

Trajectórias Planas

Índice

1 Trajectórias	1
1.1 exercícios	2
2 Velocidade, pontos regulares e singulares	2
2.1 exercícios	3
3 Pontos singulares e pontos de reversão	4
3.1 exercícios	4
4 Coordenadas polares	5
4.1 exercícios	5
4.2 extensão das coordenadas polares, $\rho < 0$	6
4.3 exercícios	6

1 Trajectórias

Podemos representar o movimento da ponta de uma caneta sobre uma folha de papel se descrevermos as coordenadas do ponto onde está a caneta em cada instante t . O percurso da ponta da caneta fica determinado por sua posição $\gamma(t) = (x, y)$ dada por duas funções $f(t)$ e $g(t)$ que descrevem o ponto $x = f(t)$ e $y = g(t)$ sobre o papel. Uma aplicação $\gamma : I \longrightarrow \mathbf{R}^2$ de um intervalo no plano, como a que descreve o movimento da ponta da caneta é chamada uma **trajectória** no plano.

Um exemplo de trajectória é a aplicação $(f(t), g(t))$ com $f(t) = t$ e $g(t) = t^2$ que descreve o caminho percorrido pela ponta de uma caneta que desenha uma parábola: a segunda coordenada, $g(t)$, é sempre o quadrado da primeira coordenada, $f(t)$.

O **lugar geométrico** da trajectória $(f(t), g(t)) = \gamma(t)$ é o conjunto dos pontos na imagem de $\gamma(t)$:

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \exists t \in I : x = f(t) \quad y = g(t)\}$$

ou seja, o desenho que resulta do movimento da caneta. Há muitos movimentos que produzem o mesmo desenho o que quer dizer que duas trajectórias diferentes podem ter o mesmo lugar geométrico. Por exemplo, a parábola $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = x^2\}$ é o lugar geométrico de $(f(t), g(t)) = (t, t^2)$ e também da trajectória $(\tilde{f}(t), \tilde{g}(t)) = (-t, t^2)$. No primeiro caso a parábola é desenhada da esquerda para a direita e no segundo caso da direita para a esquerda. Quando desenhamos lugares geométricos acrescentamos uma seta que aponta no sentido em que a curva é percorrida quando t aumenta. O lugar geométrico é também chamado uma **curva parametrizada**, a aplicação γ é dita uma **parametrização** da curva e a variável t o **parâmetro** da curva.

O lugar geométrico da trajectória $(f_1(t), g_1(t)) = (\cos t, \cos^2 t)$ também está contido na parábola

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = x^2\}$$

embora só os pontos da parábola com primeira coordenada $f_1(t)$ entre -1 e 1 estejam no lugar geométrico de $(f_1(t), g_1(t))$. Neste caso não desenhamos setas no lugar geométrico da trajectória porque a parábola é percorrida ora para a esquerda, ora para a direita, alternadamente, por uma caneta que vai acabar furando o papel.

Outro exemplo importante de trajectória é dado por $(f(t), g(t)) = (\cos t, \sin t)$. É fácil ver que todos os pontos $(x, y) = (f(t), g(t))$ satisfazem $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ e por isso o lugar geométrico desta trajectória está contido na circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1. O segmento de recta que liga $(f(t), g(t))$ à origem (isto é, o raio da circunferência que passa por $(f(t), g(t))$) faz um ângulo t com o eixo horizontal (lembre-se do círculo trigonométrico) e por isso a circunferência é percorrida no sentido anti-horário quando t cresce. Quando t percorre o intervalo $[0, 2\pi]$ a ponta da caneta dá uma volta completa na circunferência.

