

Cálculo em Computadores — 2007

Formas quadráticas, cônicas e quádricas não degeneradas

Índice

1	formas quadráticas	3
1.1	exemplos em Maple	3
1.2	exercícios	4
2	*polinômios e formas quadráticas	4
2.1	polinômios	4
2.2	polinômios homogêneos	5
2.3	exercícios	6
3	formas quadráticas e matrizes	6
3.1	exemplo em Maple	7
3.2	exercícios	7
4	formas quadráticas em duas variáveis; cônicas	8
4.0.1	exemplo em Maple	9
4.1	diagonalização	9
4.1.1	exercícios	10
4.1.2	autovalores	11
4.1.3	exercícios	12
4.1.4	cálculo dos autovalores	12
4.1.5	exercícios	12
4.1.6	autovalores e formas quadráticas	13
4.1.7	exercícios	14
4.1.8	* exercícios adicionais de álgebra linear	14
4.2	cônicas	14
4.2.1	classificação das cônicas	14
4.2.2	exemplo em Maple	15
4.2.3	exercícios	15
5	superfícies de revolução	16
5.1	elipsóide de revolução	16
5.2	exemplos em Maple	16
5.3	exercícios	17
5.4	hiperbolóides de revolução	17
5.5	exercícios	18
6	formas quadráticas em três variáveis	18
6.1	rotações no espaço	18
6.2	exercícios	18
6.3	diagonalização	19
6.4	exercícios	20
6.5	quádricas	21
6.5.1	elipsóide	21

6.5.2	exercícios	21
6.5.3	hiperbolóides	22
6.5.4	exercícios	22
6.5.5	classificação das quádricas	22
6.5.6	exercícios	23
7	polinômios outra vez	24
7.1	exercícios	25
8	formas degeneradas	26
8.1	exercícios	26

1 formas quadráticas

Uma forma quadrática em n variáveis é uma aplicação $\mathcal{P} : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ que pode ser escrita como combinação linear de termos da forma $x_i x_j$, com $i, j = 1, \dots, n$, isto é,

$$\mathcal{P}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \alpha_{ij} x_j \quad \alpha_{ij} \in \mathbf{R} \quad (1)$$

Formas quadráticas em 2 variáveis são aplicações da forma $\mathcal{P}(x, y) = axx + bxy + cyy = ax^2 + bxy + cy^2$ como, por exemplo:

$$\mathcal{P}_1(x, y) = x^2 - y^2 \quad \mathcal{P}_2(x, y) = xy \quad \mathcal{P}_3(x, y) = x^2 + y^2 \quad \mathcal{P}_4(x, y) = 2x^2 - xy + \pi y^2$$

Exemplos em três variáveis:

$$\mathcal{Q}_1(x, y, z) = \sqrt{3}z^2 + xy - xz + 2yz \quad \mathcal{Q}_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \mathcal{Q}_3(x, y, z) = xy + xz + yz$$

$$\mathcal{Q}_4(x, y, z) = 2x^2 - xy + \pi y^2 \quad \mathcal{Q}_5(x, y, z) = 3x^2 - 4y^2 + \frac{3}{5}z^2 + 45xy - 87yz + 3xz$$

Formas quadráticas têm um bom comportamento em relação ao produto por um escalar: para qualquer $\lambda \in \mathbf{R}$ e qualquer $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tem-se

$$\mathcal{P}(\lambda X) = \mathcal{P}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\lambda x_i) \alpha_{ij} (\lambda x_j) = \lambda^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j = \lambda^2 \mathcal{P}(X)$$

Uma maneira de obter novas formas quadráticas é compô-las com transformações lineares de $\mathbf{R}^n$. Se $\mathcal{L} : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ for uma transformação linear e $\mathcal{P} : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ for uma forma quadrática, então podemos verificar diretamente na expressão (1) que $\mathcal{P} \circ \mathcal{L} : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ é também uma forma quadrática. Em particular, para qualquer $\lambda \in \mathbf{R}$ e para $X \in \mathbf{R}^n$ tem-se $\mathcal{P}(\mathcal{L}(\lambda X)) = \mathcal{P}(\lambda \mathcal{L}(X)) = \lambda^2 \mathcal{P}(\mathcal{L}(X))$.

1.1 exemplos em Maple

Podemos usar Maple para calcular a composta de $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{L}(x, y)$ onde $\mathcal{L} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ é a transformação linear representada pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Experimente os seguintes comandos em Maple:

```
> restart; with(linalg):
> p1:=x^2-y^2;
> X:=vector(2, [x1,y1]); A:=matrix(2,2, [[Pi,2],[-2,3]]); AX:=evalm(A&*X);
> p2:=subs(x=AX[1], y=AX[2], p1);
> p3:=subs(x1=x, y1=y, p2);
```

Porque é preciso trocar o nome das variáveis para fazer a substituição? Experimente fazer a substituição usando $X = (x, y)$ em vez de (x_1, y_1) e veja o que acontece.

O resultado dos comandos Maple acima é: $p_3 := (\pi x + 2y)^2 - (-2x + 3y)^2$ que não está na forma pedida. Experimente a seguir os seguintes comandos Maple e observe os seus resultados:

```
> p2:=expand(p3);
> p3:=simplify(p2);
> p2:=collect(p3, [x,y], distributed);
```

Podemos calcular $\mathcal{P}_8 = \mathcal{P}_1(\lambda X)$ e $\mathcal{P}_{10} = \mathcal{P}_2(\lambda X)$ usando Maple:

```
> p7:=subs(x=lambda*x,y=lambda*y,p1);
> p8:=collect(p7,lambda);
> p9:=subs(x=lambda*x,y=lambda*y,p2);
> p10:=collect(p9,lambda);
```

e o resultado será, como era de se esperar: $\mathcal{P}_8 = \lambda^2 \mathcal{P}_1(x, y)$ $\mathcal{P}_{10} = \lambda^2 \mathcal{P}_2(x, y)$

1.2 exercícios

1. Sejam $\mathcal{P}(x, y) = x^2 + y^2$ e $\mathcal{Q}(x, y) = xy$. Para cada uma das matrizes abaixo, seja $\mathcal{L} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ a transformação linear por ela representada. Escreva as formas quadráticas $\mathcal{P} \circ \mathcal{L}$ e $\mathcal{Q} \circ \mathcal{L}$ na forma $ax^2 + bxy + cy^2$. (Sugestão: use Maple)

$$L_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad L_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Verifique que o conjunto de todas as formas quadráticas em 2 variáveis (incluindo a forma quadrática $\mathcal{P}(x, y) = 0$), com as operações $(\mathcal{P} + \mathcal{Q})(x, y) = \mathcal{P}(x, y) + \mathcal{Q}(x, y)$ e $(\alpha \mathcal{P})(x, y) = \alpha(\mathcal{P}(x, y))$ para $\alpha \in \mathbf{R}$ é um espaço vetorial. Calcule a dimensão deste espaço vetorial.
3. O conjunto das formas quadráticas em 3 variáveis (incluindo a forma quadrática $\mathcal{Q}(x, y, z) = 0$) também é um espaço vetorial, com operações análogas às do exercício anterior. Calcule a sua dimensão. Generalize os resultados para formas quadráticas de n variáveis.
4. Verifique se é verdade que a composta de uma forma quadrática em duas variáveis com uma translação do plano é uma forma quadrática.

2 *polinômios e formas quadráticas

Esta secção é independente do resto do texto. O leitor pouco curioso pode saltar diretamente para a secção 3.

2.1 polinômios

Os polinômios $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_m x^m$ de uma variável x com $\alpha_i \in \mathbf{R}$ já são nossos conhecidos. Podemos construir novos polinômios a partir dos antigos usando como coeficientes α_i polinômios em outra variável y em vez de números. Por exemplo, começando com $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$ podemos escolher $\alpha_0 = 4 + 3y + y^5$, $\alpha_1 = -y + y^2$, $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 2y^3$ e obter uma nova expressão que pode ser simplificada distribuindo os produtos em relação às somas:

$$\mathcal{P}(x, y) = (4 + 3y + y^5) + (-y + y^2)x + 0x^2 + (2y^3)x^3 = 4 + 3y + y^5 - xy + xy^2 + 2x^3y^3$$

A nova expressão $\mathcal{P}(x, y)$ pode também ser tratada como polinômio da variável y cujos coeficientes são polinômios em x se reescrevermos $\mathcal{P}(x, y) = 4 + (3 - x)y + (x)y^2 + (2x^3 + 1)y^5$.

O processo pode ser repetido para obter polinômios de três ou mais variáveis, se necessário buscando

letras de outros alfabetos ou novos símbolos a seu gosto.¹ A partir do polinômio

$$\tilde{\mathcal{P}}(x, y) = \alpha + \beta_1 x + \beta_2 y + \gamma_1 x^2 + \gamma_2 xy + \gamma_3 y^2 + \delta_1 x^3 + \delta_2 x^2 y + \delta_3 xy^2 + \delta_4 y^3$$

obtemos um novo polinômio de três variáveis $\mathcal{Q}(x, y, z)$ substituindo α , β_i , γ_i e δ_i por polinômios na variável z tomando, por exemplo, $\alpha = 4 + 3z + z^5$, $\beta_1 = -z + z^2$, $\beta_2 = -2z$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = z^5$, $\gamma_3 = 1$, $\delta_1 = z^4$, $\delta_2 = z^3$, $\delta_3 = 0$ e $\delta_4 = -\pi$. Distribuindo as somas em relação aos produtos, obtemos:

$$\mathcal{Q}(x, y, z) = 4 + 3z + z^5 - xz + xz^2 - 2yz + xyz^5 + y^2 + x^3 z^4 + x^2 y z^3 - \pi y^3$$

Podemos definir diretamente um polinômio de n variáveis $(x_1, \dots, x_n)$: primeiro definimos um *monômio*, como produto de um número finito de variáveis escolhidas entre $\{x_1, \dots, x_n\}$, com repetições e omissões, por um número real. A seguir, definimos um polinômio como uma função $\mathcal{P} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ que é a soma de um número finito de monômios. Por exemplo, o polinômio $\mathcal{P}(x, y)$ acima é a soma dos monômios: 4 , $3y$, y^5 , $-xz$, xy^2 e $2x^3 y^5$ e o polinômio $\mathcal{Q}(x, y, z)$ é a soma dos monômios: 4 , $3z$, $-xz$, $-2yz$, y^2 , $-\pi y^3$, xz^4 , z^5 , $x^2 y z^3$, xyz^5 e $x^3 z^4$.

Num polinômio de uma variável o grau é uma informação importante que permite decidir imediatamente o número máximo de raízes, de pontos críticos e o comportamento quando a variável tende para $\pm\infty$. Para polinômios de várias variáveis, podemos definir o grau em cada variável separadamente. Mais interessante é definir o grau de um monômio como a soma dos graus em cada uma das variáveis e o grau de um polinômio como o grau do seu monômio de maior grau. Nos exemplos acima, $\mathcal{P}$ tem grau 8 que é o grau do monômio $2x^3 y^5$, $\tilde{\mathcal{P}}$ tem grau 3 se algum dos δ_i for diferente de zero (os monômios $\delta_1 x^3$, $\delta_2 x^2 y$, $\delta_3 xy^2$ e $\delta_4 y^3$ têm todos grau 3 se $\delta_i \neq 0$) e $\mathcal{Q}$ tem grau 7, atingido nos monômios xyz^5 e $x^3 z^4$.

