

Cálculo em Computadores — 2006**Integrais de funções de duas variáveis****Contents**

1	Áreas no plano	2
1.1	exercícios	3
2	Integrais de funções de duas variáveis reais	4
2.1	exercícios	5
3	Descontinuidades	5
3.1	exemplo e exercício	7

1 Áreas no plano

Esta secção é uma revisão rápida da teoria de integração de funções de uma variável real.

Dada uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, queremos calcular a área da região no plano entre o gráfico $y = f(x)$ e o eixo xx , para $x \in [a, b]$, como a parte azul na figura que voce fará com os comandos Maple a seguir:

```
> restart;
> with(plots):
> f:=sin(4*x)+cos(5*x)+3;
> a:=Pi:b:=3*Pi:
> Pf:=plot(f,x=a..b,filled=true,colour=cyan):
> Pq:=plot(f,x=0..4*Pi,colour=black):
> display([Pf,Pq]);
```

Aquí $f(x) = \sin 4x + \cos 5x + 3$ no intervalo $[a, b] = [\pi, 3\pi]$.

A área será calculada aproximadamente usando retângulos. Uma aproximação por $R = 8$ retângulos é desenhada executando, depois dos comandos Maple acima, os seguintes:

```
> R:=8:
> delta:=(b-a)/R:
> X:=seq(a+j*delta,j=0..R+1):
> Y:=seq(subs(x=X[j-1],f),j=1..R+1):
> ListaRets:=[Pq,seq(plot(Y[j],x=X[j-1]..X[j],filled=true),j=2..R+1)]:
> display(ListaRets);
```

Observe como a aproximação melhora quando aumentamos o valor de R , por exemplo para o dobro. Com 64 retângulos o desenho já se parece bastante com a área a calcular e com 128 retângulos já é preciso ampliar bastante o desenho para ver a diferença.

No programa acima, dividimos o intervalo $[a, b]$ em $R = 2^n$ intervalos de mesmo tamanho, delimitados por $R + 1$ pontos uniformemente espaçados em $[a, b]$, dados por $x_j = a + j\delta_n$ para $j = 0, \dots, R$, com $\delta_n = (b - a)/R$, ou seja,

$$x_0 = a, \quad x_j = x_{j-1} + \delta_n \quad j = 1, \dots, R, \quad x_R = b.$$

Para o desenho, usamos como altura do retângulo o valor de f no ponto x_i da esquerda do intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ $i = 0, \dots, R - 1$. Obtemos uma aproximação $E(n)$ para a área, dada pela soma das áreas dos R retângulos:

$$E(n) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \delta_n f(x_j)$$

que podemos chamar de *área aproximada à esquerda*. Poderíamos ter usado o valor de f em outro ponto do mesmo intervalo, o que daria uma outra aproximação para a mesma região. Por exemplo, podemos definir a *área aproximada à direita* $D(n)$, usando como altura o valor da função no extremo direito do intervalo $[x_i, x_{i+1}]$:

$$D(n) = \sum_{j=1}^{2^n} \delta_n f(x_j)$$

o que dará um outro valor aproximado para a área.

Podemos calcular uma aproximação por excesso da área, $A(n)$, usando como altura de cada retângulo o máximo da função f no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ e uma aproximação por defeito, $a(n)$ usando o mínimo da função no mesmo intervalo:

$$A(n) = \sum_{j=1}^{2^n} \delta_n \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \quad a(n) = \sum_{j=1}^{2^n} \delta_n \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

Teorema 1 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ uma função contínua, $a < b \in \mathbf{R}$. Então as sucessões $A(n)$, $a(n)$, $E(n)$ e $D(n)$ convergem para o mesmo limite quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração: Para todo n tem-se:

$$a(n) \leq E(n) \leq A(n) \quad a(n) \leq D(n) \leq A(n)$$

de modo que basta mostrar que as sucessões $A(n)$ e $a(n)$ convergem para o mesmo limite. Para isto começamos por observar que para todo n tem-se:

$$m(b-a) \leq a(n) \leq A(n) \leq M(b-a)$$

onde M e m são o máximo e o mínimo de f no intervalo fechado $[a, b]$, respectivamente. Cada uma das sucessões $A(n)$ e $a(n)$ é monótona, respectivamente decrescente e crescente. Esta última propriedade vem da maneira como construímos os retângulos: cada um dos retângulos usados na aproximação $A(n+1)$ está contido em um dos retângulos usados em $A(n)$, cuja base foi dividida ao meio para fazer a aproximação seguinte.