O lugar geométrico de uma trajectória pode ser representado usando o comando ‘plot’ em Maple. As instruções a seguir representam os lugares geométricos das trajectórias descritas até agora. Para obter informação mais detalhada sobre estas instruções consulte o ‘Help’ de Maple.

```
>restart; with(linalg):
> f:=t;g:=t^2;
> curvaA:=[f,g,t=-4..5];
> plot(curvaA,-5..5,0..25);
> fB:=-t; gB:=t^2;
> curvaB:=[fB,gB,t=-4..5];
> plot(curvaB,-5..5,0..25);
> curvaC:=[cos(t),(cos(t))^2];
> plot([curvaC[1],curvaC[2],t=0..2*Pi],-2..2,-2..2);
> plot([curvaC[1],curvaC[2],t=0..Pi/2],-2..2,-2..2);
> plot([curvaC[1],curvaC[2],t=Pi/2..Pi],-2..2,-2..2);
> curvaD:=[cos(t),sin(t)];
> plot([curvaD[1],curvaD[2],t=0..2*Pi],-2..2,-2..2);
> plot([curvaD[1],curvaD[2],t=Pi/5..2*Pi/5],-2..2,-2..2);
> plot([curvaD[1],curvaD[2],t=0..Pi/3],-2..2,-2..2);
```

1.1 exercícios

1. Descreva o lugar geométrico das trajectórias $(f(t), g(t))$ com $t \in \mathbf{R}$, dadas por cada uma das colunas da tabela a seguir. Verifique seus resultados representando as trajectórias em Maple: depois de definir em Maple as expressões f e g das coordenadas como função do parâmetro t , que varia no intervalo $[a, b]$, use o comando

```
plot([f,g,t=a..b]);
```

O exercício só tem interesse se voce tentar descobrir qual é o lugar geométrico **antes** de usar Maple.

$f(t)$	$\sin t$	$3 \cos t$	$3 \cos(t+5)$	$2 \cos t + \sqrt{3} \sin t$	$5t + 2(1-t)$	e^t	$\cos^2 t$	t^3
$g(t)$	$1 - \cos^2 t$	$2 \sin t$	$2 \sin(t+5)$	$2\sqrt{3} \cos t + \sin t$	$-3t + 4(1-t)$	e^{-t}	$\sin^2 t$	$ t^3 $

2. Descreva o lugar geométrico da trajectória $(f(t), g(t))$ com $t \in [0, 2]$ ond f e g são dadas por:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}t + (1-t) & \text{se } t \in [0, 1] \\ -2(t-1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(2-t) & \text{se } t \in [1, 2] \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} + (1-t) & \text{se } t \in [0, 1] \\ 2(t-1) + \frac{(2-t)}{2} & \text{se } t \in [1, 2] \end{cases}$$

3. * Encontre uma trajectória $(f(t), g(t))$ com $t \in [0, 6]$ cujo lugar geométrico seja um hexágono regular percorrido no sentido anti-horário.
4. Qual a relação entre os lugares geométricos das trajectórias $(f(t), g(t)) = (e^t + e^{-t}, e^t - e^{-t})$ e $(\tilde{f}(t), \tilde{g}(t)) = (e^{t-1} + e^{-t-1}, e^{t-1} - e^{-t-1})$ com $t \in \mathbf{R}$?
5. Mostre que existe uma infinidade de trajectórias que têm como lugar geométrico a curva $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = x^3\}$.

2 Velocidade, pontos regulares e singulares

Se uma partícula se mover no plano com trajectória $(f(t), g(t))$ e se as funções $f(t)$ e $g(t)$ forem deriváveis, podemos definir a **velocidade instantânea** da partícula em $t = t_0$ como sendo o vector $v = (f'(t_0), g'(t_0))$. A **rapidez** com que a trajectória é percorrida instantaneamente é dada pelo módulo da velocidade:

$$|v| = |(f'(t_0), g'(t_0))| = \sqrt{(f'(t_0))^2 + (g'(t_0))^2}.$$

Por exemplo, o lugar geométrico da trajectória $(\cos(t), \sin(t))$, $t \in [-\pi, \pi]$, é a circunferência de centro na origem e raio 1. Para $t = 0$ a partícula está no ponto $(1, 0)$ e ao passar neste ponto a velocidade é $(-\sin(0), \cos(0)) = (0, 1)$. Em outro ponto t qualquer, a velocidade é $v = (-\sin(t), \cos(t))$ e o seu módulo será $|v| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$.

