 5)$. Supondo que a origem seja um atrator para $\dot{x} = Tx$ queremos construir uma conjugação topológica h entre $\dot{x} = Tx$ e $\dot{x} = -x$. Usando a base do Lema 1.1, concluímos de 4) que todas as trajetórias de $\dot{x} = Tx$ com $x(0) \neq 0$ cruzam a esfera de raio 1, $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| = 1\}$ uma única vez porque $\|x(t)\|$ é uma função decrescente.

Queremos que h transforme cada trajetória de $\dot{x} = Tx$ em uma trajetória de $\dot{x} = -x$. Começamos por tomar $h(x) = x$ para todo $x \in S^{n-1}$ e $h(0) = 0$. Dado $x_0 \neq 0$ existe um tempo $\tau(x_0)$ positivo ou negativo, ao fim do qual a trajetória de $\dot{x} = Tx$ passando por x_0 atinge um ponto $p(x_0) \in S^{n-1}$ isto é

$$\varphi_T(\tau(x_0), x_0) = p(x_0). \quad (1.6)$$

Tomamos $h(x_0)$ como o ponto atingido quando percorremos a trajetória de $\dot{x} = -x$ começando em $p(x_0)$ durante um tempo $-\tau(x_0)$, isto é $h(x_0) = e^{-\tau(x_0)}p(x_0)$.



A aplicação $\tau : \mathbf{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida acima é sempre diferenciável: ela pode ser obtida aplicando o teorema da função implícita a $F : \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$F(t, x) = \|\varphi_T(t, x)\|^2 - 1 = \mathcal{L}(t) - 1$$

onde $\mathcal{L}$ é a função definida em (1.4) acima e para $x > 0$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = -\mathcal{L}'(t) > 0$$

Conclui-se que existe uma única função implícita $\tau(x)$ tal que $F(\tau(x), x) \equiv 0$ e $\tau(x) = 0$ se $x \in S^{n-1}$. Não só τ é contínua como é de classe C^∞ em $\mathbf{R}^n - \{0\}$ e $p : \mathbf{R}^n - \{0\} \longrightarrow S^{n-1}$ fica definida pela expressão (1.6). $\square$

Podemos repetir o estudo acima para pontos de equilíbrio que são aproximados, quando $t \longrightarrow -\infty$ por todas as trajetórias à sua volta.

Definição 1.6 *Seja $\dot{x} = Ts$ uma equação diferencial linear com fluxo $\varphi_T(t, p)$ e $p_0 \in \mathbf{R}^n$ um ponto de equilíbrio. Dizemos que p_0 é uma **fonte** se e só se existir uma vizinhança U de p_0 tal que se $p \in U$ então $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_T(t, p) = p_0$.*

A demonstração do resultado análogo ao Teorema 1.3 é deixada como exercício:

Teorema 1.4 *Para um operador linear $T : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ as afirmações abaixo são equivalentes:*

1. *A origem é uma fonte para $\dot{x} = Tx$.*
2. *Todos os autovalores de T têm parte real positiva.*

3. Para qualquer norma $|\cdot|$ em $\mathbf{R}^n$ existem constantes $k > 0$ e $a > 0$ tais que :

$$\forall t \geq 0 \quad \forall p \in \mathbf{R}^n \quad |\varphi_T(t, p)| \geq ke^{at}|p|$$

4. Existem uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbf{R}^n$ e uma constante $a > 0$ tais que :

$$\forall t \geq 0 \quad \forall p \in \mathbf{R}^n \quad \|\varphi_T(t, p)\| \geq e^{at}\|p\|$$

5. A equação $\dot{x} = Tx$ é topologicamente conjugada a $\dot{x} = x$.

6. A origem é um atrator para $\dot{x} = -Tx$.

Capítulo 2

Operadores hiperbólicos

2.1 subespaços invariantes

Para um operador linear dado, $T : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$, podemos dividir o espaço $\mathbf{R}^n$ em subespaços T -invariantes, em alguns dos quais do ponto de vista da conjugação topológica o comportamento das trajetórias é completamente descrito pelos Teoremas 1.3 e 1.4. Se V_α é o autoespaço generalizado associado ao autovalor $\alpha \in \mathbf{R}$ ou ao par de autovalores $\alpha, \bar{\alpha} \in \mathbf{C}$, já sabemos que $\mathbf{R}^n = \sum_{\alpha} V_\alpha$ onde a soma se estende a todos os autovalores de T . Agrupando os autovalores de T pelo sinal da parte real obtemos:

$$\text{subespaço estável } E^s(T) = \sum_{\operatorname{Re}(\alpha) < 0} V_\alpha$$

$$\text{subespaço instável } E^u(T) = \sum_{\operatorname{Re}(\alpha) > 0} V_\alpha$$

$$\text{subespaço central } E^c(T) = \sum_{\operatorname{Re}(\alpha) = 0} V_\alpha$$

A Proposição seguinte é de demonstração imediata:

Proposição 2.1 *Os subespaços definidos acima têm as seguintes propriedades:*

1. $E^s(T)$, $E^u(T)$ e $E^c(T)$ são T -invariantes.
2. $\mathbf{R}^n = E^s(T) \oplus E^u(T) \oplus E^c(T)$.
3. Todos os pontos de equilíbrio de $\dot{x} = Tx$ estão em $E^c(T)$.
4. Todas as soluções periódicas de $\dot{x} = Tx$ estão em $E^c(T)$.

5. A origem de $E^s(T)$ é um atrator para $\dot{x} = (T|_{E^s})x$.

6. A origem de $E^u(T)$ é uma fonte para $\dot{x} = (T|_{E^u})x$.

Resumindo, conhecemos bem, do ponto de vista da conjugação topológica, as equações diferenciais $\dot{x} = Tx$ em que $E^c(T) = \{0\}$.

Definição 2.1 *Um operador linear $T : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ é **hiperbólico** se e só se $E^c(T) = \{0\}$, isto é, se e só se todos os autovalores de T tiverem parte real não nula.*

Neste caso diz-se também que a equação diferencial $\dot{x} = Tx$ é hiperbólica.

2.2 conjugação topológica

Se T é hiperbólico então o único ponto de equilíbrio de $\dot{x} = Tx$ é a origem, que será um atrator se e só se $E^u(T) = \{0\}$. Exemplos de operadores hiperbólicos em $\mathbf{R}^2$ são $T = I$, $T = -I$ e $T(x, y) = (x, -y)$. Todos os outros operadores lineares hiperbólicos de $\mathbf{R}^2$ são conjugados a um destes. Por exemplo, o operador linear $T(x, y) = (ax - by, bx + ay)$ com $a > 0$ é conjugado a $T = I$. Este resultado pode ser generalizado facilmente para os operadores lineares em $\mathbf{R}^n$ porque em $E^s(T)$ e em $E^u(T)$ conhecemos completamente o comportamento de $\dot{x} = Tx$, que é conjugado a $\dot{x} = -x$ e a $\dot{x} = x$ respectivamente. Podemos usar a linearidade de T para estender a conjugação ao espaço todo quando $E^c(T) = \{0\}$.