Como as duas sucessões $A(n)$ e $a(n)$ são monótonas e limitadas, então elas convergem. Resta ver que convergem para o mesmo limite. Para isto estimamos o erro cometido em cada aproximação, que é

$$\mathcal{E}(n) = A(n) - a(n) = \sum_{j=1}^{2^n} \delta_n \left(\max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) - \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \right) = \delta_n \sum_{j=1}^{2^n} \left(\max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) - \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \right).$$

Sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$ e pela continuidade de f temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) - \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \right) = 0$$

logo $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}(n) = 0$, como queríamos. $\square$

Denotamos o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = \int_a^b f(x) dx$ e definimos a área (orientada) entre o gráfico de f e o eixo como sendo este limite.

Dizemos que uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ é *seccionalmente contínua* em $[a, b]$, se existir um conjunto finito de pontos $a = c_0 < c_1 < \dots < c_k < c_{k+1} = b$ tais que f é contínua em cada um dos intervalos $[c_j, c_{j+1}]$, $j = 0, \dots, k$, o que quer dizer, em particular, que existem os limites $\lim_{x \rightarrow c_j^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow c_{j+1}^-} f(x)$, $j = 0, \dots, k$.

Isto é, pode existir um número finito de pontos onde f tem uma descontinuidade de tipo salto. O Teorema 1 continua válido para funções seccionalmente contínuas em vez de contínuas.

Convém lembrar que a integral define uma área orientada: as regiões abaixo do eixo horizontal são consideradas áreas negativas.

1.1 exercícios

- Escreva um procedimento ‘Esquerda’ em Maple que dados: números a, b , uma expressão $f(x)$ e um natural n ; calcule $E(n)$, o valor aproximado de $\int_a^b f(x) dx$ usando 2^n retângulos, com altura estimada à esquerda.
 - Use o procedimento ‘Esquerda’ para calcular o valor aproximado de $\int_{\pi}^{3\pi} \sin 4x \cos 5x + 3 dx$ com diferentes valores de n . Compare com o resultado obtido usando o comando ‘int’ de Maple.
- Modifique o procedimento do exercício 1a) para produzir um procedimento ‘Direita’ que calcule $D(n)$, o valor aproximado de $\int_a^b f(x) dx$ usando 2^n retângulos, com altura estimada à direita.

3. Modifique as instruções Maple do texto que foram usadas para representar os retângulos com área $E(n)$ para que passem a representar os retângulos com área $D(n)$.
4. Para $n = 1, \dots, 7$, calcule a diferença entre o resultado dos procedimentos que escreveu em 1a) e 2) aplicados ao cálculo de $\int_{\pi}^{3\pi} \sin 4x \cos 5x + 3dx$. O que pode concluir a partir destes cálculos?
5. Use os seus procedimentos para obter estimativas de $E(n)$, $D(n)$ e $\mathcal{E}(n)$ para $f(x) = \sin(\frac{x}{3}) + \cos(x)$, $a = 3\pi/2$, $b = \pi$ e compare as estimativas com o valor obtido usando o comando 'int' de Maple. Faça o gráfico de f no intervalo $[a, b]$. O que se pode concluir?
6. Repita o exercício 5) para: $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 0 \\ \sin x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ com $a = -1$ e $b = 3$.
7. Sejam: n um número natural, $x_0 = a < b = x_{2^n} \in \mathbf{R}$, $\delta_n = \frac{b-a}{2^n}$, $x_j = x_{j-1} + \delta_n \in [a, b]$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ uma função seccionalmente contínua.
 - (a) Seja t_j , $j = 1, \dots, 2^n$ o trapézio cujos vértices são os pontos: $(x_{j-1}, 0)$, $(x_j, 0)$, $(x_{j-1}, f(x_{j-1}))$, $(x_j, f(x_j))$. Escreva um procedimento Maple que, dados a, b, n e f , represente na mesma figura os trapézios t_j para $j = 1, \dots, 2^n$ e o gráfico de $f(x)$.
 - (b) Calcule a área de t_j .
 - (c) Escreva um procedimento Maple que, dados a, b, n e f , calcule a área $T(n)$ que é a soma das áreas dos trapézios t_j para $j = 1, \dots, 2^n$.
 - (d) Mostre que $a(n) \leq T(n) \leq A(n)$ para todo n natural.
 - (e) Compare o valor de $T(n)$ com os resultados dos exercícios acima. Este método de cálculo aproximado de áreas chama-se *método dos trapézios*. Para funções de classe C^1 pode-se mostrar que $T(n)$ converge para $\int_a^b f(x)dx$ muito mais depressa do que $E(n)$ e $D(n)$.