2.2 polinômios homogêneos

Para $X = (x_1, \dots, x_m)$, se $\mathcal{M}(X)$ for um monômio de grau n em m variáveis então para qualquer $\lambda \in \mathbf{R}$ e qualquer $X \in \mathbf{R}^m$ temos $\mathcal{M}(\lambda X) = \lambda^n \mathcal{M}(X)$. Por exemplo para

$$\mathcal{M}(x, y) = 2x^3 y^5 \quad \text{temos} \quad \mathcal{M}(\lambda x, \lambda y) = 2(\lambda x)^3 (\lambda y)^5 = 2\lambda^8 x^3 y^5 = \lambda^8 \mathcal{M}(x, y)$$

para

$$\mathcal{M}(x, y) = 2x \quad \text{temos} \quad \mathcal{M}(\lambda x, \lambda y) = 2(\lambda x) = \lambda \mathcal{M}(x, y)$$

e para

$$\mathcal{M}(x, y, z) = xyz^5 \quad \text{temos} \quad \mathcal{M}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x)(\lambda y)(\lambda z)^5 = \lambda^7 xyz^5 = \lambda^7 \mathcal{M}(x, y, z).$$

Quando somamos vários monômios para obter um polinômio geralmente perdemos esta propriedade. Os polinômios especiais que mantêm esta propriedade são chamados *polinômios homogêneos* e se caracterizam por todos os seus monômios terem o mesmo grau. Nenhum dos exemplos de polinômios na secção anterior é homogêneo, mas os quatro exemplos a seguir são:

$$\hat{\mathcal{P}}(x, y, z) = 4z^8 + 3yz^7 + y^5 z^3 - xyz^6 + xy^2 z^5 + 2x^3 y^5$$

$$\tilde{\mathcal{P}}(x, y, z) = \alpha z^3 + \beta_1 x z^2 + \beta_2 y z^2 + \gamma_1 x^2 z + \gamma_2 x y z + \gamma_3 y^2 z + \delta_1 x^3 + \delta_2 x^2 y + \delta_3 x y^2 + \delta_4 y^3$$

¹Nos anos 60 algumas pessoas pensavam que as crianças ficavam traumatizadas com a letra x nos livros de Matemática. Resolveram então que livros didáticos usariam variáveis como $\square$, $\bullet$ e outras figuras não traumáticas como os naipes do baralho. As “sentenças matemáticas” eram designadas por palavras para não assustar. Um exemplo de polinômio nesta notação seria:

$$\text{polinômio}(\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit) = 5\clubsuit^2 \diamond \heartsuit - \frac{3}{2} \heartsuit^3 - 2\clubsuit^2 \diamond \spadesuit^4 + 3,14159 \heartsuit^3 \spadesuit^2$$

As potências eram também consideradas difíceis, sendo preferível representá-las como produto. Neste caso teríamos:

$$\text{polinômio}(\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit) = 5\clubsuit\clubsuit\diamond\heartsuit - \frac{3}{2}\heartsuit\heartsuit\heartsuit - 2\clubsuit\clubsuit\diamond\spadesuit\spadesuit\spadesuit\spadesuit + 3,14159\heartsuit\heartsuit\heartsuit\spadesuit\spadesuit$$

A consequência imediata foi o encarecimento dos livros didáticos. Não sei quais os resultados quanto a traumatismos.

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(x, y, z, w) &= 4w^7 + 3zw^6 - xzw^5 - 2yzw^5 + y^2w^5 - \pi y^3w^4 + xz^2w^4 + z^5w^2 + x^2yz^3w + xyz^5 + x^3z^4 \\ \bar{Q}(x, y, z, w) &= 5x + 3y - \pi z - 589w\end{aligned}$$

Podemos escrever um polinômio qualquer como soma de polinômios homogêneos, agrupando os monômios de mesmo grau que o compõem. Uma forma quadrática nada mais é que um polinômio homogêneo de grau 2. Segue-se que as formas quadráticas são caracterizadas por serem os únicos polinômios $\mathcal{P}$ que satisfazem $\mathcal{P}(\lambda X) = \lambda^2 \mathcal{P}(X)$ para quaisquer $\lambda \in \mathbf{R}$, $X \in \mathbf{R}^n$.

2.3 exercícios

1. Verifique que o conjunto de todos polinômios homogêneos de grau n em 2 variáveis (incluindo o polinômio $\mathcal{P}(x, y) = 0$), com as operações definidas no exercício 2) da secção 1, é um espaço vetorial. Calcule a dimensão deste espaço vetorial.
2. Mostre que se $\mathcal{P} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ é um polinômio e se $\mathcal{L} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ é uma transformação linear, então $\mathcal{P} \circ \mathcal{L}$ é um polinômio. Qual a relação entre os graus de $\mathcal{P}$ e de $\mathcal{P} \circ \mathcal{L}$? (Cuidado!)
3. Verifique se é verdade que a composta de uma forma quadrática em duas variáveis com uma translação do plano é um polinômio de grau 2.

3 formas quadráticas e matrizes

Uma matriz quadrada A é dita *simétrica* se for igual à sua transposta A^T . Se escrevermos $A = (a_{ij})$, então $A^T = (a_{ji})$ e estamos pedindo que $a_{ij} = a_{ji}$. A partir de uma matriz simétrica $A = (a_{ij})$, $n \times n$ podemos contruir uma forma quadrática escrevendo $\mathcal{P}(X) = X^T \cdot A \cdot X$ onde $\cdot$ representa o produto de matrizes, isto é

$$\mathcal{P}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} x_j$$

Observe que estamos multiplicando uma matriz $1 \times n$ por A que é $n \times n$ e por outra matriz $n \times 1$. Por exemplo, a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

é simétrica e define a forma quadrática:

$$\mathcal{P}(x, y) = (x, y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} 5x + 7y \\ 7x - y \end{pmatrix} = 5x^2 + 7xy + 7yx - y^2 = 5x^2 + 14xy - y^2$$

Um exemplo de matriz simétrica 3×3 é

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

que define a forma quadrática em três variáveis:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(x, y, z) &= (x, y, z) \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (3x + 2y + 3z, 2x - 4y - 4z, 3x - 4y + 5z) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= 3x^2 - 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 8yz + 6xz\end{aligned}$$

(lembre-se que o produto de matrizes é associativo).

Dada uma forma quadrática em n variáveis, $\mathcal{P}$, podemos sempre encontrar uma matriz simétrica A , $n \times n$, para a qual $\mathcal{P}(X) = X^T \cdot A \cdot X$. Por exemplo a forma quadrática $\mathcal{P}(x, y) = 3x^2 - 4xy - 8y^2$ pode ser reescrita como $3x^2 - 2xy - 2yx - 8y^2$ e por isto $\mathcal{P}(X) = X^T \cdot A \cdot X$ com

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Obtemos assim uma correspondência biunívoca entre formas quadráticas e matrizes simétricas.

Quando compomos a forma quadrática $\mathcal{P}(X) = X^T \cdot A \cdot X$, representada pela matriz simétrica A , com a transformação linear $\mathcal{L}$ representada pela matriz L obtemos uma nova forma quadrática $\tilde{\mathcal{P}}(X) = \mathcal{P}(\mathcal{L}(X))$

$$\tilde{\mathcal{P}}(X) = \mathcal{P}(\mathcal{L}(X)) = (L \cdot X)^T \cdot A \cdot (L \cdot X) = (X^T \cdot L^T) \cdot A \cdot (L \cdot X) = X^T \cdot (L^T \cdot A \cdot L) \cdot X$$

logo a matriz de $\tilde{\mathcal{P}}$ será $(L^T \cdot A \cdot L)$.

3.1 exemplo em Maple

Para fazer em Maple o primeiro exemplo do parágrafo anterior, use:

```
> restart; with(linalg);
> A:=matrix(2,2,[[5,7],[7,-1]]);
> X:=vector(2,[x,y]);
> P:=evalm(transpose(X)&*A&*X);
> PP:=expand(P);
```

Os procedimentos que transpõem matrizes e multiplicam matrizes, fazem parte do pacote “linalg”. Veja “help(linalg)”.

3.2 exercícios

1. Calcule $X^T \cdot B_i \cdot X$ para $X = (x, y)$ e para as matrizes B_1 , B_2 e B_3 abaixo.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \pi \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & \pi \end{pmatrix}$$

2. Escreva as matrizes simétricas que representam as seguintes formas quadráticas:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1(x, y) &= x^2 - y^2 & \mathcal{P}_2(x, y) &= xy & \mathcal{P}_3(x, y) &= x^2 + y^2 & \mathcal{P}_4(x, y) &= 2x^2 - xy + \pi y^2 \\ \mathcal{Q}_1(x, y, z) &= \sqrt{3}z^2 + xy - xz + 2yz & \mathcal{Q}_2(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 & \mathcal{Q}_3(x, y, z) &= xy + xz + yz \\ \mathcal{Q}_4(x, y, z) &= 2x^2 - xy + \pi y^2 & \mathcal{Q}_5(x, y, z) &= 3x^2 - 4y^2 + \frac{3}{5}z^2 + 45xy - 87yz + 3xz \end{aligned}$$

3. Use Maple para verificar se as matrizes que calculou no exercício 2 estão corretas, isto é, use instruções Maple como as do exemplo 3.1 para calcular a forma quadrática associada a cada uma das matrizes que encontrou.
4. Sejam A_1 e A_2 as matrizes simétricas que representam as formas quadráticas $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ do exercício 2) acima. Para cada uma das matrizes L_i do exercício 1) da secção 1.2, calcule $L_i^T \cdot A_j \cdot L_i$ e $(x, y)^T \cdot L_i^T \cdot A_j \cdot L_i \cdot (x, y)$. Compare seu resultado com a resolução do exercício 1) da secção 1.2.
5. Use Maple para calcular as matrizes simétricas que representam as formas quadráticas $\mathcal{P}_i(\mathcal{L}_j(x, y))$ para cada uma das formas quadráticas em duas variáveis $\mathcal{P}_i$ do exercício 2) acima e cada uma das transformações lineares representadas pelas matrizes L_i do exercício 1) da secção 1.2.

6. Use Maple para calcular as matrizes simétricas que representam as formas quadráticas $\mathcal{Q}_i(\mathcal{L}_j(x, y))$ para cada uma das formas quadráticas em três variáveis $\mathcal{Q}_i$ do exercício 2) acima e cada uma das transformações lineares $\mathcal{L}_j : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ representadas pelas matrizes M_j abaixo:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. * Mostre que dada uma forma quadrática em duas variáveis $\mathcal{P}(x, y)$ existe uma infinidade de matrizes B tais que $\mathcal{P}(X) = X^T \cdot B \cdot X$. Para evitar esta ambiguidade, representamos sempre a forma quadrática por uma matriz simétrica. Mostre que só uma das matrizes B é simétrica.

4 formas quadráticas em duas variáveis; cônicas

Dado $c \in \mathbf{R}$, o conjunto de nível C_c de uma forma quadrática $\mathcal{P}(x, y)$ é definido como

$$C_c = \{(x, y) : \mathcal{P}(x, y) = c\}$$

ou seja, C_c é a imagem inversa $\mathcal{P}^{-1}(c)$. Por exemplo, para a forma quadrática $\mathcal{P}(x, y) = x^2 + y^2$ o conjunto de nível C_1 é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, o conjunto C_{-1} é $C_{-1} = \emptyset$ e o conjunto C_0 é a origem, $C_0 = \{(0, 0)\}$.