Proposição 2.2 *Se $T : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ é um operador linear hiperbólico então $\dot{x} = Tx$ é topologicamente conjugada a $\dot{x} = Sx$ onde $S = I$ ou $S = -I$ ou $S(x, y) = (x, -y)$ com $x \in \mathbf{R}^{n_1}$, $y \in \mathbf{R}^{n_2}$ e $n = n_1 + n_2$.*

Demonstração:

Se $E^s(T) = \mathbf{R}^n$ e portanto $E^u(T) = \{0\}$ o resultado já está provado (Teorema 1.3) e se $E^u(T) = \mathbf{R}^n$ (donde $E^s(T) = \{0\}$) o resultado foi deixado como exercício (Teorema 1.4). Resta estudar o caso em que $E^u(T)$ e $E^s(T)$ são ambos subespaços não triviais de $\mathbf{R}^n$ que é coberto pelo lema abaixo:

Lema 2.1 *Sejam $T : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ e $S : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ operadores lineares, V_1 e V_2 subespaços T -invariantes e W_1 e W_2 subespaços S -invariantes de $\mathbf{R}^n$. Se $\dot{x} = T|_{V_1}x$ é topologicamente conjugada a $\dot{x} = S|_{W_1}x$ e $\dot{x} = T|_{V_2}x$ é topologicamente conjugada a $\dot{x} = S|_{W_2}x$ e se $V = V_1 \oplus V_2$, $W = W_1 \oplus W_2$ então $\dot{x} = T|_Vx$ é topologicamente conjugada a $\dot{x} = S|_Wx$.*

Demonstração:

Se $h_1 : V_1 \longrightarrow W_1$ e $h_2 : V_2 \longrightarrow W_2$ são os homeomorfismos que realizam as conjugações da hipótese então para $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$ a conjugação desejada é $h : V \longrightarrow W$ dada por $h(v_1 + v_2) = h_1(v_1) + h_2(v_2)$. $\square$

Teorema 2.1 *As equações diferenciais $\dot{x} = Tx$ e $\dot{x} = Sx$ com $T : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ e $S : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ operadores lineares hiperbólicos são topologicamente conjugadas se e só se $\dim E^s(T) = \dim E^s(S)$.*

Demonstração:

A Proposição 2.2 mostra que a condição é suficiente. Para mostrar que a condição é necessária usamos um resultado de topologia (ver por exemplo E. Dugundji, *Topology*):

Teorema 2.2 (Brouwer, 1913) *Se $U \subset \mathbf{R}^n$ e $U' \subset \mathbf{R}^m$ são dois subconjuntos abertos e se existir um homeomorfismo $h : U \longrightarrow U'$ com $h(U) = U'$, então $m = n$.*

2.3 aproximação por operadores hiperbólicos

Apesar de nem todo operador linear ser hiperbólico, o conjunto dos operadores hiperbólicos em $\mathbf{R}^n$ é muito grande. Para ver isso, observamos primeiro que se uma matriz A estiver em forma canônica então a matriz $A + \varepsilon I$ também estará em forma canônica. Por isso se os autovalores de A são $\lambda_j \in \mathbf{C}$ então os autovalores de $A + \varepsilon I$ são exatamente $\varepsilon + \lambda_j$. Por exemplo, as duas matrizes abaixo estão em forma canônica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\pi \end{pmatrix} \quad A + \varepsilon I = \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \varepsilon & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 + \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\pi + \varepsilon \end{pmatrix}$$

Os autovalores de A são $\pm i$ (com multiplicidade 2), -3 e $-\pi$ e os de $A + \varepsilon I$ são $\varepsilon \pm i$ (com multiplicidade 2), $-3 + \varepsilon$ e $-\pi + \varepsilon$. Tomando ε suficientemente pequeno podemos sempre garantir que todos os autovalores de $A + \varepsilon I$ têm parte real diferente de zero. Demonstramos assim que toda matriz em forma canônica pode ser aproximada pela matriz de um operador linear hiperbólico.

Quando estudamos a exponencial de um operador linear vimos várias maneiras alternativas de definir uma norma no conjunto $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ dos operadores lineares em $\mathbf{R}^n$. Como $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ é um espaço vetorial de dimensão finita todas as normas aí definidas são equivalentes e por isso definem a mesma topologia: se mostrarmos que um subconjunto é aberto usando uma das normas teremos automaticamente mostrado que ele é aberto em qualquer outra norma. Duas normas equivalentes definem o mesmo conceito de aproximação. Assim, seja qual for a norma escolhida para $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$, podemos concluir:

Teorema 2.3 *Todo operador linear em $\mathbf{R}^n$ pode ser aproximado por operadores lineares hiperbólicos.*

Em outras palavras, mostramos que o conjunto $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ dos operadores lineares hiperbólicos é um subconjunto denso de $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$. Podemos demonstrar ainda mais sobre $\mathcal{H}$:

Teorema 2.4 *O conjunto $\mathcal{H}$ dos operadores hiperbólicos é aberto em $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$.*

Demonstração:

Queremos mostrar que se um operador linear é hiperbólico então todo operador suficientemente próximo dele também é hiperbólico. Isto é equivalente a demonstrar que se uma sucessão de operadores lineares não hiperbólicos convergir para um operador linear então ele não pode ser hiperbólico. Mostraremos isso usando a norma habitual de operadores lineares: $\|T\| = \sup_{|x|=1} |T(x)|$.

Tomando a complexificação dos operadores envolvidos, temos uma sucessão (T_j) de operadores lineares $T_j : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ cada um deles com pelo menos um autovalor imaginário puro (possivelmente zero). Como a sucessão converge para um operador $T : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ então $(\|T_j\|)$ é uma sucessão limitada de números reais.

A norma de um autovalor λ de um operador linear T qualquer é sempre menor ou igual que a norma $\|T\|$: se $v \in \mathbf{C}^n$ é um autovetor de T com norma 1, $|T(v)| = |\lambda||v| = |\lambda| \leq \|T\|$. Portanto, os autovalores de T_j (contados com multiplicidade) são uma sucessão limitada em $\mathbf{C}^n$ e existe uma subsucessão de autovalores que é convergente. Podemos então supor que (T_j) já é a subsucessão correspondente.

Por hipótese cada um dos operadores T_j não é hiperbólico e portanto para cada j ao menos um dos autovalores de T_j tem parte real zero e existem um $k \leq n$ e uma subsucessão tal que o k -ésimo autovalor tem sempre parte real igual a zero. Podemos supor que T_j já é esta subsucessão. Se v_j é autovetor de T_j com norma 1 associado ao k -ésimo autovalor de T_j então como os v_j estão na esfera de raio 1 em $\mathbf{C}^n$ que é um conjunto compacto, existe uma subsucessão convergente.

Resumindo: dada uma sucessão de operadores lineares (T_j) em $\mathbf{C}^n$, cada um deles com pelo menos um autovalor imaginário puro (podendo ser igual a zero), convergindo para um operador linear T , mostramos que existe uma subsucessão de (T_j) que tem uma sucessão convergente de autovalores imaginários puros, $i\lambda_j$ e uma sucessão convergente de autovetores v_j com norma igual a 1. Se $\lim_{j \rightarrow \infty} i\lambda_j = i\lambda$ e $\lim_{j \rightarrow \infty} v_j = v$ então $T(v) = i\lambda v$ e por isso T não pode ser hiperbólico. $\square$

As propriedades que são satisfeitas por um subconjunto aberto e denso de objetos num espaço topológico são importantes porque conjuntos abertos e densos são em algum sentido subconjuntos grandes. Estas propriedades são chamadas **genéricas**. Outro exemplo de propriedade genérica em $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ é a de ser semi-simples — veja a demonstração no capítulo 7 de Hirsch e Smale.

Capítulo 3

Estabilidade

Se usarmos uma equação diferencial como modelo para um fenômeno físico, os pontos de equilíbrio que correspondem a resultados experimentais devem ser observáveis mesmo que façamos um pequeno erro nas condições iniciais. Estamos interessados em caracterizar um ponto p_0 de equilíbrio tal que todas as soluções que comecem perto de p_0 nunca se afastarão dele — um ponto p_0 de equilíbrio estável.