2 Integrais de funções de duas variáveis reais

Podemos adaptar o método da secção 1 para calcular o volumes em $\mathbf{R}^3$.

Dado um retângulo $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbf{R}^2$ e uma função $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ queremos calcular o volume orientado da região entre o gráfico de $\varphi(x, y)$ e o plano horizontal (que é o gráfico da função constante igual a zero). Começamos por subdividir o retângulo $\mathcal{R}$, subdividindo cada um dos seus lados em $R = 2^n$ segmentos. Adaptando a notação da secção 1, temos:

$$\delta_n^x = \frac{b-a}{2^n}, \quad x_0 = a, \quad x_j = x_{j-1} + \delta_n^x \quad j = 1, \dots, R, \quad \Rightarrow \quad x_j = a + j\delta_n^x, \quad x_R = b$$

$$\delta_n^y = \frac{c-d}{2^n}, \quad y_0 = c, \quad y_j = y_{j-1} + \delta_n^y \quad j = 1, \dots, R, \quad \Rightarrow \quad y_j = c + j\delta_n^y, \quad y_R = d$$

e assim obtemos 2^{2n} retângulos $\mathcal{R}_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, para $i, j = 1, \dots, R$. Calculamos o volume aproximado escolhendo como base um paralelepípedo para cada um dos pequenos retângulos e usando como altura o máximo de $\varphi(x, y)$ no retângulo, o que nos dá um volume $V(n)$ aproximado por excesso. O volume $v(n)$ aproximado por defeito é obtido usando o mínimo de $\varphi(x, y)$ como altura:

$$V(n) = \sum_{i,j=1}^{2^n} \delta_n^x \delta_n^y \max_{(x,y) \in \mathcal{R}_{ij}} \varphi(x, y) \quad v(n) = \sum_{i,j=1}^{2^n} \delta_n^x \delta_n^y \min_{(x,y) \in \mathcal{R}_{ij}} \varphi(x, y).$$

Teorema 2 *Seja $\varphi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbf{R}$ uma função contínua, $a < b \in \mathbf{R}$ e $c < d \in \mathbf{R}$. Então as sucessões $V(n)$ e $v(n)$ convergem para o mesmo limite quando $n \rightarrow \infty$.*

A demonstração é tão parecida com a do Teorema 1 que não vale a pena ser feita e fica como exercício. Definimos $\int_{\mathcal{R}} \varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} V(n)$. Este limite pode ser calculado aproximadamente usando paralelepípedos cuja altura é o valor de φ em algum ponto escolhido do retângulo $\mathcal{R}_{ij}$, como foi feito na secção 1. Aqui há mais escolhas naturais, como por exemplo:

$$EE(n) = \sum_{i,j=1}^{2^n} \delta_n^x \delta_n^y \varphi(x_{i-1}, y_{j-1}) \quad DD(n) = \sum_{i,j=1}^{2^n} \delta_n^x \delta_n^y \varphi(x_i, y_j).$$

O cálculo da integral é uma adaptação moderna do método clássico de cálculo do volume de um sólido por *exaustão*¹ que, no Livro XII dos *Elementos* de Euclides (séc. III a.C.) é atribuído a Eudoxo (séc IV a.C.). O método consiste em estimar o volume $V(n)$ de um conjunto de 2^{2n} paralelepípedos que contêm o sólido no seu interior e o volume $v(n)$ de outros paralelepípedos que estão contidos no interior do sólido. O Teorema 2 diz que existe um único valor $\mathbf{v}$ tal que para todo n , $v(n) \leq \mathbf{v} \leq V(n)$. Esta formulação do cálculo de volumes foi feita por I. Newton (1642–1727) e tornada rigorosa, para os padrões atuais, por A.L. Cauchy (1789–1857).