Outra trajectória que tem como lugar geométrico a circunferência de centro na origem e raio 1 é dada por $(\cos(2t), \sin(2t))$. Quando t varia entre $[-\pi/2, \pi/2]$ o ponto percorre toda a circunferência, o que dá a ideia de que o ponto se move mais depressa que na trajectória anterior. O vector velocidade neste caso é $v = (-2\sin(t), 2\cos(t))$ e a rapidez em cada instante é $|v| = \sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)} = 2$.

O lugar geométrico de uma trajectória no plano dada por duas funções diferenciáveis $x = f(t)$, $y = g(t)$, tem sempre uma recta tangente nos pontos em que a derivada $f'(t_0) \neq 0$. Podemos afirmar isto com certeza, porque este lugar geométrico é o gráfico de $y = g(f^{-1}(x))$ que é uma função derivável. A recta tangente tem inclinação $m = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$ e passa por $(f(t_0), g(t_0))$ (porque?). Esta é a inclinação do vector velocidade da trajectória em $t = t_0$, isto é, quando $f'(t_0) \neq 0$ a recta tangente é paralela ao vector velocidade $(f'(t_0), g'(t_0))$.

Outra maneira de ver isto é observar que a recta tangente, se existir, será o limite das secantes ao lugar geométrico, cuja inclinação é:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)}{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)}{\Delta t}}{\frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}} = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}.$$

Se $f'(t_0) = 0$ e $g'(t_0) \neq 0$ o vector velocidade é vertical. Não podemos obter a recta tangente pelo mesmo método porque ela deveria ter inclinação dada por:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)}{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)}{\Delta t}}{\frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}}$$

com o denominador tendendo para $f'(t_0) = 0$. A recta tangente pode ser definida como a recta que passa por $(f(t_0), g(t_0))$ e é paralela a $(f'(t_0), g'(t_0))$, que é um vector vertical.

Por exemplo, a trajectória $x = t^2$, $y = t$ tem vector velocidade $v = (2t, 1)$. Em $t = 0$ o vector velocidade é $(0, 1)$ e a trajectória tem tangente vertical (faça o seu gráfico). O lugar geométrico definido por esta trajectória não é o gráfico de uma função derivável $\phi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, mas a sua recta tangente está bem definida.

Um ponto $(f(t_0), g(t_0))$ de uma trajectória no plano dada por duas funções diferenciáveis $x = f(t)$, $y = g(t)$ em que $f'(t_0) \neq 0$ ou $g'(t_0) \neq 0$ é chamado um **ponto regular** da trajectória. Num ponto regular a recta tangente à trajectória está sempre bem definida.

Quando $(f'(t_0), g'(t_0)) = (0, 0)$ dizemos que o ponto $(f(t_0), g(t_0))$ é **singular**.

2.1 exercícios

1. Quais são os pontos regulares das trajectórias dos exercícios 1.1? Use Maple para representar no mesmo gráfico cada uma das trajectórias e a sua recta tangente em um ponto regular.
2. Use Maple para representar o lugar geométrico da trajectória $(f(t), g(t)) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$ com $t \in [0, 3\pi]$ que é conhecido pelo nome de **astróide**. Quais são os pontos regulares do astróide?
3. Escreva um procedimento em Maple que, dadas f e g duas funções deriváveis, um número n e um intervalo $[a, b]$, represente no mesmo gráfico a trajectória $(f(t), g(t))$ e as suas rectas tangentes (se existirem) em n pontos $(f(t_j), g(t_j))$, $j = 0, \dots, n$ com $t_0 = a$ e $t_{j-1} - t_j = (b - a)/n$.
4. Leia mais sobre trajectórias no “Tratado das Curvas” de Gomes Teixeira.
5. Descubra: onde fica a praça Gomes Teixeira; quem foi Gomes Teixeira.

3 Pontos singulares e pontos de reversão

Quando uma trajectória tem um ponto singular, isto é, quando $f'(t_0) = 0$ e $g'(t_0) = 0$, a curva dada por $x = f(t)$, $y = g(t)$ pode ainda assim ter uma tangente bem definida, como é o caso de $f(t) = t^3$, $g(t) = t^6$ para $t = 0$. Neste exemplo o lugar geométrico dos pontos $x = f(t)$, $y = g(t)$ é a parábola $y = x^2$, que sabemos ter uma recta tangente em todos os pontos. No entanto o ponto $(f(0), g(0)) = (0, 0)$ não é regular.