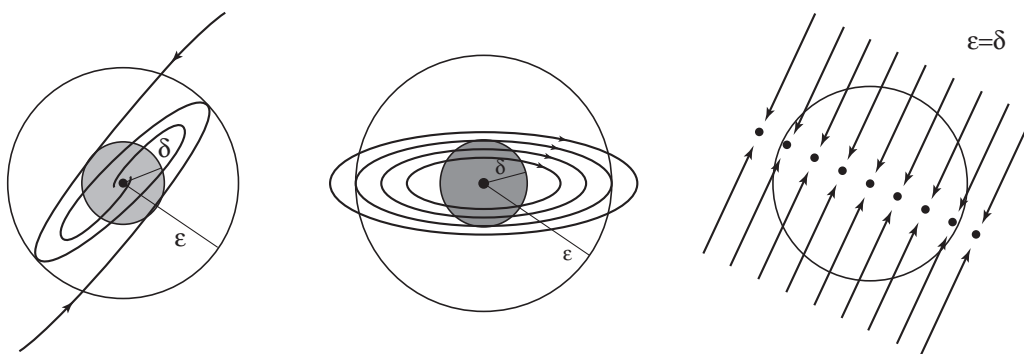
Existem vários conceitos de estabilidade e começamos por:

3.1 estabilidade segundo Liapunov

Definição 3.1 *Seja p_0 um ponto de equilíbrio de uma equação diferencial $\dot{x} = v(x)$ em $\mathbf{R}^n$ com fluxo $\varphi_v(t, p)$. Diz-se que p_0 é **estável no sentido de Liapunov** se e só se*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : p \in \mathbf{R}^n \text{ e } |p - p_0| < \delta \implies \forall t > 0 \ |\varphi_v(t, p) - p_0| < \varepsilon$$

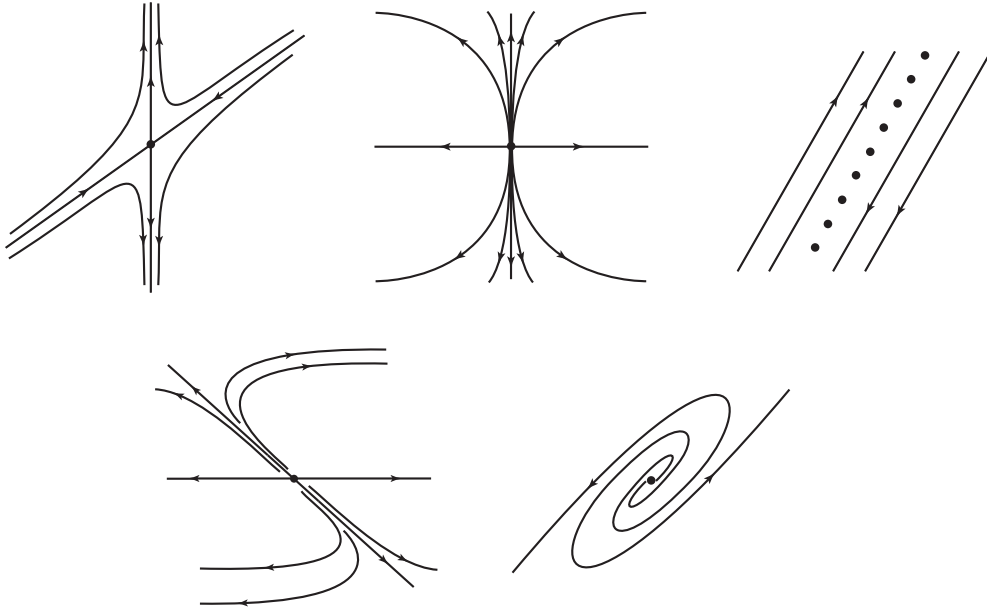
Exemplos de diagramas de fase de campos de vetores no plano para os quais a origem é estável no sentido de Liapunov:



Os diagramas de fase de equações diferenciais lineares em $\mathbf{R}^2$ que contém pontos de equilíbrio estáveis segundo Liapunov são os centros e os associados a um operador linear

com um autovalor negativo e outro zero, além dos focos e nós estáveis (daí o seu nome). Para estes últimos, como para todos os atratores lineares, podemos usar a afirmação 3 do Teorema 1.3 para mostrar a estabilidade da origem: como existem constantes $k > 0$ e $b > 0$ tais que, para todo $t \geq 0$ e todo p em $\mathbf{R}^n$, temos $|\varphi_T(t, p)| \leq ke^{-bt}|p|$, dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta = \varepsilon/k$ para garantir que $|\varphi_T(t, p)| \leq ke^{-bt}\varepsilon/k \leq \varepsilon$. Analogamente, a afirmação 3 do Teorema 1.4 permite concluir que uma fonte nunca é um ponto de equilíbrio estável.

Exemplos de diagramas de fase de campos de vetores no plano para os quais a origem não é estável no sentido de Liapunov:



O objetivo do resto desta secção é caracterizar as equações diferenciais lineares em $\mathbf{R}^n$ cujos pontos de equilíbrio são estáveis com a definição de Liapunov. Começamos por observar que se dois campos de vetores forem topologicamente conjugados, então um ponto de equilíbrio de um deles será estável se e só se a sua imagem pela conjugação for um ponto de equilíbrio estável do outro. A origem não pode ser estável se arbitrariamente perto da origem existirem trajetórias cuja norma tenda para infinito quando t cresce. Isto acontece sempre que $E^u(T) \neq \{0\}$ já que toda vizinhança da origem conterà pontos de $E^u(T)$, logo $E^u(T) = \{0\}$ é uma condição necessária para a estabilidade.

As soluções que começam em $E^c(T)$ são combinação linear de funções do tipo t^k , $t^k \cos wt$, $t^k \sin wt$ com $k \geq 0$. Para $k \geq 1$ estas funções são ilimitadas. Para que a origem seja estável segundo Liapunov é necessário que não existam soluções deste tipo com $k \neq 0$ ou seja que a restrição $T|_{E^c}$ seja semi-simples.

As condições que obtivemos são também suficientes:

Teorema 3.1 *A origem de $\mathbf{R}^n$ é um ponto de equilíbrio estável segundo Liapunov de $\dot{x} = Tx$ com $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ linear se e só se $E^u(T) = \{0\}$ e $T|_{E^c}$ for semi-simples.*

Demonstração:

Suponha que $V = W_1 \oplus W_2$ com W_1 e W_2 dois subespaços T -invariantes de um espaço vetorial de dimensão finita V . Se $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_2$ forem normas em W_1 e W_2 respectivamente, então dado $x \in V$, $x = x_1 + x_2$ com $x_j \in W_j$, a expressão $\|x\| = |x_1|_1 + |x_2|_2$ define uma norma em V que é equivalente à norma usual $|\cdot|$ em V . Portanto existem $K > 0$ e $k > 0$ tais que $k|x| \leq \|x\| \leq K|x|$ para todo x em V . Se a origem for ponto de equilíbrio estável segundo Liapunov de $\dot{x} = T|_{W_1}x$ e de $\dot{x} = T|_{W_2}x$, então dado $\eta > 0$ existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$, tais que se $|x_1|_1 < \delta_1$ e $|x_2|_2 < \delta_2$ então $|\varphi_T(t, x_1)|_1 < \eta$ e $|\varphi_T(t, x_2)|_2 < \eta$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\eta = \varepsilon/2k$, se $K|x| \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ obtemos $|\varphi_T(t, x)| \leq \|\varphi_T(t, x)\|/k \leq \varepsilon$. Mostramos assim que se o teorema for válido em dois subespaços invariantes, será também válido na sua soma direta.