Os outros conjuntos de nível de $\mathcal{P}$ podem ser obtidos usando a propriedade $\mathcal{P}(\lambda(x, y)) = \lambda^2 \mathcal{P}(x, y)$: basta verificar que $(x, y) \in C_1$ se e só se $\lambda(x, y) \in C_{\lambda^2}$ e que $(x, y) \in C_{-1}$ se e só se $\lambda(x, y) \in C_{-\lambda^2}$. Com isto provamos:

Proposição 1 *Todo conjunto de nível C_c com $c \neq 0$ de uma forma quadrática $\mathcal{P} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ pode ser obtido a partir de um dos conjuntos de nível C_1 ou C_{-1} por uma homotetia uniforme do plano.*

Alguns conjuntos de nível de formas quadráticas em duas variáveis já são nossos conhecidos. Por exemplo, para a forma $\mathcal{P}_1(x, y) = x^2 + y^2$ os conjuntos de nível são:

$$C_1 = \{(x, y) : \mathcal{P}_1(x, y) = 1\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} = \text{circunferência de centro (0,0) e raio 1}$$

$$C_{-1} = \{(x, y) : \mathcal{P}_1(x, y) = -1\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = -1\} = \emptyset$$

$$C_0 = \{(x, y) : \mathcal{P}_1(x, y) = 0\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 0\} = \{(0, 0)\}.$$

Usando a Proposição 1, temos:

$$C_{a^2} = \{(x, y) : \mathcal{P}_1(x, y) = a^2\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = a^2\} = \text{circunferência de centro (0,0) e raio } |a|$$

$$C_{-a^2} = \{(x, y) : \mathcal{P}_1(x, y) = -a^2\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = -a^2\} = \emptyset.$$

Para a forma $\mathcal{P}_2(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ os conjuntos de nível são:

$$C_1 = \{(x, y) : \mathcal{P}_2(x, y) = 1\} = \{(x, y) : 2x^2 + 3y^2 = 1\} = \text{uma elipse}$$

$$C_{-1} = \{(x, y) : \mathcal{P}_2(x, y) = -1\} = \{(x, y) : 2x^2 + 3y^2 = -1\} = \emptyset$$

$$C_0 = \{(x, y) : \mathcal{P}_2(x, y) = 0\} = \{(x, y) : 2x^2 + 3y^2 = 0\} = \{(0, 0)\}.$$

Em geral para $\mathcal{P}_+(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2$ com α e $\beta > 0$, os conjuntos de nível são:

$$C_1 = \{(x, y) : \mathcal{P}_+(x, y) = 1\} = \{(x, y) : \alpha x^2 + \beta y^2 = 1\} = \text{uma elipse}$$

$$C_{-1} = \{(x, y) : \mathcal{P}_+(x, y) = -1\} = \{(x, y) : \alpha x^2 + \beta y^2 = -1\} = \emptyset$$

$$C_0 = \{(x, y) : \mathcal{P}_+(x, y) = 0\} = \{(x, y) : \alpha x^2 + \beta y^2 = 0\} = \{(0, 0)\}.$$

Outro exemplo é a forma $\mathcal{P}_3(x, y) = 2xy$, cujos conjuntos de nível C_1 e C_{-1} são as hipérbolas $y = \pm \frac{2}{x}$ com assíntotas em $C_0 = \{(x, y) : x = 0 \text{ ou } y = 0\}$. A partir de $\mathcal{P}_3$ podemos construir a forma quadrática $\mathcal{P}_4 = \mathcal{P}_3 \circ \mathcal{L}_{\pi/4}$ onde $\mathcal{L}_{\pi/4}$ é a rotação de $\frac{\pi}{4}$ em torno da origem, cuja matriz é:

$$R_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

A nova forma $\mathcal{P}_4$ será representada pela matriz $(R_{\pi/4})^T \cdot A \cdot R_{\pi/4}$ onde A é a matriz de $\mathcal{P}_3$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

isto é, $\mathcal{P}_4(x, y) = x^2 - y^2$. Como $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_4 \circ (\mathcal{L}_{\pi/4})^{-1}$ então a curva de nível $\{(x, y) : \mathcal{P}_3(x, y) = c\}$ será transformada na curva de nível $\{(x, y) : \mathcal{P}_4(x, y) = c\}$ pela rotação de $-\frac{\pi}{2}$ em torno da origem, $(\mathcal{L}_{\pi/4})^{-1}$. As curvas de nível $\{(x, y) : \mathcal{P}_4(x, y) = \pm 1\}$ são hipérbolas, com assíntotas em $\{(x, y) : \mathcal{P}_4(x, y) = 0\}$.

A forma quadrática $\mathcal{P}_4$ pode ser reescrita como

$$\mathcal{P}_4(x, y) = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 2 \left(\frac{x - y}{\sqrt{2}}, \frac{x + y}{\sqrt{2}} \right) = \mathcal{P}_3 \left(\frac{x - y}{\sqrt{2}}, \frac{x + y}{\sqrt{2}} \right)$$

portanto $\mathcal{P}_4(x, y) = 0$ se e só se $\mathcal{P}_3(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}}) = 0$, isto é, $x - y = 0$ ou $x + y = 0$. Na secção 4.1 desenvolveremos um método sistemático para fazer estas rotações que completam o quadrado.

4.0.1 exemplo em Maple

A curva de nível $\mathcal{P}(x, y) = c$ pode ser representada em Maple usando o comando “implicitplot” que faz parte dos procedimentos “plots”. Para o exemplo da secção 3.1 devemos fazer:

```
> restart; with(linalg):with(plots):
> A:=matrix(2,2,[[5,7],[7,-1]]);
> X:=vector(2,[x,y]);
> P:=evalm(transpose(X)&*A&*X);
> implicitplot(P=1,x=-1..1,y=-1..1);
```

4.1 diagonalização

Dada uma forma quadrática em duas variáveis, queremos encontrar uma rotação do plano que a transforme numa forma quadrática representada por uma matriz diagonal, isto é, uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{com } b = 0, \text{ ou seja, } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Se a forma quadrática for representada por uma matriz diagonal, com $b = 0$, então para (x, y) na circunferência $x^2 + y^2 = 1$ de centro $(0, 0)$ e raio 1, a forma $\mathcal{P}(x, y)$ assumirá valores entre a e c , porque $\mathcal{P}(x, y) = ax^2 + cy^2$ é uma média ponderada entre a e c com pesos $x^2 \leq 1$ e $y^2 \leq 1$. Se $a < c$ então o valor máximo de $\mathcal{P}(x, y)$, para (x, y) na circunferência $x^2 + y^2 = 1$, será c , atingido em $(x, y) = (0, 1)$. A recíproca também é verdadeira:

Proposição 2 *Seja $\mathcal{P}(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Se o maior valor de $\mathcal{P}$ na circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1 for atingido em $(x, y) = (0, 1)$, então $b = 0$.*

Demonstração: Como $\mathcal{P}(-x, -y) = \mathcal{P}(x, y)$ basta estudar o comportamento de $\mathcal{P}$ em metade da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1, que é o gráfico $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ para $x \in [-1, 1]$ e que satisfaz $y^2 = f(x)^2 = 1 - x^2$ e portanto $2y \frac{dy}{dx} = -2x$ e $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. Se $(0, 1)$ for ponto de máximo então neste ponto

$$\frac{d}{dx} \mathcal{P}(x, y(x)) = 0$$

Calculando a derivada temos

$$\frac{d}{dx} \mathcal{P}(x, y(x)) = \frac{d}{dx} (ax^2 + bxy(x) + cy^2(x)) = 2ax + by(x) + bx \frac{dy}{dx} + 2cy(x) \frac{dy}{dx} = 2ax + by(x) - b \frac{x^2}{y(x)} - 2cx$$

que em $(x, y) = (0, 1)$ vale b . Portanto, se $(0, 1)$ for ponto de máximo então $b = 0$. $\square$

Se o máximo de $\mathcal{P}$ na circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1 for atingido em outro ponto qualquer, $(\tilde{x}, \tilde{y})$ podemos compor $\mathcal{P}$ com a rotação $\mathcal{L} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ que leva $(0, 1)$ em $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Para a composta $\mathcal{P} \circ \mathcal{L}$ o máximo sobre a circunferência é atingido em $(0, 1)$. Aplicando a proposição 2 concluímos que $\mathcal{P} \circ \mathcal{L}$ é representada por uma matriz diagonal. Provamos:

Teorema 1 *Para toda forma quadrática $\mathcal{P} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ existe uma base ortonormal de $\mathbf{R}^2$ em que $\mathcal{P}$ é representada por uma matriz diagonal.*

Este resultado pode ser reinterpretado em termos de matrizes e obtemos:

Teorema 2 *Para toda matriz A , simétrica e 2×2 , existe uma matriz de rotação L tal que $L^T A L$ é uma matriz diagonal.*

Como L é a matriz de uma rotação em torno da origem, então $\|L \cdot X\| = \|X\|$ para todo $X \in \mathbf{R}^2$. Também se segue que $\det(L) = 1$ e que $L^T = L^{-1}$.

Corolário 1 *Para toda matriz A , simétrica e 2×2 , existe uma matriz L com $\det(L) = 1$ tal que $L^{-1} A L$ é uma matriz diagonal.*

4.1.1 exercícios

1. Encontre o valor máximo na circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1 das seguintes formas quadráticas:

$$\mathcal{P}_1(x, y) = 5x^3 - 6xy + 5y^2 \quad \mathcal{P}_2(x, y) = 2x^2 + 4\sqrt{3}xy - 2y^3$$

Sugestão: parametrize a circunferência.

2. Mostre que se $\mathcal{P}(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ e se o menor valor de $\mathcal{P}$ na circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1 for atingido em $(x, y) = (0, 1)$, então $b = 0$. Mostre que se o maior valor de $\mathcal{P}$ na circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1 for atingido em $(x, y) = (1, 0)$, então $b = 0$.

4.1.2 autovalores

A Proposição 2 permite encontrar a matriz diagonal $L^T AL = L^{-1}AL$ e também a base de $\mathbf{R}^2$ em que a forma quadrática é representada por esta matriz, no entanto este método é bastante trabalhoso. Pelo corolário 1 sabemos que basta encontrar diretamente a matriz diagonal $L^T AL = L^{-1}AL$. O objectivo desta secção é fazer este trabalho de uma vez por todas: os valores que vão aparecer na diagonal são chamados os *autovalores* da matriz A .

Para isto voltamos a interpretar a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

como a matriz da transformação linear

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ \mathcal{L} &: (x, y) \mapsto \mathcal{L}(x, y) = A \cdot (x, y)^T \end{aligned}$$

Define-se *autovetor* $(x_\alpha, y_\alpha) \in \mathbf{R}^2$ da transformação linear $\mathcal{L}$, associado ao *autovalor*² $\alpha \in \mathbf{R}$ como a solução de

$$\mathcal{L}(x_\alpha, y_\alpha) = \alpha(x_\alpha, y_\alpha) \quad \text{com} \quad (x_\alpha, y_\alpha) \neq (0, 0),$$

ou seja, o autovetor $(x_\alpha, y_\alpha) \neq (0, 0)$ é um vetor especial de $\mathbf{R}^2$ que é transformado por $\mathcal{L}$ em um seu múltiplo escalar. Observe que $\mathcal{L}(0, 0) = \alpha(0, 0)$ é sempre verdade, qualquer que seja $\alpha \in \mathbf{R}$. Este vetor não é considerado um autovetor.

Os autovetores e autovalores de uma matriz podem ser encontrados resolvendo um sistema de equações lineares. Por exemplo, para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathcal{L}_A(x, y) = A(x, y)^T$$

os autovalores α e autovetores (x_α, y_α) respectivos são as soluções de

$$A(x_\alpha, y_\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \end{pmatrix}$$

ou seja, são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} x_\alpha + 2y_\alpha = \alpha x_\alpha \\ 3x_\alpha + 4y_\alpha = \alpha y_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \alpha)x_\alpha + 2y_\alpha = 0 \\ 3x_\alpha + (4 - \alpha)y_\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_\alpha = (\alpha - 1)x_\alpha/2 \\ (3 + (4 - \alpha)(\alpha - 1)/2)x_\alpha = 0 \end{cases}.$$

Este sistema tem as soluções: $x_\alpha = 0 \Rightarrow y_\alpha = 0, \forall \alpha \in \mathbf{R}$ que não satisfazem a definição de autovetor, e as soluções não triviais de $3 + (4 - \alpha)(\alpha - 1)/2 = 0$, que são $\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$. Se tomarmos $x_\alpha = 1$, então obtemos $y_\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$. Concluimos assim que esta matriz tem um autovalor $\alpha = \frac{5 + \sqrt{33}}{2}$, com autovetor $(x_\alpha, y_\alpha) = \left(1, \frac{3 + \sqrt{33}}{4}\right)$ e que também tem um autovalor $\alpha = \frac{5 - \sqrt{33}}{2}$, com autovetor $(x_\alpha, y_\alpha) = \left(1, \frac{3 - \sqrt{33}}{4}\right)$.

Observe que o vetor $(x_\alpha, y_\alpha) = \left(1, \frac{3 - \sqrt{33}}{4}\right)$ não é o único autovetor associado a $\alpha = \frac{5 - \sqrt{33}}{2}$: qualquer múltiplo deste vetor por um escalar, como por exemplo $(4, 3 - \sqrt{33})$ ou $(-4\pi, \pi\sqrt{33} - 3\pi)$, também é um autovetor associado ao mesmo autovalor.