Outro exemplo de trajectória com um ponto não regular é dado por de $f(t) = t^3$, $g(t) = t^2$. Para $t = 0$ esta curva tem um “bico” como se pode ver fazendo o seu gráfico com Maple para $t \in [-1, 1]$.

No primeiro exemplo a trajectória (t^3, t^6) tem vector velocidade $v(t) = (3t^2, 6t^5)$. O vector unitário paralelo a $v(t)$ para $t \neq 0$ é:

$$\frac{1}{|v(t)|}v(t) = (x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{\sqrt{9t^4 + 36t^{10}}}(3t^2, 6t^5) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^6}}(1, 2t^3).$$

Em $t = 0$ o vector $\frac{1}{|v(t)|}v(t) = (x_1(t), x_2(t))$ não está definido mas quando $t \rightarrow 0$ as suas componentes têm limite :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} x_1(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^2}{\sqrt{9t^4 + 36t^{10}}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^6}} = 1 \\ \lim_{t \rightarrow 0} x_2(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{6t^5}{\sqrt{9t^4 + 36t^{10}}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^3}{\sqrt{1 + 4t^6}} = 0\end{aligned}$$

No segundo exemplo a trajectória (t^3, t^2) tem vector velocidade $v(t) = (3t^2, 2t)$. O vector unitário paralelo a $v(t)$ para $t \neq 0$ é:

$$\frac{1}{|v(t)|}v(t) = (x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{\sqrt{9t^4 + 4t^2}}(3t^2, 2t).$$

Neste exemplo a primeira componente $x_1(t)$ de $\frac{1}{|v(t)|}v(t) = (x_1(t), x_2(t))$ tem limite quando $t \rightarrow 0$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^2}{\sqrt{9t^4 + 4t^2}} = 0$$

mas a segunda componente $x_2(t)$ de $\frac{1}{|v(t)|}v(t) = (x_1(t), x_2(t))$ não tem limite quando $t \rightarrow 0$, ou melhor, há dois limites diferentes quando t tende a zero por valores positivos ou negativos:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0^+} x_2(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t}{\sqrt{9t^4 + 4t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{9t^2 + 4}} = 1 \\ \lim_{t \rightarrow 0^-} x_2(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{2t}{\sqrt{9t^4 + 4t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-2}{\sqrt{9t^2 + 4}} = -1\end{aligned}$$

Em termos intuitivos, a trajectória se aproxima da origem com “velocidade paralela” a $(-1, 0)$ e se afasta da origem com “velocidade paralela” a $(+1, 0)$.

Em geral, considere uma trajectória $(f(t), g(t))$ com f e g deriváveis e com um ponto singular em t_0 , ou seja, em que $v(t_0) = (f'(t_0), g'(t_0)) = (0, 0)$. Suponha que para valores de t próximos de t_0 , $t \neq t_0$, $v(t) \neq (0, 0)$, e seja $\frac{1}{|v(t)|}v(t) = (x_1(t), x_2(t))$ o vector unitário paralelo a $v(t)$ para $t \neq t_0$. Dizemos que $(f(t_0), g(t_0))$ é um **ponto de reversão** se existirem os limites laterais:

$$L_{1+} = \lim_{t \rightarrow 0^+} x_1(t) \quad L_{1-} = \lim_{t \rightarrow 0^-} x_1(t) \quad L_{2+} = \lim_{t \rightarrow 0^+} x_2(t) \quad L_{2-} = \lim_{t \rightarrow 0^-} x_2(t)$$

e se $(L_{1+}, L_{2+}) = -(L_{1-}, L_{2-})$. Neste caso, apesar de a curva ter um bico, a recta tangente a ela está bem definida!

3.1 exercícios

1. Quais são os pontos singulares das trajectórias dos exercícios 1.1 (aproveite o trabalho já feito para os exercícios 2.1)? Entre estes, quais são os pontos de reversão?
2. Quais são os pontos singulares do astróide (ver exercícios 2.1) ? Quais os pontos de reversão? represente no mesmo gráfico o astróide e a sua recta tangente em um dos pontos de reversão.