2.1 exercícios

1. Mostre que para todo n , $v(n) \leq EE(n) \leq V(n)$ e $v(n) \leq DD(n) \leq V(n)$.
2. Mostre que se $\varphi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbf{R}$ for contínua então as sucessões $EE(n)$ e $DD(n)$ convergem para $\int_{\mathcal{R}} \varphi$.
3. Modifique o procedimento ‘Esquerda’ do exercício 1a) da secção 1 para obter um procedimento que calcule aproximadamente o volume $\int_{\mathcal{R}} \varphi$ usando $2^n \times 2^n$ paralelepípedos como em $EE(n)$.
4. Mostre que se $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ for uma função contínua e se $k \in \mathbf{R}$ então $\int_{\mathcal{R}} k\varphi = k \int_{\mathcal{R}} \varphi$ (cuidado com o sinal de k).
5. Mostre que se φ e $\psi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ forem funções contínuas e se $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathcal{R}$ então $\int_{\mathcal{R}} \varphi \leq \int_{\mathcal{R}} \psi$.
6. Mostre que se φ e $\psi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ forem funções contínuas então $\int_{\mathcal{R}} (\varphi + \psi) = \int_{\mathcal{R}} \varphi + \int_{\mathcal{R}} \psi$.

3 Descontinuidades

Na secção 2 calculamos o volume da parte de um prisma de base retangular que fica abaixo do gráfico de uma função contínua — na verdade definimos este volume como um limite. Seria interessante calcular volumes de regiões cujas bases tivessem outras formas, como por exemplo a região azul dada pelas instruções Maple:

```
> restart: with(plots):
> g1:=sin(3*x)*cos(2*x)+1;
> g2:=1+3*cos(x/4)/2;
> plot([g1,g2],x=0..2*Pi,filled=true, colour=[white,blue]);
```

Para uma região mais simples, experimente:

```
> restart: with(plots):
> g1:=sin(x/2):g2:=2*sin(x/2):
> plot([g1,g2],x=0..2*Pi,filled=true, colour=[white,blue]);
> phi:=(x-Pi)^2+(y-1)^2+1;
> plot3d([phi,0],x=0..2*Pi,y=1..2,colour=[blue,cyan]);
> crista1:=subs(y=g1,phi);
```

¹No folclore: o método da exaustão consiste em calcular volumes até ficarmos exaustos.

```

> parede1:=plot3d([x,g1,z],x=0..2*Pi,z=0..crista1):
> crista2:=subs(y=g2,phi);
> parede2:=plot3d([x,g2,z],x=0..2*Pi,z=0..crista2):
> tampas:=plot3d([phi,0],x=0..2*Pi,y=g1..g2,colour=[blue,cyan]):
> display(parede1,parede2,tampas);

```

O primeiro “plot” desenha a base e a primeira instrução “plot3d” faz o gráfico de $\varphi(x, y)$ sobre um retângulo. A instrução “display” mostra um sólido do tipo daqueles cujo volume queremos calcular. Para desenhar o sólido correspondente à primeira região que desenhemos, basta substituir as expressões de g_1 e g_2 e acrescentar uma terceira parede (porque?) com as instruções:

```

> crista3:=subs(x=0,phi);L1:=subs(x=0,g1):L2:=subs(x=0,g2):
> parede3:=plot3d([0,y,z],y=L1..L2,z=0..crista3):
> display(parede1,parede2,parede3,tampas);

```

Se deixarmos o programa sem a terceira parede podemos ver o sólido pelo lado de dentro (não se queixe se achar o exemplo confuso).