Para encontrar o autovalor α tivemos que resolver uma equação de segundo grau, que poderia não ter raízes reais. Não é garantido que uma transformação linear sempre tenha autovalores.

Dada uma transformação linear $\mathcal{L} : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ dizemos em geral que o número $\alpha \in \mathbf{R}$ é um *autovalor* de $\mathcal{L}$ se existir um vetor $X_\alpha \in \mathbf{R}^n$ com $X_\alpha \neq 0$ tal que $\mathcal{L}(X_\alpha) = \alpha X_\alpha$. Neste caso dizemos que X_α é um *autovetor de $\mathcal{L}$ associado ao autovalor α* .

²também chamados *vetor próprio* e *valor próprio* de $\mathcal{L}$, respectivamente, ou ainda *vetor característico* e *valor característico*.

4.1.3 exercícios

1. Calcule (se existirem) todos os autovalores e autovetores das transformações lineares representadas pelas matrizes abaixo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Mostre que se $\mathcal{L} : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ for uma transformação linear e se $X, Y \in \mathbf{R}^n$ forem dois vetores não nulos, tais que $\mathcal{L}(X) = \alpha X$ e $\mathcal{L}(Y) = \beta Y$ com $Y = bX$ para algum $b \in \mathbf{R}$, então $\alpha = \beta$.
3. Mostre que os autovetores de uma transformação linear associados a dois autovalores distintos são sempre linearmente independentes.
4. Mostre que se $\alpha \in \mathbf{R}$ for um autovalor da transformação linear $\mathcal{L} : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ então o conjunto dos vetores $X \in \mathbf{R}^n$ tais que $\mathcal{L}(X) = \alpha X$ forma um espaço vetorial.

4.1.4 cálculo dos autovalores

O cálculo dos autovalores pode ser muito mais simples se não precisarmos saber quem são os autovetores. Nesta secção descreveremos um método de cálculo direto.

Para encontrar os autovalores da matriz A , $n \times n$, queremos resolver um sistema $AX_\alpha = \alpha X_\alpha$, ou seja, $(A - \alpha I)X_\alpha = 0$, onde I é a matriz identidade. Este sistema tem solução não trivial $X_\alpha \neq 0$ se e só se o determinante de $(A - \alpha I)$ for igual a zero. Os autovalores α são então os números que satisfazem a equação $p_A(\alpha) = \det(A - \alpha I) = 0$. A expressão $p_A(\alpha) = \det(A - \alpha I)$ é sempre um polinômio de grau n em α , chamado o *polinômio característico* de A . Não demonstraremos aqui que $p_A(\alpha)$ é sempre um polinômio, mas para $n = 2$ e 3 a demonstração é simples — exercícios 2) e 3) abaixo.

Se $\mathcal{L} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ for uma transformação linear cujo polinômio característico tenha 2 raízes reais distintas, usando o resultado dos exercícios 4.1.3 - 2) e 3) conclui-se que podemos formar uma base com os autovetores de $\mathcal{L}$. Nesta base a transformação linear $\mathcal{L}$ é representada por uma matriz diagonal.

Por exemplo, para a transformação linear

$$\mathcal{L}_A(x, y) = A(x, y)^T \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

sabemos pelos cálculos da secção anterior que existe uma base na qual $\mathcal{L}_A$ é representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{5 + \sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5 - \sqrt{33}}{2} \end{pmatrix}$$

e que esta base é formada pelos vetores $\{(4, 3 + \sqrt{33}), (4, 3 - \sqrt{33})\}$.

Em geral quando encontramos as raízes do polinômio característico não sabemos quais são os elementos desta base, mas sabemos que esta base existe.

4.1.5 exercícios

1. Calcule o polinômio característico e os autovalores das matrizes do exercício 1) da secção 4.1.3. Se não estiver cansado, faça os mesmos cálculos para todas as matrizes que já apareceram neste texto.

2. Calcule o determinante de $A - \alpha I$ para a matriz abaixo e verifique que é um polinômio de grau 2 em α .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

3. Seja B uma matriz com a forma acima. Calcule o determinante de $B - \alpha I$ e verifique que é um polinômio de grau 3 em α (talvez seja boa ideia usar Maple). Se não tiver paciência para calcular o determinante, escreva a matriz $B - \alpha I$ e pense em uma boa razão para o seu determinante ser um polinômio de grau menor ou igual a 3. Depois pense em uma boa razão para que o grau não possa ser menor do que 3. (Se as suas razões forem realmente boas, servirão para mostrar que: para uma matriz C , $n \times n$, o determinante de $C - \alpha I$ é um polinômio de grau igual a n .)
4. Escreva um procedimento em Maple que dados n e uma matriz A , $n \times n$, calcule o polinômio característico de A (ou descubra se existe um procedimento que faça isto, se já estiver cansado demais para escrever procedimentos!).

4.1.6 autovalores e formas quadráticas

Depois desta digressão pela álgebra linear, podemos voltar às formas quadráticas. Se A for uma matriz simétrica, o corolário 1 permite encontrar diretamente a matriz diagonal $L^T A L = L^{-1} A L$: os valores que vão aparecer na diagonal são os autovalores de A , que podemos calcular diretamente como raízes do polinômio característico $p_A(\lambda)$ de A dado por $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. A base ortonormal em que a forma quadrática é representada por uma matriz diagonal é composta por autovetores de A . Isto pode ser sintetizado no Corolário a seguir:

Proposição 3 *Se A for uma matriz simétrica 2×2 , então o polinômio característico de A tem duas raízes reais e os autovetores de A formam uma base ortonormal de $\mathbf{R}^2$.*

Demonstração: Sabemos pelo corolário 1 que existe uma matriz D da forma

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

e existe uma matriz L , com $\det(L) = 1$ tais que $L^{-1} A L = D$. Logo, $A L = L D$, isto é, $A L(x, y)^T = L D(x, y)^T$, para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Em particular,

$$A L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = L D \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{isto é} \quad A X_1 = \alpha X_1 \quad \text{para} \quad X_1 = L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou seja, X_1 é um autovetor de A associado ao autovalor α (como é que eu sei que $X_1 \neq (0, 0)^T$). Analogamente verificamos que $X_2 = L(0, 1)^T$ é um autovetor de A associado ao autovalor β . Mesmo que $\alpha = \beta$, podemos garantir neste contexto que X_1 e X_2 são linearmente independentes (porque?). $\square$

Resumindo: começa-se com uma forma quadrática $\mathcal{P}(x, y)$ representada por uma matriz simétrica A . Calcula-se $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ que é um polinômio de grau 2 em λ . Encontra-se as duas raízes reais deste polinômio, digamos α e β (o corolário garante que sempre existem) e sabemos que existe uma rotação do plano que transforma forma quadrática $\mathcal{P}(x, y)$ na forma $\alpha x^2 + \beta y^2$.

4.1.7 exercícios

Observação: Faça pelo menos um exercício à mão. Quando estiver com a mão cansada, faça em Maple. Use “linalg” para calcular autovalores (eigenvalues) e autovetores (eigenvectors).

1. Para cada uma das formas quadráticas em 2 variáveis que já apareceu em algum exercício, encontre a matriz diagonal que a representa em novas coordenadas.
2. Para cada uma das formas quadráticas em 2 variáveis que já apareceu em algum exercício, encontre uma base ortonormal de $\mathbf{R}^2$ em que a forma quadrática seja representada por uma matriz diagonal.
3. * Porque foi preciso saber que $L^T = L^{-1}$ antes de obter a Proposição 3?

4.1.8 * exercícios adicionais de álgebra linear

Nosso objetivo era estudar os conjuntos de nível de formas quadráticas, o que será feito a seguir, em 4.2. Antes disso faremos mais uma digressão pela álgebra linear, em forma de exercícios.

1. Encontre a expressão dos coeficientes do polinômio característico $p_D(\lambda) = \det(D - \lambda I)$ como função de α e de β para a matriz

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

2. Encontre a expressão dos coeficientes de $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ como função de a, b, c, d para a matriz A acima.
3. Use os seus cálculos e propriedades do determinante para mostrar que se A, D e L forem matrizes 2×2 com o determinante de $L \neq 0$, e se $L^{-1}AL = D$ então o coeficiente independente em $p_A(\lambda)$ é igual ao coeficiente independente em $p_D(\lambda)$. (Sugestão: o valor do coeficiente independente em $p_A(\lambda)$ é $p_A(0)$.)
4. Explique porque se A, D e L forem matrizes 2×2 com o determinante de $L \neq 0$, e se $L^{-1}AL = D$ então A e D terão o mesmo polinômio característico, $p_A(\lambda) = p_D(\lambda)$. Estes coeficientes são chamados *invariantes* porque não se alteram quando fazemos mudanças de coordenadas lineares. O coeficiente de λ em $p_A(\lambda)$ é chamado o *traço* de A . O nome do invariante dado pelo coeficiente independente em $p_A(\lambda)$ você já sabia.

4.2 cônicas

4.2.1 classificação das cônicas

Para os fins desta seção, uma *cônica* é uma curva de nível de uma forma quadrática $\mathcal{P}(x, y)$. Estudaremos apenas as cônicas, curvas de nível $\mathcal{P}(x, y) = c$, de formas quadráticas representadas por matrizes com determinante diferente de 0. Estas formas quadráticas são ditas *não degeneradas*.

Teorema 3 *Seja $\mathcal{P} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ uma forma quadrática não degenerada. Então o conjunto $C_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \mathcal{P}(x, y) = 1\}$ ou é uma hipérbole ou uma elipse ou o conjunto vazio.*

Demonstração: Podemos supor que já fizemos a composição com uma rotação do plano de modo que a forma quadrática é representada pela matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{com } \det(A) = ac \neq 0$$

Se $a < 0$ e $c < 0$ então $\mathcal{P}(x, y) = ax^2 + cy^2 \leq 0$ para todo valor de $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Logo $C_1 = \emptyset$.

Suponha que $a > 0$ e $c > 0$. Se $a = c$, então $\mathcal{P}(x, y) = ax^2 + cy^2 = a(x^2 + y^2) = 1$ é a equação da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{1/a}$, que consideraremos como uma elipse especial. Se $a \neq c$, então

$\mathcal{P}(x, y) = ax^2 + cy^2 = 1$ é a equação habitual de uma elipse. Mesmo para quem não se lembrar da equação da elipse, é fácil ver que se compuzermos $\mathcal{P}$ com a transformação linear $\mathcal{L}_1 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ dada por

$$\mathcal{L}_1(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{y}{\sqrt{c}} \right)$$

obteremos a forma quadrática $\mathcal{P}_1(x, y) = \mathcal{P}(\mathcal{L}_1(x, y)) = x^2 + y^2$ e que a curva de nível $\mathcal{P}_1 = 1$ é a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1. Logo, a curva de nível $\mathcal{P} = 1$ será a imagem da circunferência por $\mathcal{L}_1$.