Usando o Teorema 1.3 e a Proposição 2.1, que caracterizam o comportamento de uma equação diferencial no seu subespaço estável, é fácil ver que o teorema se verifica em $E^s(T)$. Resta prová-lo em $E^c(T)$ se $T|_{E^c}$ for semi-simples. Tendo em conta as observações acima, basta provar a estabilidade da origem para o operador linear $T \equiv 0$ em $\mathbf{R}$ (que é imediata) e para operadores lineares $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, com autovalores $\pm i\omega$, $\omega \in \mathbf{R}$. Neste último caso, podemos trabalhar na base em que T está em forma canônica, isto é:

$$T \sim \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad e^{tT} \sim \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

e obtemos $|\varphi_T(t, (p_1, p_2))|^2 = |(p_1 \cos \omega t - p_2 \sin \omega t, p_1 \sin \omega t + p_2 \cos \omega t)|^2 = |p|^2$. Provamos assim que um centro é sempre estável no sentido de Liapunov, o que completa a demonstração do teorema. $\square$

Corolário 3.1 *Um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = Tx$ com $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ linear é estável segundo Liapunov se e só se $E^u(T) = \{0\}$ e $T|_{E^c}$ for semi-simples.*

Demonstração:

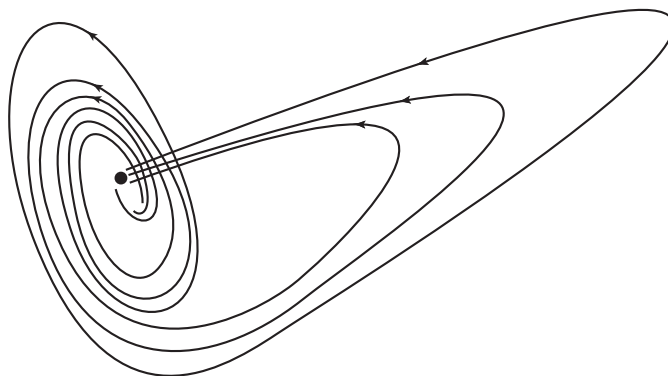
Se p_0 for um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = Tx$ e se $x(t)$ for uma solução de $\dot{x} = Tx$, então, como T é linear, $x(t) - p_0$ também é uma solução satisfazendo a condição inicial $x(0) - p_0$. Isto garante que um ponto de equilíbrio qualquer de uma equação diferencial linear será estável segundo Liapunov se e só se a origem o for. $\square$

3.2 estabilidade assintótica

Outra maneira, mais restritiva, de definir estabilidade de um ponto de equilíbrio é exigir que as soluções com condições iniciais próximas a ele, além de não se afastarem muito no futuro, se aproximem do ponto de equilíbrio quando $t \rightarrow \infty$.

Definição 3.2 *Seja p_0 um ponto de equilíbrio de uma equação diferencial $\dot{x} = v(x)$ em $\mathbf{R}^n$ com fluxo $\varphi_v(t, p)$. Diz-se que p_0 é **assintoticamente estável** se e só se p_0 for um atrator que é estável no sentido de Liapunov.*

A exigência de que o ponto seja estável no sentido de Liapunov é feita para evitar situações como a da figura abaixo, que representa um fluxo em $\mathbf{R}^3$ em que as soluções que começam perto do ponto de equilíbrio podem ter que se afastar a uma distância arbitrariamente grande antes de se aproximar novamente do ponto. Deve ser possível decidir se um ponto é assintoticamente estável olhando apenas para o comportamento do fluxo em uma pequena vizinhança do ponto de equilíbrio.



A situação da figura nunca ocorre para equações diferenciais lineares: do Teorema 1.3 segue-se que todo atrator linear é estável segundo Liapunov, como vimos acima no Teorema 3.1. Por outro lado, se a origem for um atrator para $\dot{x} = Tx$ com $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ linear, conclui-se do Teorema 1.3 que todos os autovalores de T têm parte real negativa e portanto que $\mathbf{R}^n = E^s(T)$. Se $\dot{x} = Tx$ tiver outro ponto de equilíbrio $p_0 \neq 0$, então zero é autovalor de T (com autovetor p_0) e as soluções que comecem no núcleo de T arbitrariamente perto de p_0 serão constantes e não se aproximarão de p_0 . Provamos:

Teorema 3.2 *Dado um operador linear $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, a origem de $\mathbf{R}^n$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de $\dot{x} = Tx$ se e só se todos os autovalores de T tiverem parte real menor que zero.*

Capítulo 4

Operadores não hiperbólicos

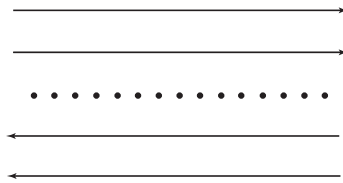
As equações diferenciais hiperbólicas ficaram completamente caracterizadas no Capítulo 2. Para compreender o que acontece no caso não hiperbólico basta estudar o comportamento das soluções no subespaço central. Consideraremos dois exemplos: primeiro um operador linear cujo único autovalor é zero, que como já vimos é sempre nilpotente. O segundo caso a estudar é o de um operador em $\mathbf{R}^4$ com dois pares de autovalores imaginários puros.

4.1 operadores lineares nilpotentes

Há duas possibilidades para um operador linear nilpotente em $\mathbf{R}^2$:

$$T \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad T \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Neste último caso o fluxo tem a forma $\varphi_T(t, (p_1, p_2)) = (tp_2 + p_1, p_2)$ e todas as trajetórias são retas paralelas a $\ker T$, o conjunto dos pontos de equilíbrio, como na figura.



Mesmo sem usar os resultados anteriores, é imediato que a origem não é estável: para $|p_2| \neq 0$ arbitrariamente pequeno $|\varphi_T(t, (0, p_2))| = |(t, 0)||p_2| = |t||p_2| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$.

Fica como exercício a descrição dos diagramas de fase e a discussão da estabilidade da origem para os três casos possíveis em $\mathbf{R}^3$:

$$T \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad T \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad T \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2 operadores com autovalores imaginários puros

Conhecemos bem o caso de dimensão 2, de um operador cuja forma canônica é:

$$T \sim \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

Todas as soluções de $\dot{x} = Tx$ são periódicas, com período $2\pi/\omega$.

Em $\mathbf{R}^4$ o caso mais simples é o de um operador semi-simples, com forma canônica:

$$T \sim \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\theta \\ 0 & 0 & \theta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad e^{tT} \sim \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta t & -\sin \theta t \\ 0 & 0 & \sin \theta t & \cos \theta t \end{pmatrix}$$

Nesta forma os subespaços T -invariantes são

$$E_\omega = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle \quad \text{e} \quad E_\theta = \langle (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$$

Em cada um dos dois planos invariantes a origem é um centro e as soluções com valores iniciais diferentes de zero nestes planos são periódicas com períodos $2\pi/\omega$ e $2\pi/\theta$ respectivamente.

Se tomarmos como condição inicial um ponto p cujas componentes tanto em E_ω quanto em E_θ sejam diferentes de zero, então a trajetória que passa por p estará contida em um toro, já que as suas duas primeiras componentes estão contidas em uma circunferência e as duas últimas em outra. Para entender melhor o que acontece com estas soluções estudaremos um pouco a geometria do toro e da circunferência.