4 Coordenadas polares

Até agora descrevemos a posição de um ponto no plano usando dois números que medem a distância do ponto a duas rectas, os eixos coordenados. Chama-se a isto descrever a posição do ponto em **coordenadas rectangulares**. Há outras maneiras de descrever a posição de um ponto. Uma delas, o sistema de **coordenadas polares**, consiste em fixar como referencial uma semi-recta cujo extremo chamaremos de origem. A posição de qualquer ponto fica determinada se conhecermos a sua distância $\rho \geq 0$ à origem e o ângulo θ entre o segmento que liga o ponto à origem e a semi-recta de referência.

Por exemplo, se tomarmos como semi-recta de referência o semi-eixo $\{(x, y) : x \geq 0\}$, o ponto que tem coordenadas rectangulares $(1, 1)$ está a uma distância de $\rho = \sqrt{2}$ da origem e o segmento que o liga à origem faz um ângulo de $\theta = \pi/4$ com o eixo. As suas coordenadas polares são $(\rho, \theta) = (\sqrt{2}, \pi/4)$. Em geral o ponto de coordenadas polares (ρ, θ) terá coordenadas rectangulares $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.

Os dois números (ρ, θ) determinam a posição de um ponto no plano sem ambiguidade. A recíproca não é verdade: as coordenadas polares $(\rho, \theta) = (\sqrt{2}, \pi/4)$ e $(\rho, \theta) = (\sqrt{2}, 2\pi + \pi/4)$ descrevem exactamente o mesmo ponto. Esta ambiguidade pode ser resolvida escolhendo um intervalo de comprimento 2π para as medidas de ângulos, por exemplo exigindo que $\theta \in [0, 2\pi[$. Normalmente é mais prático permitir a ambiguidade.

Podemos descrever uma trajectória em coordenadas polares dando duas funções $\rho = f(t)$ e $\theta = g(t)$. Por exemplo, a trajectória $\rho = t$, $\theta = \pi/4$, com $t \geq 0$ tem como lugar geométrico a diagonal do primeiro quadrante. A trajectória $\rho = 3$, $\theta = t$, com $t \in [0, 2\pi[$ tem como lugar geométrico a circunferência de centro na origem e raio 3. Em geral estamos interessados em trajectórias do tipo $\rho = f(t)$, $\theta = t$, ou seja, no gráfico da função $f(t)$ em coordenadas polares. Por exemplo o lugar geométrico de $\rho = t^2$, $\theta = t$, $t \in [0, 4\pi]$ é uma espiral — a distância ρ à origem aumenta à medida que a trajectória dá duas voltas. Isto pode ser visto executando as instruções Maple a seguir:

```
> rho:=t^2;
> theta:=t;
> plot([rho,theta,t=0..4*Pi],coords=polar);
```

Observe que usamos aqui a ambiguidade de permitir ângulos em um intervalo de comprimento 4π para obter duas voltas da espiral. Se quisermos uma espiral com mais voltas podemos usar um intervalo maior para t .

A trajectória do exemplo acima pode ser descrita em coordenadas rectangulares como $\gamma(t) = (t^2 \cos t, t^2 \sin t)$ e tem vector velocidade $\gamma'(t) = (2t \cos t, 2t \sin t) + (-t^2 \sin t, t^2 \cos t)$. Em geral se $\rho(t)$ for uma função derivável, o vector velocidade de $\gamma(t) = \rho(t)(\cos t, \sin t)$ será $\gamma'(t) = \rho'(t)(\cos t, \sin t) + \rho(t)(-\sin t, \cos t)$. A rapidez desta trajectória será

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\rho(t))^2 + (\rho'(t))^2}$$

de onde se conclui que os únicos pontos singulares são pontos em que $\rho(t) = \rho'(t) = 0$.

4.1 exercícios

1. Esboce o lugar geométrico das trajectórias em coordenadas polares a seguir. Verifique os seus resultados usando Maple. De novo, o exercício só vale a pena se voce tentar desenhar a trajectória antes de usar Maple.