Se a e c tiverem sinais contrários, então $\mathcal{P}(x, y) = ax^2 + cy^2 = 1$ é a equação de uma hipérbole. No caso especial em que $a = -1$ e $c = 1$ já vimos no início da secção 4 que a curva de nível C_1 é uma hipérbole. Se $a = 1$ e $c = -1$ temos também uma hipérbole, imagem da anterior pela reflexão $R(x, y) = (y, x)$. Os outros casos em que a e c têm sinais contrários podem ser transformados nestes dois pela transformação linear $\mathcal{L}_2 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ dada por

$$\mathcal{L}_2(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{|a|}}, \frac{y}{\sqrt{|c|}} \right)$$

Finalmente, no caso geral em que a forma quadrática não é representada por uma matriz diagonal, sabemos que existe uma rotação $\mathcal{L} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ que a transforma numa matriz diagonal. Assim o conjunto C_1 será a imagem pela rotação $\mathcal{L}$ de uma elipse ou de uma hipérbole ou do conjunto vazio. $\square$

4.2.2 exemplo em Maple

A curva de nível $\mathcal{P}(x, y) = c$ do exemplo da secção 4.0.1 é uma hipérbole, como se pode verificar usando Maple:

```
> restart; with(linalg):
> A:=matrix(2,2,[[5,7],[7,-1]]);
> eigenvals(A);
```

4.2.3 exercícios

1. Para cada uma das formas quadráticas em 2 variáveis que já apareceu em algum exercício, decida se a forma quadrática é degenerada. Caso não seja, decida se C_1 é uma hipérbole ou uma elipse ou o conjunto vazio.
2. Seja $\mathcal{P}(x, y) = ax^2 + cy^2$, com $ac \neq 0$. Mostre que as reflexões nos eixos coordenados são simetrias de $C_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \mathcal{P}(x, y) = 1\}$. Mostre que as reflexões nas retas $y = x$ e $y = -x$ são simetrias de C_1 se e só se $|a| = |c|$.
3. Seja $\mathcal{P}(x, y) = X^T \cdot A \cdot X$ com A uma matriz simétrica 2×2 com $\det(A) \neq 0$. Mostre que as reflexões nas retas pela origem paralelas aos autovetores de A são simetrias de $C_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \mathcal{P}(x, y) = 1\}$. Mostre que se os autovalores de A tiverem o mesmo módulo, então há mais duas reflexões que são simetrias de C_1 .
4. Seja $\mathcal{P}(x, y)$ uma forma quadrática. Mostre que a rotação em torno da origem de um ângulo π é uma simetria de $C_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \mathcal{P}(x, y) = 1\}$. *Sugestão: antes de começar a multiplicar matrizes, pense. Este exercício é muito mais fácil que o anterior.*
5. Use o comando Maple “implicitplot” para representar os conjuntos dos pontos (x, y) tais que $\mathcal{P}_i(x, y) = 1$, $\mathcal{P}_i(x, y) = 4$, $\mathcal{P}_i(x, y) = -1$ e $\mathcal{P}_i(x, y) = 0$ para as formas quadráticas $\mathcal{P}_i$ representadas pelas matrizes

A_i abaixo. Represente no mesmo gráfico as retas pela origem paralelas aos autovetores de A_i . *Sugestão: use a equação (implícita) da reta perpendicular a um vetor (v_1, v_2) , que é $(x, y) \cdot (v_1, v_2) = 0$.*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad A_7 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

6. Quais são os conjuntos de nível possíveis $C_0 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \mathcal{P}(x, y) = 0\}$ para uma forma quadrática não degenerada $\mathcal{P}(x, y)$?
7. Quais são os conjuntos de nível possíveis $C_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \mathcal{P}(x, y) = 1\}$ para uma forma quadrática degenerada $\mathcal{P}(x, y)$?
8. Use Maple para calcular o comprimento de uma elipse $ax^2 + cy^2 = 1$, com $a > 0$ e $c > 0$.
9. Use Maple para calcular a área delimitada por uma elipse $ax^2 + cy^2 = 1$, com $a > 0$ e $c > 0$. *Sugestão: não tente calcular em coordenadas polares. Calcule em vez disso, a área de $\frac{1}{4}$ da elipse.*

5 superfícies de revolução

Nesta secção iniciaremos o estudo das *quádricas*, conjuntos de pontos do espaço que satisfazem uma equação da forma $\mathcal{Q}(x, y, z) = c$ onde $\mathcal{Q}$ é uma forma quadrática. Inicialmente estudaremos as superfícies de revolução geradas por cônicas e veremos que são sempre quádricas.

5.1 elipsóide de revolução

O elipsóide de revolução é a superfície gerada por uma elipse que gira em torno de um dos seus eixos de simetria.³ Suponhamos que a elipse gire em torno do eixo z e seja dada pela equação $ax^2 + cz^2 = 1$ com a e $c > 0$. Os pontos da elipse satisfazem a equação $x^2 = \frac{1-cz^2}{a}$. Em cada plano $z = \text{constante}$ os pontos da superfície estarão numa circunferência com centro no eixo z e raio $\sqrt{\frac{1-cz^2}{a}}$ e por isto satisfazem a equação $x^2 + y^2 = \frac{1-cz^2}{a}$ ou, em forma mais simples, $a(x^2 + y^2) + cz^2 = 1$.

O elipsóide de revolução é então a quádrlica que corresponde a uma forma quadrática não degenerada $\mathcal{Q}(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$. Como acontece para qualquer superfície de revolução, toda rotação em torno do eixo de revolução é uma simetria destes elipsóides e dizemos que o elipsóide de revolução tem um *eixo de simetria*. A reflexão no plano passando pela origem e perpendicular ao eixo de simetria (plano equatorial) é também uma simetria do elipsóide de revolução, herdada da simetria da elipse. Se $\mathcal{Q}$ estiver na forma $\mathcal{Q}(x, y, z) = a(x^2 + y^2) + cz^2$ então esta simetria será a reflexão no plano $z = 0$, que é a transformação $\mathcal{L}(x, y, z) = (x, y, -z)$ e dizemos que o plano $z = 0$ é um *plano de simetria* do elipsóide.

A reflexão em qualquer plano vertical é ainda uma simetria do elipsóide $a(x^2 + y^2) + cz^2 = 1$, bem como a rotação de π em torno de qualquer reta contida no plano equatorial.

No caso especial em que os $a = c$ o elipsóide é uma esfera. Todas as rotações em torno de retas passando pela origem de $\mathbf{R}^3$ e todas as reflexões em planos que contêm a origem são simetrias deste elipsóide especial.

5.2 exemplos em Maple

Para representar as quádricas usaremos o comando Maple “implicitplot3d”. Por exemplo, experimente:

³Se a reflexão numa reta transformar uma figura geométrica plana em si mesma, dizemos que esta reta é um *eixo de simetria* da figura. Os eixos de simetria das cônicas não degeneradas estão descritos no exercício 3) da secção 4.2.3.


```
> with(plots):
> Q:=x^2+y^2+2*z^2;
> implicitplot3d(Q=1,x=-1..1,y=-1..1,z=-1..1);
```

Cuidado com os limites! compare os resultados com:

```
> implicitplot3d(Q=1,x=-1/2..1/2,y=-1/2..1/2,z=-1/2..1/2);
> implicitplot3d(Q=1,x=-2/3..2/3,y=-2/3..2/3,z=-2/3..2/3);
```

o que dá resultados mais divertidos, mas um pouco baralhantes.

Para desenhar o elipsóide como superfície de revolução, escrevemos primeiro a expressão da elipse como gráfico de uma função: em vez de escrever $x^2 + 2z^2 = 1$, escrevemos $x = \sqrt{1 - 2z^2}$ para $z \in [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$. O elipsóide do exemplo acima é

$$\left\{ (x, y, z) = \left(\sqrt{1 - 2r^2} \cos t, \sqrt{1 - 2r^2} \sin t, r \right), r \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right], t \in [0, 2\pi] \right\}$$

e pode ser desenhado com o comando "plot3d":

```
> restart; with(plots):
> sup:=[sqrt(1-2*r^2)*cos(t),sqrt(1-2*r^2)*sin(t),r]:
> a:=1/sqrt(2):
> plot3d(sup,r=-a..a,t=0..2*Pi,scaling=CONSTRAINED);
```

A instrução "scaling=CONSTRAINED" evita que todos os elipsóides sejam desenhados como esferas.

5.3 exercícios

Nos exercícios a seguir tome $\mathcal{Q}(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 2z^2$.

1. Use Maple para representar graficamente a elipse $3x^2 + 2z^2 = 1$.
2. Use o comando Maple "implicitplot3d" para representar graficamente o elipsóide de revolução

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \mathcal{Q}(x, y, z) = 1\}$$

3. Descreva os conjuntos de nível $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \mathcal{Q}(x, y, z) = 0\}$, $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \mathcal{Q}(x, y, z) = -1\}$ e $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \mathcal{Q}(x, y, z) = 4\}$.
4. Use Maple para representar o elipsóide de revolução $\mathcal{Q}(x, y, z) = 1$ em forma paramétrica usando o comando "plot3d".

5.4 hiperbolóides de revolução

O hiperbolóide de revolução é a superfície gerada por uma hipérbole que gira em torno de um dos seus eixos de simetria. Há dois casos a considerar, conforme o eixo de simetria intercepte ou não a hipérbole, veja o exercício 1) a seguir.

Suponhamos que a hipérbole seja dada pela equação $ax^2 - cz^2 = 1$ com a e $c > 0$ e que gire em torno do eixo x , o eixo de simetria que a intercepta. Cada um dos ramos da hipérbole dará origem a uma superfície de revolução. Os pontos da hipérbole satisfazem a equação $z^2 = \frac{ax^2 - 1}{c}$ que só tem solução (x, z) se $ax^2 - 1 \geq 0$. Em cada plano $x = \text{constante}$ os pontos da superfície estão numa circunferência com centro no eixo x e raio $\sqrt{\frac{ax^2 - 1}{c}}$ (se $ax^2 \geq 1$) e por isto satisfazem a equação $y^2 + z^2 = \frac{ax^2 - 1}{c}$ ou, numa forma mais simples $ax^2 - c(y^2 + z^2) = 1$. A superfície resultante é chamada *hiperbolóide de duas folhas* e é a quádrlica que corresponde à forma quadrática não degenerada $\mathcal{Q}(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$.

Suponhamos agora que a hipérbole $ax^2 - cz^2 = 1$ com a e $c > 0$ gire em torno do eixo z , o eixo de simetria que não a intercepta. Os pontos da hipérbole satisfazem a equação $x^2 = \frac{1 + cz^2}{a}$. Em cada plano

$z = \text{constante}$ os pontos da superfície estão numa circunferência com centro no eixo z e raio $\sqrt{\frac{1+cz^2}{a}}$ e por isto satisfazem a equação $x^2 + y^2 = \frac{1+cz^2}{a}$ ou, numa forma mais simples $a(x^2 + y^2) - cz^2 = 1$. A superfície resultante, que tem uma só componente, é chamada *hiperbolóide de uma folha* e é a quádrlica que corresponde à forma quadrática não degenerada $\mathcal{Q}(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$.

Os hiperbolóides de revolução de uma ou duas folhas têm um eixo de simetria que é o eixo de revolução: uma rotação de qualquer ângulo em torno deste eixo transforma o hiperbolóide de revolução em si mesmo. Os hiperbolóides de revolução têm uma infinidade de planos de simetria: o plano equatorial, perpendicular ao eixo de revolução (uma simetria herdada da hipérbole) e todos os planos que contêm uma reta no plano equatorial e o eixo de revolução. A rotação de π em torno de qualquer reta pela origem contida no plano equatorial é também uma simetria dos hiperbolóides de revolução.

5.5 exercícios

Nos exercícios a seguir tome $\mathcal{Q}_1(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 - 2z^2$ e $\mathcal{Q}_2(x, y, z) = -3x^2 - 3y^2 + 2z^2$.

1. Use Maple para representar graficamente a hipérbole $3x^2 - 2z^2 = 1$. Verifique que há duas reflexões em $\mathbf{R}^2$ que são simetrias da hipérbole. Represente no mesmo gráfico a hipérbole e seus dois eixos de simetria.
2. Use Maple para representar graficamente os hiperbolóides $\mathcal{Q}_\diamond(x, y, z) = 1$ para $\diamond = 1$ ou 2 .
3. Para $\heartsuit = 1$ ou 2 descreva os conjuntos de nível $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \mathcal{Q}_\heartsuit(x, y, z) = 0\}$, $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \mathcal{Q}_\heartsuit(x, y, z) = -1\}$ e $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \mathcal{Q}_\heartsuit(x, y, z) = 1/9\}$.

6 formas quadráticas em três variáveis

6.1 rotações no espaço

O trabalho que fizemos para as formas quadráticas em duas variáveis pode ser feito para qualquer número de variáveis: primeiro comporemos a forma quadrática com uma rotação de maneira que a composta seja representada por uma matriz diagonal. Em seguida estudaremos os conjuntos de nível possíveis para estas formas quadráticas. Faremos este estudo para as formas quadráticas em 3 variáveis.