4.2.1 geometria da circunferência

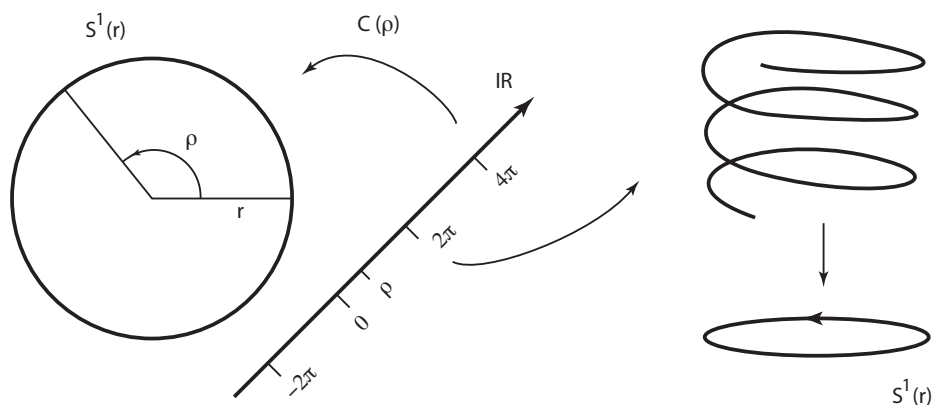
Antes de estudar a geometria do toro, relembremos algumas descrições alternativas (e equivalentes) da circunferência de centro 0 e raio $r > 0$, $\mathbf{S}^1(r) \subset \mathbf{R}^2$:

1. $\mathbf{S}^1(r) = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| = r\}$
2. Carta (ou parametrização) de $\mathbf{S}^1(r)$ no intervalo $[0, 2\pi[$, dada pela aplicação

$$c : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbf{R}^2 \quad \text{com} \quad c(\rho) = (r \cos \rho, r \sin \rho)$$

A aplicação c é injetiva, diferenciável e sua imagem é a circunferência $\mathbf{S}^1(r)$. Infelizmente a inversa de c não é contínua: os pontos $c(1/n)$ e $c(2\pi - 1/n)$ aproximam-se de $(r, 0)$ quando $n \longrightarrow \infty$ e são imagem de duas sucessões que convergem para limites diferentes, um deles fora do domínio de c . A carta c é a restrição a $\mathbf{S}^1(r)$ das coordenadas polares em $\mathbf{R}^2 - \{0\}$: a semi-reta que liga o ponto $c(\rho)$ à origem de $\mathbf{R}^2$ faz um ângulo ρ com o semi-eixo positivo dos xx .

3. Recobrimento de $\mathbf{S}^1(r)$ por $\mathbf{R}$ dado pela aplicação $\mathcal{C} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $\mathcal{C}(\rho) = (r \cos \rho, r \sin \rho)$, que é periódica de período 2π , diferenciável e cuja imagem é a circunferência $\mathbf{S}^1(r)$. A restrição de $\mathcal{C}$ a qualquer intervalo de comprimento menor que 2π é injetiva.



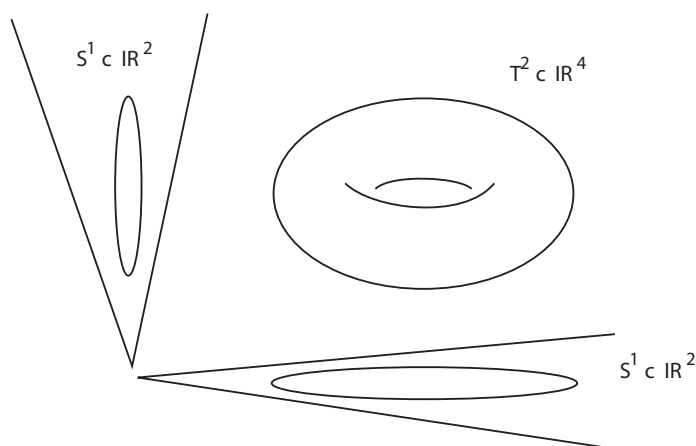
4. Considere a aplicação $m : \mathbf{R} \longrightarrow [0, 1[$ que a cada número associa a sua mantissa: $m(\rho) = \rho - [\rho]$ onde $[\rho]$ é o maior inteiro menor ou igual a ρ . Temos que

$$\forall \rho \in \mathbf{R} \quad c(2\pi m(\rho/2\pi)) = \mathcal{C}(2\pi m(\rho/2\pi)) = \mathcal{C}(\rho)$$

5. A circunferência pode também ser identificada com o espaço quociente $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ usando a relação de equivalência definida por $\rho \sim \theta \iff (\rho - \theta)/2\pi \in \mathbf{Z}$. Isto faz sentido porque $\rho \sim \theta \iff m(\rho/2\pi) = m(\theta/2\pi) \iff \mathcal{C}(\rho) = \mathcal{C}(\theta)$.

4.2.2 geometria do toro $\mathbf{T}^2$

Da mesma maneira que fizemos para $\mathbf{S}^1(r)$, usaremos várias descrições equivalentes do toro $\mathbf{T}^2$:



1. Dados $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ definimos o **toro de raios r_1 e r_2** , $\mathbf{T}^2(r_1, r_2) \subset \mathbf{R}^4$ como:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^2(r_1, r_2) &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 : |(x_1, x_2)| = r_1 \quad |(x_3, x_4)| = r_2\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = r_1^2 \quad x_3^2 + x_4^2 = r_2^2\}\end{aligned}$$

É fácil ver que o toro é o produto cartesiano de duas circunferências $\mathbf{T}^2(r_1, r_2) = \mathbf{S}^1(r_1) \times \mathbf{S}^1(r_2)$.

2. Carta (ou parametrização) de $\mathbf{T}^2(r_1, r_2)$ pelo quadrado $[0, 2\pi]^2$, dada por:

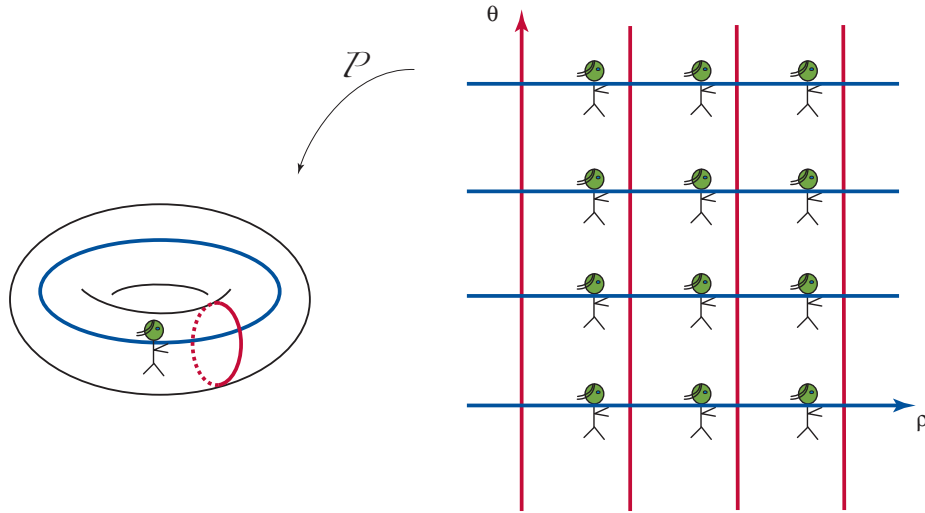
$$\gamma : [0, 2\pi]^2 \longrightarrow \mathbf{R}^4 \quad \gamma(\rho, \theta) = (r_1 \cos \rho, r_1 \sin \rho, r_2 \cos \theta, r_2 \sin \theta)$$

Esta aplicação é análoga à carta c de $\mathbf{S}^1(r)$ definida em 2) na secção 4.2.1. A carta γ é injetiva, diferenciável e sua imagem é todo o toro $\mathbf{T}^2(r_1, r_2)$ definido em 1) acima. A inversa de γ não é contínua. A carta γ é a restrição a $\mathbf{T}^2(r_1, r_2)$ das coordenadas polares em $\mathbf{R}^2 - \{0\} \times \mathbf{R}^2 - \{0\}$.