Em geral, seja $\Omega \subset \mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbf{R}^2$ uma região como as que desenhemos com Maple, isto é, uma região delimitada pelos gráficos de duas funções

$$\Omega = \{(x, y) : x \in [a, b] \text{ e } g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

com g_1 e $g_2 : [a, b] \rightarrow [c, d]$ funções de classe C^1 . O “prisma de altura 1 e base Ω ” é a região entre o plano $\{(x, y, z) : z = 0\}$ e o gráfico da *função característica* $\chi_\Omega(x, y)$:

$$\chi_\Omega : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad \chi_\Omega(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

e pode ser desenhado em Maple, para g_1 e g_2 no exemplo acima, substituindo nas instruções a função $\varphi(x, y)$ pela função constante $\varphi(x, y) = 1$. A partir da função característica poderíamos definir o volume entre o gráfico de uma função $\varphi(x, y)$ e o plano $z = 0$, para $(x, y) \in \Omega$ como o volume entre o gráfico de $\psi(x, y) = \varphi(x, y) \cdot \chi_\Omega(x, y)$ e o plano $z = 0$ para $(x, y) \in \mathcal{R}$. O problema é que o Teorema 2 não pode ser aplicado porque as funções χ_Ω e $\psi(x, y)$ são descontínuas. Para calcular o volume do prisma e o do sólido precisamos de uma extensão do conceito de integral.

Continua a ser possível definir os volumes aproximados $V(n)$ e $v(n)$ para a função χ_Ω , já que ela tem um máximo e um mínimo em cada retângulo $\mathcal{R}_{ij}$ e continua a ser verdade que $V(n)$ e $v(n)$ são monótonas e limitadas e portanto convergem. A única dificuldade em definir $\int_{\mathcal{R}} \chi_\Omega$ reside em mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} V(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(n)$. Para o caso de uma variável definimos a integral para funções que tinham descontinuidades bem comportadas, desde houvesse poucos pontos de descontinuidade. No plano teremos que nos preocupar com a maneira como as descontinuidades estão distribuídas, o que poderá afetar a igualdade dos dois limites. Definimos uma função *seccionalmente contínua* em um retângulo $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbf{R}^2$ como sendo uma função $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ cujas únicas descontinuidades em $\mathcal{R}$ estão todas contidas em um número finito de gráficos $y = g_j(x)$, $j = 1, \dots, k$ de funções de classe C^1 . Além disto, exigimos que as distribuições marginais $f_x : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}$ dadas por $f_x(y) = \varphi(x, y)$, sejam seccionalmente contínuas — ou seja, exigimos que nos pontos de descontinuidade, existam os limites de $f_x(y)$ à esquerda e à direita (sem serem necessariamente iguais). Esta arrumação das descontinuidades faz com que seja possível ignorar o erro que elas introduzem nas estimativas de $V(n) - v(n)$, e obtem-se o resultado a seguir, que não provaremos.

Teorema 3 *Seja $\varphi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbf{R}$ uma função seccionalmente contínua, $a < b \in \mathbf{R}$ e $c < d \in \mathbf{R}$. Então as sucessões $V(n)$ e $v(n)$ convergem para o mesmo limite quando $n \rightarrow \infty$.*

3.1 exemplo e exercício

1. Uma outra maneira de produzir os gráficos dos exemplos acima é escrever a função $\psi(x, y) = \varphi(x, y)\chi_{\Omega}(x, y)$ como um procedimento:

```
> psi:=proc(x,y) local g1,g2;  
> g1:=proc(x)sin(3*x)*cos(2*x)+1 end proc;  
> g2:=proc(x)1+3*cos(x/4)/2 end proc;  
> if ((y<g1(x)) or (y>g2(x))) then 0  
> else (x-Pi)^2+(y-1)^2+1 end if  
> end proc;
```

Para descobrir porque não escolhemos este processo, faça:

```
> plot3d(psi,0..2*Pi,1..2);
```

e compare com os resultados dos exemplos acima.

2. Use o procedimento do exercício 2.1.3 para calcular aproximadamente $\int_{\mathcal{R}} \psi$ onde $\psi(x, y)$ é a função definida pelo procedimento do exercício 1) e onde $\mathcal{R} = [0, 2\pi] \times [1, 2]$.