As rotações em $\mathbf{R}^3$ de um ângulo θ em torno dos eixos coordenados são representadas pelas matrizes:

$$Rot_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad Rot_y = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad Rot_z = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A rotação de um ângulo θ em torno de outra reta qualquer pode ser obtida por um procedimento análogo ao que usamos para obter a reflexão numa reta qualquer do plano: rodamos o espaço em torno dos eixos y e z até que a reta coincida com o eixo x , rodamos em torno do eixo x da quantidade θ desejada e tornamos a rodar o espaço de maneira que a reta volte ao seu lugar original.

6.2 exercícios

Nos exercícios a seguir tome $\mathcal{Q}_1(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 - 2z^2$ e $\mathcal{Q}_2(x, y, z) = -3x^2 - 3y^2 + 2z^2$.

1. Sejam A_1 e A_2 as matrizes simétricas que representam $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ respectivamente. Verifique que se R é a matriz que representa a rotação de um ângulo θ em torno do eixo z então $R^T \cdot A_\diamond \cdot R = A_\diamond$ para $\diamond = 1$ ou 2 e para qualquer valor de θ . Conclua que estas rotações são simetrias dos hiperbolóides $\mathcal{Q}_\diamond(x, y, z) = 1$. Verifique que se R é a matriz que representa a reflexão no plano xy então $R^T \cdot A_\diamond \cdot R = A_\diamond$. Conclua que esta reflexão é simetria dos hiperbolóides $\mathcal{Q}_\diamond(x, y, z) = 1$. Faça o mesmo para a reflexão no plano $x = -y$.

2. Use Maple para representar no mesmo gráfico o hiperbolóide de revolução $\mathcal{Q}_1(x, y, z) = 1$ e sua imagem pela rotação de $2\pi/3$ em torno do eixo x .
3. Use Maple para representar no mesmo gráfico o hiperbolóide de revolução $\mathcal{Q}_2(x, y, z) = 1$ e sua imagem pela rotação de $\pi/3$ em torno do eixo y .
4. Mostre que se R for uma matriz que represente uma rotação em $\mathbf{R}^3$ então $R^T = R^{-1}$. *Sugestão: verifique primeiro que $(\text{Rot}_{\clubsuit})^T \cdot \text{Rot}_{\clubsuit} = I$ onde I é a matriz identidade e $\clubsuit = x, y$ ou z . Mostre que se duas matrizes tiverem a propriedade $R^T = R^{-1}$ então o seu produto também terá esta propriedade. As matrizes que satisfazem $R^T = R^{-1}$ são chamadas matrizes ortogonais.*
5. Calcule o determinante das matrizes que representam rotações em torno dos eixos coordenados.
6. Mostre que se R for uma matriz que represente uma rotação em $\mathbf{R}^3$ então para qualquer $X \in \mathbf{R}^3$ tem-se $\|R \cdot X\| = \|X\|$.

Nos exercícios a seguir tome $\mathcal{Q}(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 2z^2$.

7. Seja A a matriz simétrica que representa $\mathcal{Q}$. Verifique que se R for a matriz que representa a rotação de um ângulo θ em torno do eixo z então $R^T \cdot A \cdot R = A$ para qualquer valor de θ . Conclua que estas rotações são simetrias do elipsóide $\mathcal{Q}(x, y, z) = 1$.
8. Use Maple para representar no mesmo gráfico o elipsóide de revolução $\mathcal{Q}(x, y, z) = 1$ e sua imagem pela rotação de $2\pi/3$ em torno do eixo x . Faça o mesmo para a rotação de $\pi/3$ em torno do eixo y . Decida se alguma destas rotações é simetria do elipsóide.
9. Escreva a matriz da reflexão no plano xy , dada por $\mathcal{L}_1(x, y, z) = (x, y, -z)$. Faça o mesmo para a reflexão no plano $x = y$, dada por $\mathcal{L}_2(x, y, z) = (y, x, z)$.
10. Seja A a matriz simétrica que representa $\mathcal{Q}$. Verifique que se R for a matriz que representa a reflexão no plano xy então $R^T \cdot A \cdot R = A$. Conclua que esta reflexão é simetria do elipsóide $\mathcal{Q}(x, y, z) = 1$.
11. Seja A a matriz simétrica que representa $\mathcal{Q}$. Verifique que se R for a matriz que representa a reflexão no plano $x = y$ então $R^T \cdot A \cdot R = A$. Conclua que esta reflexão é simetria do elipsóide $\mathcal{Q}(x, y, z) = 1$.

6.3 diagonalização

Tal como fizemos na secção 4.1 para duas variáveis, dada uma forma quadrática em três variáveis, queremos encontrar uma rotação do espaço que a transforme numa forma quadrática representada por uma matriz diagonal, isto é, por uma matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Em outras palavras, dada a expressão

$$\mathcal{Q}(x, y, z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2b_1xy + 2b_2yz + 2b_3xz$$

procuramos uma transformação linear $\mathcal{L} : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ que complete o quadrado fazendo $\mathcal{Q}(\mathcal{L}(x, y, z)) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$.

Sejam $\mathbf{s}$ um ponto na esfera $S^2 = \{X \in \mathbf{R}^3 : \|X\| = 1\}$ em que $\mathcal{Q}(x, y, z)$ assume o seu valor máximo e $\mathcal{L}_1$ a rotação de $\mathbf{R}^3$ que transforma $\mathbf{s}$ em $(1, 0, 0)$ e $\mathcal{Q}_1(x, y, z) = \mathcal{Q}(\mathcal{L}_1(x, y, z))$. Então

$$\mathcal{Q}_1(x, y, z) = Mx^2 + \tilde{a}_2y^2 + \tilde{a}_3z^2 + 2\tilde{b}_1xy + 2\tilde{b}_2yz + 2\tilde{b}_3xz$$

onde M é o máximo de $\mathcal{Q}$ em S^2 .

A restrição de $\mathcal{Q}_1$ ao plano xy é a forma quadrática $\mathcal{P}_1(x, y) = \mathcal{Q}_1(x, y, 0) = Mx^2 + \tilde{a}_2y^2 + 2\tilde{b}_1xy$ que assume o seu valor máximo para $\|(x, y)\| = 1$ em $(1, 0)$ (o máximo da restrição não pode ser maior que o

da forma original!). Pela proposição 2 da secção 4.1, segue-se que $b_1 = 0$. Restringindo agora ao plano xz obtem-se outra forma quadrática em duas variáveis $\mathcal{P}_2(x, z) = \mathcal{Q}_1(x, 0, z) = Mx^2 + \tilde{a}_3z^2 + 2\tilde{b}_3xz$ que também atinge o seu máximo para $\|(x, z)\| = 1$ em $(1, 0)$ e por isto $b_3 = 0$. Portanto a rotação $\mathcal{L}_1$ transformou a forma quadrática $\mathcal{Q}(x, y, z)$ em

$$\mathcal{Q}_1(x, y, z) = Mx^2 + \tilde{a}_2y^2 + \tilde{a}_3z^2 + 2\tilde{b}_2yz$$

Pelo teorema 1 da secção 4.1 existe uma rotação no plano yz que transforma a forma quadrática $\mathcal{P}_3(y, z) = \mathcal{Q}_1(0, y, z) = \tilde{a}_2y^2 + \tilde{a}_3z^2 + 2\tilde{b}_2yz$ numa nova forma quadrática representada por uma matriz diagonal. Resumindo o que acabou de ser provado temos:

Teorema 4 *Para toda forma quadrática $\mathcal{Q} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ existe uma base ortonormal em que $\mathcal{Q}$ é representada por uma matriz diagonal.*

Reinterpretando em termos de matrizes obtemos:

Teorema 5 *Para toda matriz A , simétrica e 3×3 , existe uma matriz de rotação L tal que $L^T A L$ é uma matriz diagonal.*

Do mesmo modo que na secção 4.1 estes resultados têm algumas consequências imediatas — veja os exercícios 4) a 6) a seguir:

Corolário 2 *Para toda matriz A , simétrica e 3×3 , existe uma matriz L com $\det(L) = 1$ que satisfaz $\|L \cdot X\| = \|X\|$ para todo $X \in \mathbf{R}^3$ e tal que $L^{-1} A L$ é uma matriz diagonal.*

Corolário 3 *O polinômio característico de uma matriz simétrica A tem três raízes reais e A tem autovetores que formam uma base ortonormal de $\mathbf{R}^3$.*

6.4 exercícios

1. Calcule (à mão) os autovalores e autovetores (se existirem) das matrizes abaixo e verifique os seus resultados usando Maple:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad M_5 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Para cada uma das formas quadráticas abaixo, encontre a matriz diagonal que a representa na base do Teorema 4. *Sugestão: use Maple e não tente encontrar a base. Eu só pedi para encontrar a matriz.*

$$\mathcal{Q}_1(x, y, z) = \sqrt{3}z^2 + xy - xz + 2yz \quad \mathcal{Q}_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \mathcal{Q}_3(x, y, z) = xy + xz + yz$$

$$\mathcal{Q}_4(x, y, z) = 2x^2 - xy + \pi y^2 \quad \mathcal{Q}_5(x, y, z) = 3x^2 - 4y^2 + \frac{3}{5}z^2 + 45xy - 87yz + 3xz$$

$$\mathcal{Q}_6(x, y, z) = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(y^2 + z^2) + yz \quad \mathcal{Q}_7(x, y, z) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x^2 + 2xy + y^2) - z^2 \quad \mathcal{Q}_8(x, y, z) = 2(xy + xz - yz)$$

6.5 quádricas

Uma forma quadrática representada por uma matriz simétrica A diz-se *degenerada* se $\det(A) = 0$. Os resultados da secção 6.3 podem ser usados para estudar os conjuntos de nível

$$C_c = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \mathcal{Q}(x, y, z) = c\}$$

para formas quadráticas não degeneradas $\mathcal{Q} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$. Estes conjuntos de nível são chamados *quádricas*.

Da mesma maneira que fizemos para as cônicas, estudaremos os conjuntos de nível de formas quadráticas já diagonalizadas, na forma

$$\mathcal{Q}(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 \quad \text{com } \alpha\beta\gamma \neq 0 \quad (2)$$

Para uma forma quadrática não degenerada qualquer, $\mathcal{Q}_1$, calcularemos os autovalores α , β e γ da matriz que a representa e estudaremos a quádrica $\mathcal{Q}(x, y, z) = c$ para a forma quadrática $\mathcal{Q}$ da forma (2). A quádrica $\mathcal{Q}_1(x, y, z) = c$ será obtida a partir desta por uma rotação do espaço.

6.5.1 elipsóide

O elipsóide é a quádrica que corresponde a uma forma quadrática não degenerada $\mathcal{Q}(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$ com autovalores α , β e γ todos positivos mas não necessariamente iguais. Podemos estudar a sua forma comparando-o com um elipsóide de revolução, em que dois dos autovalores são iguais. Se $\mathcal{L}_\delta : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ for uma homotetia ao longo do eixo x , da forma $\mathcal{L}_\delta(x, y, z) = (\delta x, y, z)$ então $\mathcal{Q}_1(x, y, z) = \mathcal{Q}(\mathcal{L}_\delta(x, y, z)) = \alpha\delta^2 x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$. Para $\delta = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ a forma quadrática $\mathcal{Q}_1$ é da forma $\mathcal{Q}_1(x, y, z) = \beta(x^2 + y^2) + \gamma z^2$ e $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \mathcal{Q}_1(x, y, z) = 1\}$ será a imagem de um elipsóide de revolução pela aplicação linear $\mathcal{L}_\delta^{-1}$ dada por $\mathcal{L}_\delta^{-1}(x, y, z) = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x, y, z\right)$.

Ao aplicar uma homotetia a um dos eixos coordenados algumas das simetrias do elipsóide de revolução desaparecem. Restam apenas as reflexões em três planos perpendiculares e rotações de π em torno das três retas em que os planos se intersectam dois a dois.