3. Recobrimento de $\mathbf{T}^2(r_1, r_2)$ por $\mathbf{R}^2$ dado pela aplicação

$$\mathcal{P} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^4 \quad \mathcal{P}(\rho, \theta) = (r_1 \cos \rho, r_1 \sin \rho, r_2 \cos \theta, r_2 \sin \theta)$$

que é periódica de período 2π em cada uma das coordenadas, diferenciável e cuja imagem é o toro $\mathbf{T}^2(r_1, r_2)$. A restrição de $\mathcal{P}$ a qualquer retângulo cujos lados tenham comprimento menor que 2π é injetiva.



4. O recobrimento $\mathcal{P}$ pode ser definido, a menos de multiplicação por 2π , como a composta da carta γ com a aplicação:

$$p : \mathbf{R}^2 \longrightarrow [0, 1]^2 \quad p(\rho, \theta) = (m(\rho), m(\theta))$$

onde m é a aplicação que a cada número associa a sua mantissa, definida em 4) na secção 4.2.1. Temos que

$$\forall (\rho, \theta) \in \mathbf{R}^2 \quad \gamma(2\pi p(\rho/2\pi, \theta/2\pi)) = \mathcal{P}(2\pi p(\rho/2\pi, \theta/2\pi)) = \mathcal{P}(\rho, \theta)$$

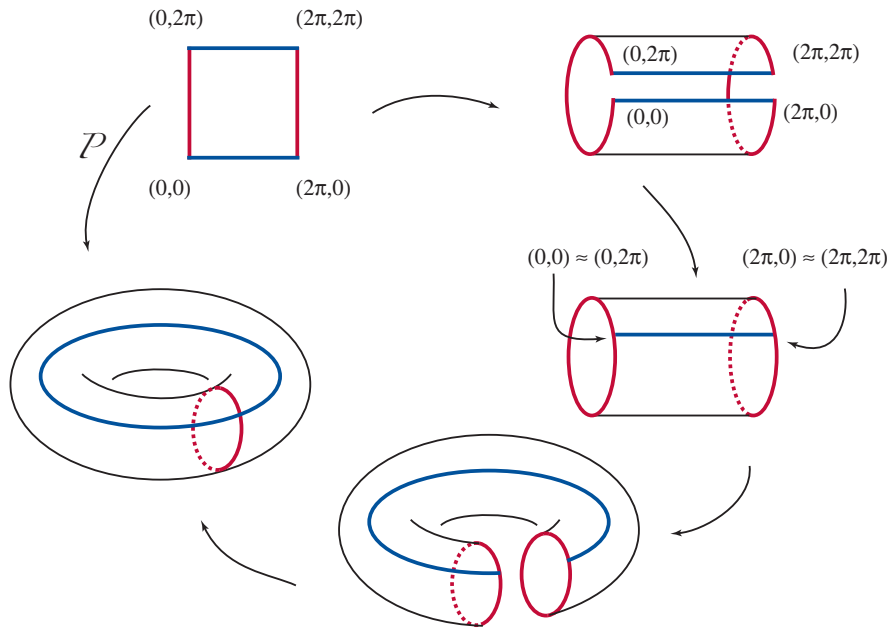
5. Analogamente ao que foi feito em 5) na secção 4.2.1, definimos em $\mathbf{R}^2$ uma relação de equivalência módulo $\mathbf{Z}^2$: dois pontos $q = (\rho, \theta)$ e $\tilde{q} = (\tilde{\rho}, \tilde{\theta})$ são equivalentes (o que denotamos por $q \approx \tilde{q}$) se e só se $(1/2\pi)(q - \tilde{q}) \in \mathbf{Z}^2$, isto é se e só se $\rho \sim \tilde{\rho}$ e $\theta \sim \tilde{\theta}$ onde $\sim$ é a relação de equivalência que definimos na secção 4.2.1.

Do mesmo modo que em $\mathbf{S}^1(r)$, temos que

$$q \approx \tilde{q} \iff p\left(\frac{q}{2\pi}\right) = p\left(\frac{\tilde{q}}{2\pi}\right) \iff \mathcal{P}(q) = \mathcal{P}(\tilde{q})$$

Assim, o toro pode ser identificado com o espaço quociente $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$.

6. O toro pode também ser representado em $\mathbf{R}^3$ como a superfície de revolução gerada pela rotação em torno do eixo dos zz de uma circunferência no semi-plano (x, z) , $x > 0$.



A imagem por $\mathcal{P}$ de uma reta horizontal no plano é um paralelo $\mathbf{S}^1(r_1) \times \{p_0\}$. As retas verticais são transformadas em meridianos $\{p_0\} \times \mathbf{S}^1(r_2)$.

4.2.3 toros invariantes

Estamos agora em condições de estudar as soluções de equações diferenciais lineares em $\mathbf{R}^4$ com autovalores imaginários puros. Para os centros em $\mathbf{R}^2$ temos:

$$T \sim \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \dot{x} = -\omega y \\ \dot{y} = \omega x \end{cases}$$

que em coordenadas polares, $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$, se escreve:

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\alpha} = \omega \end{cases} \implies \begin{pmatrix} r(t) \\ \alpha(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(0) \\ \alpha(0) + \omega t \end{pmatrix}$$

Repetimos o procedimento para um operador semi-simples em $\mathbf{R}^4$:

$$T \sim \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\theta \\ 0 & 0 & \theta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} \dot{x} = -\omega y \\ \dot{y} = \omega x \\ \dot{z} = -\theta u \\ \dot{u} = \theta z \end{cases}$$

Reescrevemos a equação em coordenadas polares $(r_1, \alpha, r_2, \beta)$ onde $x = r_1 \cos \alpha$, $y = r_1 \sin \alpha$, $z = r_2 \cos \beta$, $u = r_2 \sin \beta$ e obtemos:

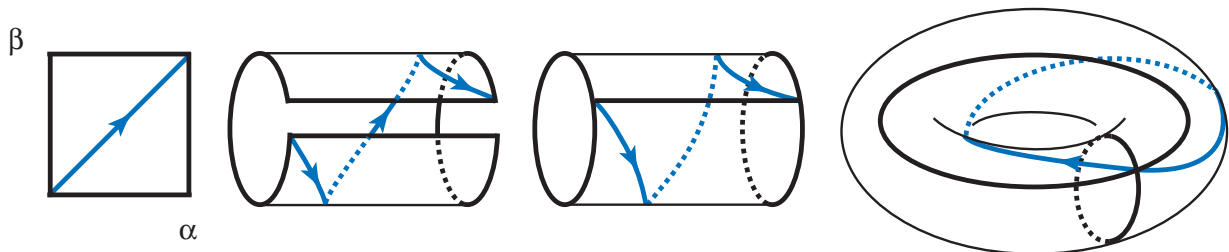
$$\begin{cases} \dot{r}_1 = 0 \\ \dot{\alpha} = \omega \\ \dot{r}_2 = 0 \\ \dot{\beta} = \theta \end{cases} \implies \begin{pmatrix} r_1(t) \\ \alpha(t) \\ r_2(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1(0) \\ \alpha(0) + \omega t \\ r_2(0) \\ \beta(0) + \theta t \end{pmatrix}$$

Como $r_1(t)$ e $r_2(t)$ são constantes, a solução está contida no toro $\mathbf{T}^2(r_1(0), r_2(0))$. As duas outras coordenadas das soluções satisfazem:

$$(\alpha(t), \beta(t)) = (\alpha_0 + \omega t, \beta_0 + \theta t) \quad (4.1)$$

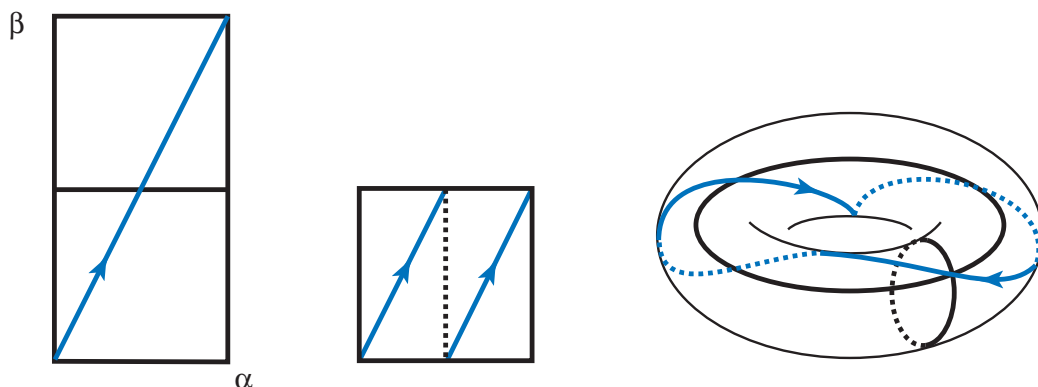
que é a equação paramétrica da reta no plano (α, β) passando por $(\alpha(0), \beta(0)) = (\alpha_0, \beta_0)$ e com inclinação θ/ω . Usando a parametrização do toro, as soluções são curvas em $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ que começaremos por estudar em alguns exemplos.