- (a) $\rho = e^t$, $\theta = t$, $t \in [-3\pi, 3\pi]$
- (b) $\rho = t^2$, $\theta = t$, $t \in [-\pi, \pi]$
- (c) $\rho = \ln t$, $\theta = t$, $t \in [1, 6\pi]$
- (d) $\rho = 1 + \sin t$, $\theta = t$, $t \in [0, 2\pi]$
- (e) $\rho = 1 + \sin 5t$, $\theta = t$, $t \in [0, 2\pi]$
- (f) $\rho = \sin(t/2)$, $\theta = t$, $t \in [0, 2\pi]$
- (g) $\rho = \cos^2 3t$, $\theta = t$, $t \in [0, 2\pi]$
- (h) $\rho = \cos^2 6t$, $\theta = t$, $t \in [0, 2\pi]$
- (i) $\rho = 1 + \cos^2 6t$, $\theta = t$, $t \in [0, 2\pi]$

- (j) $\rho = 2 + \cos 4t$, $\theta = t$, $t \in [0, 2\pi]$
- (k) $\rho = 2 + \cos 4t/3$, $\theta = t$, $t \in [0, 6\pi]$

2. Para cada uma das trajectórias do exercício 1, calcule o vector velocidade e determine os pontos singulares. Quais destas trajectórias têm pontos de reversão?
3. Use Maple para representar no mesmo gráfico o lugar geométrico de cada trajectória do exercício 1 e suas rectas tangentes em pelo menos 3 pontos do interior do domínio de $\rho(t)$.

4.2 extensão das coordenadas polares, $\rho < 0$

Para uma trajectória em coordenadas polares $\rho(t), \theta(t)$ temos que exigir que a função $\rho(t)$ tenha valores sempre positivos. No entanto, a expressão $-3(\cos \theta, \sin \theta)$ está bem definida e representa o ponto P , onde $-P = 3(\cos \theta, \sin \theta)$ que é o ponto com coordenadas polares $3, \theta$. É conveniente continuar dizendo que o ponto P tem coordenadas polares $(-3, \theta)$, embora formalmente devêssemos mudar estas coordenadas para $3(\cos \theta + \pi, \sin \theta + \pi) = -3(\cos \theta, \sin \theta)$. Em geral, diremos que o ponto com coordenadas polares ρ, θ , mesmo com $\rho < 0$, é o ponto que tem coordenadas rectangulares $\rho(\cos \theta, \sin \theta)$. Ou seja, o ponto com coordenadas polares ρ, θ , com $\rho < 0$, é um ponto a uma distância $|\rho|$ da origem. Esta ambiguidade na representação de um ponto em coordenadas polares é prática, da mesma maneira que a ambiguidade na medida dos ângulos. Experimente as instruções Maple a seguir:

```
> rho:=t-1;
> theta:=t;
> plot([rho,theta,t=0..4*Pi],coords=polar);
> plot([rho,theta,t=0..1],coords=polar);
> plot([rho,theta,t=1..4*Pi],coords=polar);
> rho:=- (t-1);
> theta:=t+Pi;
> plot([rho,theta,t=0..1],coords=polar);
```

4.3 exercícios

1. Esboce o lugar geométrico das trajectórias em coordenadas polares a seguir. Verifique os seus resultados usando Maple.
 - (a) $\rho = -t^2$, $\theta = t$, $t \in [-\pi, \pi]$
 - (b) $\rho = -2 + \sin t$, $\theta = t$, $t \in [0, 2\pi]$
 - (c) $\rho = \sin t$, $\theta = t$, $t \in [0, 2\pi]$
 - (d) $\rho = \sin 3t$, $\theta = t$, $t \in [0, 2\pi]$
 - (e) $\rho = \sin 5t$, $\theta = t$, $t \in [0, 2\pi]$
 - (f) $\rho = (t-a)(t+a)$, $\theta = t$, $t \in [-\pi, \pi]$ para $0 < a < \pi$.
2. Para cada uma das trajectórias do exercício 1, calcule o vector velocidade e determine os pontos singulares. Quais destas trajectórias têm pontos de reversão?
3. Use Maple para representar no mesmo gráfico o lugar geométrico de cada trajectória do exercício 1 e suas rectas tangentes em pelo menos 3 pontos do interior do domínio de $\rho(t)$.