Se $\mathcal{Q}(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$ os planos de simetria são os planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, o que é uma maneira complicada de dizer que se trocarmos o sinal de uma variável x , y ou z , a forma quadrática $\mathcal{Q}$ não se altera. Em geral os planos de simetria são gerados por dois autovetores da matriz associada à forma quadrática.

6.5.2 exercícios

Nos exercícios a seguir tome $\mathcal{Q}(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2$.

1. Use Maple para representar graficamente o elipsóide $\mathcal{Q}(x, y, z) = 1$. Represente num gráfico na mesma escala o elipsóide de revolução $3x^2 + 3y^2 + 2z^2$. Encontre uma homotetia ao longo de uma reta em $\mathbf{R}^3$ que transforme o elipsóide de revolução $3x^2 + 3y^2 + 2z^2$ no elipsóide $\mathcal{Q}(x, y, z) = 1$.
2. Use Maple para representar no mesmo gráfico o elipsóide $\mathcal{Q}(x, y, z) = 1$ e sua imagem pela rotação de $2\pi/3$ em torno do eixo x . Faça o mesmo para a rotação de $\pi/4$ em torno do eixo z e para a rotação de $\pi/2$ em torno do eixo y .
3. Seja A a matriz simétrica que representa $\mathcal{Q}$. Verifique que se R for a matriz que representa a reflexão em algum dos planos coordenados então $R^T \cdot A \cdot R = A$. Conclua que estas reflexões são simetrias do elipsóide $\mathcal{Q}(x, y, z) = 1$.
4. Descreva os conjuntos de nível $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \mathcal{Q}(x, y, z) = 0\}$, $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \mathcal{Q}(x, y, z) = -1\}$ e $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \mathcal{Q}(x, y, z) = 1/4\}$.

6.5.3 hiperbolóides

Os hiperbolóides são as quádricas que correspondem a formas quadráticas não degeneradas $Q(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$ em que os autovalores α , β e γ têm sinais diferentes. Tal como fizemos para o elipsóide, estudaremos estas quádricas comparando-as com os hiperbolóides de revolução, em que dois dos autovalores são iguais.

Suponhamos que $\alpha > 0$ e $\gamma < 0$ e seja $\mathcal{L}_\delta : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ uma homotetia ao longo do eixo y da forma $\mathcal{L}_\delta(x, y, z) = (x, \delta y, z)$ de modo que $Q(x, y, z) = Q(\mathcal{L}_\delta(x, y, z)) = \alpha x^2 + \beta \delta^2 y^2 + \gamma z^2$.

Se $\beta < 0$, tomando $\delta = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$ (atenção! $\frac{\gamma}{\beta} > 0$) transformamos a forma quadrática Q na forma $Q_1(x, y, z) = Q(\mathcal{L}_\delta(x, y, z)) = \alpha x^2 + \gamma(y^2 + z^2)$ e concluímos que a quádrica é uma deformação do hiperbolóide de revolução de duas folhas.

Se $\beta < 0$, tomando $\delta = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ transformamos a forma quadrática Q na forma $Q_1(x, y, z) = Q(\mathcal{L}_\delta(x, y, z)) = \alpha(x^2 + y^2) + \gamma z^2$ e concluímos a quádrica é uma deformação do hiperbolóide de revolução de uma folha.

Ao aplicar uma homotetia a um dos eixos coordenados os hiperbolóides passam a ter menos simetrias, restando apenas as reflexões em três planos perpendiculares, gerados por dois autovetores da matriz associada à forma quadrática e rotações de π em torno das três retas em que os planos se intersectam dois a dois, paralelas aos autovetores..

6.5.4 exercícios

Nos exercícios a seguir tome $Q_1(x, y, z) = 3x^2 + \frac{y^2}{2} - 2z^2$ e $Q_2(x, y, z) = -3x^2 - \frac{y^2}{2} + 2z^2$.

1. Use Maple para representar graficamente os hiperbolóides $Q_{\clubsuit}(x, y, z) = 1$ para $\clubsuit = 1$ ou 2 .
2. Mostre diretamente que as reflexões nos planos coordenados são simetrias dos hiperbolóides $Q_{\clubsuit}(x, y, z) = 1$ para $\clubsuit = 1$ ou 2 .
3. Use Maple para representar no mesmo gráfico o hiperbolóide $Q_2(x, y, z) = 1$ e sua imagem pela rotação de $\pi/2$ em torno do eixo z .
4. Use Maple para representar no mesmo gráfico o hiperbolóide $Q_1(x, y, z) = 1$ e sua imagem pela rotação de $2\pi/3$ em torno do eixo x .
5. Use Maple para representar no mesmo gráfico o hiperbolóide $Q_2(x, y, z) = 1$ e sua imagem pela rotação de $\pi/3$ em torno do eixo y .
6. Para $\spadesuit = 1$ ou 2 descreva os conjuntos de nível $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : Q_{\spadesuit}(x, y, z) = 0\}$, $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : Q_{\spadesuit}(x, y, z) = -1\}$ e $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : Q_{\spadesuit}(x, y, z) = 7\}$.
7. Mostre que dada uma forma quadrática Q se $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : Q_1(x, y, z) = 1\}$ for um hiperbolóide de uma folha então $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : Q_1(x, y, z) = -1\}$ será um hiperbolóide de duas folhas.

6.5.5 classificação das quádricas

Podemos resumir os resultados desta secção da seguinte maneira:

Teorema 6 *Seja $Q : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ uma forma quadrática não degenerada. Então o conjunto $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : Q(x, y, z) = 1\}$ ou é um hiperbolóide de uma ou duas folhas ou um elipsóide ou o conjunto vazio.*

Este resultado pode ser reformulado em termos de matrizes para dar informação mais precisa:

Teorema 7 *Seja A uma matriz simétrica 3×3 , com $\det(A) \neq 0$. O conjunto $C_1 = \{X \in \mathbf{R}^3 : X^T \cdot A \cdot X = 1\}$ é um dos seguintes:*

- se os autovalores de A forem todos positivos então C_1 é um elipsóide.
- se apenas um dos autovalores de A for negativo então C_1 é um hiperbolóide de uma folha.
- se exatamente dois dos autovalores de A forem negativos então C_1 é um hiperbolóide de duas folhas.
- se os autovalores de A forem todos negativos então $C_1 = \emptyset$.

Finalmente podemos resumir toda a informação sobre simetrias num só teorema:

Teorema 8 *Seja A uma matriz simétrica 3×3 , com $\det(A) \neq 0$. Então a quádrlica $C_1 = \{X \in \mathbf{R}^3 : X^T \cdot A \cdot X = 1\}$ tem sempre três planos de simetria dois a dois ortogonais (gerados por pares de autovetores) e que se intersectam nas retas paralelas aos autovetores de A .*

A quádrlica C_1 terá um eixo de simetria se e só se for uma superfície de revolução, o que acontecerá se e só se A tiver dois autovalores iguais.

6.5.6 exercícios

1. Descreva as quádrlicas definidas por $X^T \cdot A \cdot X = 1$ para cada uma das matrizes A abaixo, represente-as graficamente e descreva as suas simetrias:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ 3 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -9 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & 1 \\ 3 & 1 & -9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Calcule e diagonalize a matriz da forma quadrática $\mathcal{Q}(x, y, z) = x^2 + y^2 + xz$. Verifique se se trata de uma forma quadrática degenerada. Em caso negativo classifique a quádrlica $\mathcal{Q}(x, y, z) = 1$ e descreva as suas simetrias. Calcule a matriz de $\mathcal{Q}$ na base seguinte e verifique se os elementos da base são ortogonais entre si:

$$\mathbf{u} = (1, -1, 0); \quad \mathbf{v} = (1, 1, 1); \quad \mathbf{w} = (1, 1, -2)$$

3. Considere a forma quadrática $\mathcal{Q}(x, y, z)$ representada pela matriz A que é o produto das matrizes abaixo por esta ordem:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & \sin(\pi/3) & 0 \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Escreva a expressão de $\mathcal{Q}(x, y, z)$. Verifique que $\mathcal{Q}$ não é degenerada, classifique as quádrlicas $\mathcal{Q}(x, y, z) = 1$ e $\mathcal{Q}(x, y, z) = -1$ e descreva as suas simetrias. Encontre uma base de $\mathbf{R}^3$ em que $\mathcal{Q}$ é representada por uma matriz diagonal. Represente as quádrlicas acima graficamente.

4. Verifique se existe uma forma quadrática $\mathcal{Q}$ em $\mathbf{R}^3$ tal que $\mathcal{Q}(x, y, z) = 1$ seja um hiperbolóide de revolução de duas folhas cujo eixo de simetria seja a reta $x = y = z$ e que contenha os pontos $(1, 1, 1)$ e $(3, 2, 2)$.
5. Verifique se existe uma forma quadrática $\mathcal{Q}$ em $\mathbf{R}^3$ tal que $\mathcal{Q}(x, y, z) = 1$ seja um hiperbolóide de uma folha que contenha os pontos $(3, 1, 0)$, $(4, -4, -5)$ e $(5, -5, -7)$.

6. Verifique se existe uma forma quadrática $\mathcal{Q}$ em $\mathbf{R}^3$ tal que $\mathcal{Q}(x, y, z) = -1$ seja um elipsóide que contenha os pontos $(3, 1, 1)$, $(3, -1, -1)$, $(-3, 2, -2)$ e $(-3, 2, -2)$. Caso exista, encontre $\mathcal{Q}$ e responda: Quais os planos de simetria do elipsóide que encontrou? Será possível encontrar um elipsóide de revolução que contenha estes pontos?
7. * Mostre que dados dois pontos em $\mathbf{R}^3$ existe uma infinidade de elipsóides $\mathcal{Q}(x, y, z) = 1$ distintos que os contêm. Qual o número mínimo de pontos em $\mathbf{R}^3$ que permite garantir que existe um único elipsóide que os contém?

7 polinômios outra vez

No exercício 4) no fim da secção 1, exercícios 1.2 voce deve ter verificado que a composta de uma forma quadrática com uma translação nunca é uma forma quadrática, a menos que se use a translação trivial $\mathcal{T}(x, y) = (x, y)$. Por exemplo, para $\mathcal{P}(x, y) = 3x^2 + 2xy$ e para $\mathcal{T}(x, y) = (x, y) + (1, -3)$ obtem-se

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{P}}(x, y) &= \mathcal{P}(\mathcal{T}(x, y)) = \mathcal{P}(x+1, y-3) = 3(x+1)^2 + 2(x+1)(y-3) = \\ &= 3(x^2 + 2x + 1) + 2(xy - 3x + y - 3) = 3x^2 + 2xy + 2y - 3\end{aligned}$$

que não é uma forma quadrática.

A composta $\tilde{\mathcal{P}}(x, y) = \mathcal{P}(\mathcal{T}(x, y))$ é um polinômio de grau 2 não homogêneo. Como $\tilde{\mathcal{P}}$ foi obtido a partir de $\mathcal{P}$ por uma translação, então os conjuntos de nível de $\tilde{\mathcal{P}}$ são imagem dos de $\mathcal{P}$ pela translação $\mathcal{T}^{-1}$. Mais precisamente, $\tilde{\mathcal{P}}(x, y) = c$ se e somente se $\mathcal{T}(x, y) = (x_1, y_1)$ estiver no conjunto $\mathcal{P}(x_1, y_1) = c$. No exemplo acima, o conjunto de nível $\mathcal{P}(x, y) = 1$ é uma hipérbole, e $\tilde{\mathcal{P}}(x, y) = 1$ é a imagem desta mesma hipérbole pela translação $\mathcal{T}^{-1}(x, y) = (x, y) + (-1, 3)$. O conjunto de nível $\mathcal{P}(x, y) = 0$ é constituído por duas retas que se cruzam na origem, logo o conjunto de nível $\tilde{\mathcal{P}}(x, y) = 0$ é formado por duas retas paralelas às anteriores que se cruzam em $(-1, 3)$.