Exemplo 4.1 $\dot{\alpha} = \dot{\beta}$ ($\omega = \theta$)



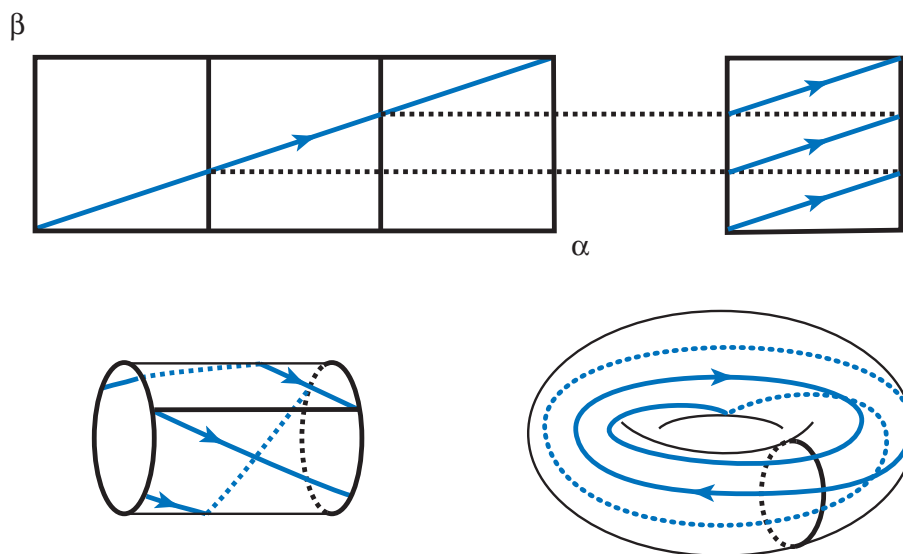
Todas as trajetórias são curvas fechadas porque $(\alpha(t + 2\pi/\omega), \beta(t + 2\pi/\omega)) \approx (\alpha(t), \beta(t))$. Todas as soluções têm período $2\pi/\omega = 2\pi/\theta$. Cada trajetória cruza cada paralelo e cada meridiano do toro exatamente uma vez.

Exemplo 4.2 $2\dot{\alpha} = \dot{\beta}$ ($2\omega = \theta$)



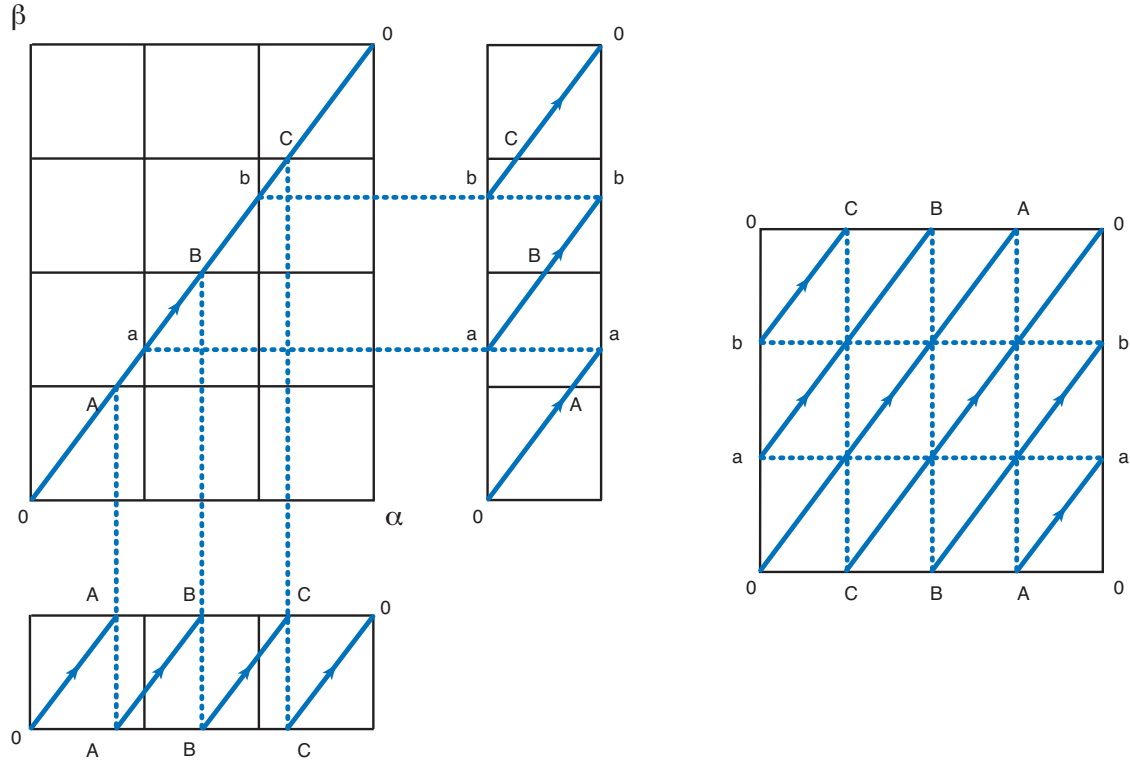
Todas as trajetórias são curvas fechadas, porque as soluções com $\alpha(0) \neq 0$ têm período $2\pi/\omega$: este é o menor período comum entre as duas últimas coordenadas $(z(t), u(t))$, que têm período $2\pi/\theta = \pi/\omega$, e as duas primeiras, $(x(t), y(t))$, que têm período $2\pi/\omega$. Cada trajetória cruza cada meridiano do toro exatamente uma vez e cruza cada paralelo do toro duas vezes.

Exemplo 4.3 $\dot{\alpha} = 3\dot{\beta}$ ($\omega = 3\theta$)



Todas as trajetórias são curvas fechadas. Todas as soluções com $\beta(0) \neq 0$ têm período $2\pi/\theta$ e se $\beta(0) = 0$ o período é $2\pi/\omega = 2\pi/3\theta$. Cada trajetória cruza cada meridiano do toro exatamente três vezes e cruza cada paralelo do toro uma vez.

Exemplo 4.4 $4\dot{\alpha} = 3\dot{\beta}$ ($4\omega = 3\theta$)



Se $\alpha(0) \neq 0$ e $\beta(0) \neq 0$ então as duas primeiras coordenadas têm período $2\pi/\omega$ e as duas últimas têm período $2\pi/\theta$. Como $4\omega = 3\theta$ então $4/\theta = 3/\omega$ e por isso o menor período comum a todas as coordenadas é assim $6\pi/\omega = 8\pi/\theta$. Por isso todas as trajetórias são curvas fechadas, ou seja, todas as soluções são periódicas com período $6\pi/\omega = 8\pi/\theta$. Cada trajetória cruza cada meridiano do toro exatamente três vezes e cruza cada paralelo do toro quatro vezes.