Este mesmo método pode ser usado para representar curvas de nível de qualquer polinômio de grau 2 que tenha sido obtido compondo uma forma quadrática com uma translação. O conjunto destes polinômios é descrito no teorema a seguir:

Teorema 9 *Dados $\mathcal{P} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ uma forma quadrática, $\mathcal{L} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ uma transformação linear e c um número real, considere o polinômio $\tilde{\mathcal{P}}(x, y) = \mathcal{P}(x, y) + \mathcal{L}(x, y) + c$. Se $\mathcal{P}$ não for degenerada então existem sempre translações $\mathcal{T}_1 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ e $\mathcal{T}_2 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ tais que $\tilde{\mathcal{P}}(x, y) = \mathcal{T}_1(\mathcal{P}(\mathcal{T}_2(x, y)))$.*

Demonstração: Como a forma quadrática $\mathcal{P}$ não é degenerada, existe uma rotação $\rho : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ tal que

$$\mathcal{P}_1(x, y) = \mathcal{P}(\rho(x, y)) = \alpha x^2 + \beta y^2 \quad \text{com} \quad \alpha \neq 0 \neq \beta$$

e por isso

$$\tilde{\mathcal{P}}(\rho(x, y)) = \mathcal{P}_1(x, y) + \mathcal{L}(\rho(x, y)) + c.$$

Como $\mathcal{L}(\rho(x, y))$ é uma transformação linear $\mathcal{L} \circ \rho : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, podemos escrevê-la na forma $\mathcal{L}(\rho(x, y)) = ax + by$ com a e $b \in \mathbf{R}$ obtendo:

$$\tilde{\mathcal{P}}(\rho(x, y)) = \mathcal{P}_1(x, y) + ax + by + c = \alpha x^2 + \beta y^2 + ax + by + c.$$

A tese do teorema é que sempre podemos completar o quadrado, o que pode ser calculado explicitamente:

$$\tilde{\mathcal{P}}(\rho(x, y)) = \alpha \left(x + \frac{a}{2\alpha} \right)^2 + \beta \left(y + \frac{b}{2\beta} \right)^2 + C = \mathcal{P} \left(\rho \left(x + \frac{a}{2\alpha}, y + \frac{b}{2\beta} \right) \right) + C$$

com

$$C = c - \left(\left(\frac{a^2}{4\alpha} \right) + \left(\frac{b^2}{4\beta} \right) \right)$$

ou seja, $\tilde{\mathcal{P}}(\rho(x, y)) = \mathcal{P}(\rho(\mathcal{T}_3(x, y))) + C = \mathcal{T}_1(\mathcal{P}(\rho(\mathcal{T}_3(x, y))))$ onde $\mathcal{T}_1 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ e $\mathcal{T}_3 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ são as translações:

$$\mathcal{T}_1(x) = x + C \quad \text{e} \quad \mathcal{T}_3(x, y) = \left(x + \frac{a}{2\alpha}, y + \frac{b}{2\beta}\right).$$

Compondo com a rotação ρ^{-1} obtemos $\tilde{\mathcal{P}}((x, y)) = \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{P} \circ \rho \circ \mathcal{T}_3 \circ \rho^{-1}(x, y)$ e para que o teorema fique demonstrado basta verificar que $\mathcal{T}_2(x, y) = \rho \circ \mathcal{T}_3 \circ \rho^{-1}(x, y)$ é uma translação. $\square$

Em termos geométricos, provamos que o conjunto de nível de um polinômio de grau 2 com parte quadrática não degenerada é sempre a imagem por uma translação de algum conjunto de nível da parte quadrática. As possibilidades são: uma elipse ou um ponto ou o conjunto vazio se a parte quadrática tiver autovalores de sinais iguais, uma hipérbole ou duas retas se os sinais dos autovalores da parte quadrática forem diferentes.

7.1 exercícios

1. Use Maple para representar graficamente as cônicas definidas por $\mathcal{P}_i(x, y) = 0$, para cada um dos polinômios $\mathcal{P}_i(x, y)$ abaixo.

$$\mathcal{P}_1(x, y) = x^2 + y^2 - y + 2xy \quad \mathcal{P}_2(x, y) = 2x^2 - 16x + 30 + y^2 - 14y + 4xy$$

$$\mathcal{P}_3(x, y) = x - y^2 + 5y + 2 \quad \mathcal{P}_4(x, y) = 2x^2 - 14x + 24 + y^2 - 8y + 2xy$$

$$\mathcal{P}_5(x, y) = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 9y + 2xy \quad \mathcal{P}_6(x, y) = -x^2 - 2x - 2 - y^2 + 2y - 2xy$$

2. Para cada um dos polinômios $\mathcal{P}_i(x, y)$ acima decida se é possível encontrar uma translação do plano que o transforme numa forma quadrática e neste caso use Maple para encontrar explicitamente a translação.
3. Quais são as simetrias das cônicas $\mathcal{P}_i(x, y) = 0$ do exercício 1?
4. Será possível encontrar um polinômio $\tilde{\mathcal{P}} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ de grau 2 tal que o conjunto de nível $\{(x, y) : \tilde{\mathcal{P}}(x, y) = 1\}$ seja uma hipérbole contendo o ponto $(6, -2)$ e simétrica para a reflexão nas retas $y = 3x + 1$ e $y = -x/3$?
5. Será possível encontrar um polinômio $\hat{\mathcal{P}} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ de grau 2 tal que o conjunto de nível $\{(x, y) : \hat{\mathcal{P}}(x, y) = 1\}$ seja simétrico para a reflexão nas retas $y = -x + 4$ e $y = 3x + 1$ e contenha os pontos $(1, -3)$ e $(2, -1)$?
6. Será possível encontrar um polinômio $\bar{\mathcal{P}} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ de grau 2 tal que o conjunto de nível $\{(x, y) : \bar{\mathcal{P}}(x, y) = 1\}$ seja simétrico para a reflexão nas retas $y = -x + 4$ e $y = x - 3$ e contenha os pontos $(1, -3)$ e $(2, -1)$?
7. Mostre que se $\mathcal{L} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ for uma transformação linear com inversa $\mathcal{L}^{-1}$ e se $\mathcal{T} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ for uma translação, então $\mathcal{L} \circ \mathcal{T} \circ \mathcal{L}^{-1}$ é uma translação.
8. Mostre que a composta de um polinômio de grau 2 no plano com uma transformação afim do plano é sempre um polinômio de grau ≤ 2 .
9. Dê um exemplo de um polinômio de grau 2 no plano e de uma transformação afim tais que a sua composta tem grau menor que 2.
10. * Mostre que a composta de um polinômio de grau 2 no plano com uma transformação afim inversível do plano é sempre um polinômio de grau 2.
11. * Enuncie e demonstre o resultado análogo ao teorema 9 para polinômios de três variáveis.

8 formas degeneradas

Na demonstração do teorema 9 foi essencial que a forma quadrática não fosse degenerada, para podermos dividir pelos autovalores α e β . Para formas degeneradas o resultado não é verdadeiro, como se vê no exemplo da forma quadrática $\mathcal{P}(x, y) = x^2$. O conjunto de nível $\mathcal{P}(x, y) = k$ é vazio se $k < 0$, é o eixo y se $k = 0$, e é composto pelas duas retas verticais $x = \pm\sqrt{k}$ se $k > 0$. Se o teorema fosse válido para $\mathcal{P}$ então os conjuntos de nível do polinômio $x^2 - y$ seriam imagem de um dos conjuntos acima por uma translação, o que é um absurdo porque $x^2 - y = 0$ é a equação de uma parábola.

Se a forma quadrática $\mathcal{P}(x, y)$ for degenerada ainda podemos descrever as curvas de nível de $\hat{\mathcal{P}}(x, y) = \mathcal{P}(x, y) + \mathcal{L}(x, y) + c$ com $\mathcal{L} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ linear e $c \in \mathbf{R}$ usando uma construção análoga à do teorema 9. A forma $\mathcal{P}(x, y)$ será degenerada se e só se algum dos autovalores da matriz que a representa for zero. Se os dois autovalores forem iguais a zero, então $\mathcal{P}(x, y) \equiv 0$ e $\hat{\mathcal{P}}(x, y) = \mathcal{L}(x, y) + c$. Os conjuntos de nível de $\hat{\mathcal{P}}$ são os mesmos de $\mathcal{L}$, isto é, retas.

O caso em que um dos autovalores da matriz que representa $\mathcal{P}$ é diferente de zero e o outro é igual a zero é mais interessante. Por uma rotação ρ do plano podemos escrever

$$\mathcal{P}(\rho(x, y)) = \alpha x^2 \quad \text{e} \quad \hat{\mathcal{P}}(\rho(x, y)) = \alpha x^2 + \mathcal{L}(\rho(x, y)) + c = \alpha x^2 + ax + by + c$$

como na demonstração do teorema 9, tomando $\beta = 0$. Ainda podemos completar o quadrado em x :

$$\tilde{\mathcal{P}}(\rho(x, y)) = \alpha \left(x + \frac{a}{2\alpha} \right)^2 + by + C \quad \text{com} \quad C = c - \left(\frac{a^2}{4\alpha} \right)$$

e assim encontramos uma rotação ρ do plano e duas translações $\mathcal{T}_1 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ e $\mathcal{T}_2 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ tais que $\mathcal{T}_1(\hat{\mathcal{P}}(\rho(\mathcal{T}_2(x, y)))) = \alpha x^2 + by$. Se $b \neq 0$ os conjuntos de nível desta expressão são as parábolas $y = -\alpha x^2/b + \text{const.}$ e os de $\tilde{\mathcal{P}}$ serão também parábolas, transladadas e rodadas.

8.1 exercícios

Nestes exercícios faremos o estudo em Maple das cônicas como intersecções de um cone com um plano.

1. Considere a forma quadrática $\mathcal{Q}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Use Maple para verificar que todos os pontos da superfície de revolução $(x, y, z) = (r \cos(t), r \sin(t), r)$ estão na superfície de nível $\mathcal{Q}(x, y, z) = 0$. Represente esta superfície usando “plot3d([r cos(t), r sen(t), r], r = -1..1, t = 0..2*Pi)”. Compare com o resultado de “implicitplot3d(x^2 + y^2 - z^2 = 0, x = -1..1, y = -1..1, z = -1..1)”.
2. Dado $a \in \mathbf{R}$, considere o plano P_a em $\mathbf{R}^3$ perpendicular ao vetor $(1, a, 0)$, que é dado por

$$P_a = \{(x_1, x_2, -x_1 - ax_2), \text{ com } x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}.$$

Represente no mesmo gráfico o cone do exercício anterior e estes planos para $a = 0$, $a = \pm 1/4$ e $a = \pm 1/2$. A maneira mais fácil de fazer a figura é usar “plot3d”, usando os mesmos dois parâmetros para a superfície e para os planos.

3. Use Maple para calcular a restrição da forma quadrática $\mathcal{Q}(x, y, z)$ ao plano P_a e para verificar que o resultado é um polinômio de grau 2 $\tilde{\mathcal{P}}_a(x_1, x_2)$ cujos coeficientes dependem do valor de a . Escreva a matriz da parte homogênea de grau 2 de $\tilde{\mathcal{P}}_a$ e calcule os seus autovalores. Descreva as curvas de nível $\tilde{\mathcal{P}}_a = 0$ e represente-as graficamente usando o comando “implicitplot”.
4. Repita os exercícios 2 e 3 para o plano perpendicular ao vetor $(0, a, 1)$ com $a \in \mathbf{R}$.
5. * Mini-projeto para quem quer saber mais sobre cônicas
Chamamos cônica degenerada aos conjuntos de nível $\mathcal{P}(x, y) = 0$ de uma forma quadrática $\mathcal{P}$ qualquer e também aos conjuntos de nível $\hat{\mathcal{P}}(x, y) = \pm 1$ de um polinômio de grau 2 cuja parte quadrática é degenerada. Mostre que as cônicas degeneradas são: um ponto, uma reta, duas retas, uma parábola ou o conjunto vazio. Use Maple para escrever a equação da intersecção de um cone com um plano em $\mathbf{R}^3$ e mostre que as cônicas são realmente intersecções do cone com o plano.

6. * Para saber mais sobre cônicas e quádras leia o primeiro capítulo de *Geometry and the Imagination* de Hilbert e Conn Vossen.