Em todos os exemplos acima encontramos trajetórias fechadas sobre o toro. Isto acontecerá sempre que existirem p e q inteiros tais que $q\omega = p\theta$:

Teorema 4.1 Se $\omega/\theta \in \mathbf{Q}$ então toda solução de $\dot{x} = Tx$ para o operador T acima é periódica.

Demonstração:

A trajetória será fechada se a reta $(\alpha(t), \beta(t))$ definida em (4.1) passar por dois pontos de $\mathbf{R}^2$ que são enviados por $\mathcal{P}$ no mesmo ponto do toro, isto é, se existir algum valor $t_0 \neq 0$ de t para o qual $(\alpha(t_0), \beta(t_0)) \approx (\alpha_0, \beta_0)$. Se $\omega/\theta = p/q$ com p e q inteiros, então $p/\omega = q/\theta$. Tomando $t_0 = 2\pi p/\omega = 2\pi q/\theta$, obtemos

$$(\alpha(t_0), \beta(t_0)) - (\alpha_0, \beta_0) = (\omega t_0, \theta t_0) = (2\pi p, 2\pi q) \quad (4.2)$$

de onde se conclui que $(\alpha(t_0), \beta(t_0)) \approx (\alpha_0, \beta_0)$. $\square$

Teorema 4.2 *Se $\omega/\theta \notin \mathbf{Q}$ então as únicas soluções periódicas de $\dot{x} = Tx$ para o operador T acima são as que estão contidas nos autoespaços $V_{\pm i\theta}$ e $V_{\pm i\omega}$.*

Demonstração:

Queremos mostrar que a reta $(\alpha(t), \beta(t))$ definida em (4.1) nunca passa em dois pontos de $\mathbf{R}^2$ que são transformados por $\mathcal{P}$ no mesmo ponto do toro. Suponhamos que exista $t_0 \neq 0$ para o qual $(\alpha(t_0), \beta(t_0)) \approx (\alpha_0, \beta_0)$, ou seja, que existam p e $q \in \mathbf{Z}$ para os quais é válida a equação (4.2). Então $t_0 = 2\pi p/\omega = 2\pi q/\theta$ donde se conclui que $\omega/\theta = p/q$. $\square$

Como o toro é um subconjunto compacto de $\mathbf{R}^4$, toda sucessão contida nele tem pelo menos um ponto de acumulação. No caso em que $\omega/\theta \notin \mathbf{Q}$ os pontos de acumulação das soluções não periódicas são o toro todo!

Teorema 4.3 *A imagem por $\mathcal{P}$ de uma reta de inclinação irracional é uma curva densa em $\mathbf{T}^2$.*

Demonstração:

A reta $(\alpha(t), \beta(t))$ definida em (4.1) intersecta o feixe de retas verticais $\alpha = \rho + 2\pi N$ com $N \in \mathbf{Z}$ quando $t = (\rho + 2\pi N - \alpha_0)/\omega$, ou seja, nos pontos

$$(\alpha, \beta) = (\rho + 2\pi N, \beta_0 + (\rho + 2\pi N - \alpha_0)\theta/\omega) \approx (\rho, \beta_0 + (\rho + 2\pi N - \alpha_0)\theta/\omega)$$

Cada reta vertical é transformada por $\mathcal{P}$ em um meridiano do toro e como as retas que escolhemos estão a uma distância $2\pi N$ umas das outras, elas são todas transformadas no mesmo meridiano. Se mostrarmos que a imagem da reta intersecta cada meridiano de $\mathbf{T}^2$ em um conjunto denso no meridiano, como todo ponto do toro pertence a algum meridiano, então todo ponto de $\mathbf{T}^2$ poderá ser aproximado por pontos da forma $\mathcal{P}(\alpha(t), \beta(t))$, $t \in \mathbf{R}$ sobre o meridiano e portanto a imagem da reta será densa no toro. A demonstração deste último fato é feita separadamente. $\square$

Teorema 4.4 *O conjunto dos pontos de uma circunferência obtidos a partir de um ponto p_0 por rotação de ângulos $2\pi\alpha N$ com $\alpha \notin \mathbf{Q}$ e $N \in \mathbf{Z}$ é denso na circunferência.*

Demonstração:

Se $\alpha \notin \mathbf{Q}$ é fácil adaptar a demonstração do Teorema 4.3 para mostrar que os pontos $\mathcal{C}(\rho + 2\pi\alpha N)$ são todos distintos: $\rho + 2\pi\alpha N \sim \rho + 2\pi\alpha M$ se e só se $(\rho + 2\pi\alpha N(\rho + 2\pi\alpha M))/2\pi = \alpha(N - M) \in \mathbf{Z}$ o que é impossível se $M, N \in \mathbf{Z}$, $\alpha \notin \mathbf{Q}$.

Queremos agora mostrar que dado $\rho \in [0, 2\pi[$ todo ponto na circunferência pode ser aproximado por pontos da forma $\mathcal{C}(\rho + 2\pi\alpha N) = c(2\pi m(\alpha N + \rho/2\pi))$ onde $m(x)$ é a mantissa de x definida em 4) na secção 4.2.1. Como são todos distintos os $q + 1$ pontos do intervalo $[0, 2\pi[$:

$$\rho, 2\pi m(\alpha + \rho/2\pi), 2\pi m(2\alpha + \rho/2\pi), \dots, 2\pi m(q\alpha + \rho/2\pi)$$

então pelo menos dois dentre eles estão a uma distância menor que $2\pi/q$ — caso contrário a soma de suas distâncias seria maior que o comprimento do intervalo $[0, 2\pi[$. Estes pontos não aparecem necessariamente dispostos nesta ordem em $[0, 2\pi[$. Existem então j e $k \in \mathbf{Z}$, $0 \leq j, k < q$ tais que

$$0 < m(j\alpha + \rho/2\pi) - m(k\alpha + \rho/2\pi) < 1/q \quad (4.3)$$

isto é, os dois pontos obtidos começando em $p_0 = c(\rho)$ rodando j e k vezes de um ângulo $2\pi\alpha$, determinam sobre a circunferência um ângulo menor que $2\pi/q$. A expressão (4.3) pode ser escrita tomando $\theta = 2\pi m(k\alpha + \rho/2\pi)$ e $s = j - k$ e passa a ser:

$$0 < m(s\alpha + \theta/2\pi) - m(\theta/2\pi) < 1/q$$

Isto quer dizer que o ângulo sobre a circunferência determinado por dois pontos sucessivos da sequência

$$\mathcal{C}(\theta), \mathcal{C}(2\pi(s\alpha + \theta/2\pi)), \mathcal{C}(2\pi(2s\alpha + \theta/2\pi)), \mathcal{C}(2\pi(3s\alpha + \theta/2\pi)), \dots \quad (4.4)$$

é sempre menor que $2\pi/q$. Os pontos da sequência (4.4) são obtidos a partir de p_0 por rotações de múltiplos de $2\pi s\alpha$ e a distância entre dois pontos sucessivos da sequência (4.4) é menor que o comprimento do arco da circunferência de raio r compreendido entre eles, que é $2\pi r/q$.

Assim um ponto qualquer de $\mathbf{S}^1(r)$ está sempre entre dois pontos sucessivos da sequência (4.4) e por isso a uma distância menor que $\pi r/q$ de algum dos pontos da circunferência obtidos a partir de p_0 por rotações sucessivas de ângulos $2\pi s\alpha$. $\square$

Bibliografia

- V.I.Arnold, *Équations Différentielles Ordinaires*, Mir, Moscou 1974
- M.W.Hirsch e S.Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, N.York 1974
- J.Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro 1979