

Cálculo em Computadores — 2006**Funções de duas variáveis****Contents**

1	derivadas	2
2	exercícios	3
3	composição e curvas de nível	3
4	exercícios	7
5	derivadas de ordem superior a 1	7
6	exercícios	8
7	funções que se anulam na origem	9
8	exercícios	11
9	polinômio de Taylor	11
10	exercício	12
11	pontos críticos	12
	11.1 exemplo em Maple	13
	11.2 pontos críticos não degenerados	14
12	exercícios	14

1 derivadas

Nesta secção estudaremos derivadas de funções de duas variáveis $\varphi(x, y)$ ou de três variáveis $\psi(x, y, z)$. Como acontece com as funções de uma variável e com as trajetórias no plano, a derivada nos dará informação geométrica sobre a função.

Já conhecemos a geometria dos polinômios de segundo grau de duas variáveis, pelo menos nos casos não degenerados. Outros exemplos de funções de duas variáveis podem ser construídos a partir das funções elementares de uma variável:

$$\begin{array}{llll} \varphi_1 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} & \varphi_2 :]2\pi, 4\pi[\times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} & \varphi_3 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} & \varphi_4 :]-2, 0[\times]0, 1[\longrightarrow \mathbf{R} \\ \varphi_1(x, y) = \cos(xy) & \varphi_2(x, y) = \frac{xy}{\sin x} & \varphi_3(x, y) = \frac{x^2 y}{e^{x+y}} & \varphi_4(x, y) = \frac{x^2 + y^3 + 5xy^2}{y(y-1)x(x+2)} \end{array}$$

Suponhamos que a função φ esteja definida para valores de x em um intervalo $]a_1, b_1[\subset \mathbf{R}$ e valores de y noutro intervalo $]a_2, b_2[\subset \mathbf{R}$. Dito de outra maneira, φ está definida no retângulo aberto $\mathcal{R} \subset \mathbf{R}^2$ que é o produto cartesiano dos dois intervalos abertos, $\mathcal{R} =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$, com a_1, b_1, a_2 e $b_2 \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. A maneira mais simples de entender a geometria de φ é representar graficamente o que acontece para um valor de $y \in]a_2, b_2[$ fixo: temos uma função de uma variável $f :]a_1, b_1[\longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x) = \varphi(x, y)$ cujo gráfico queremos estudar. A função f será derivável no ponto $x \in]a_1, b_1[$ se existir o limite

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)}{h}$$

É claro que para cada escolha de y podemos ter uma função f diferente, com derivada f' diferente. Por exemplo, para a função $\varphi_1(x, y) = \cos(xy)$, se fixarmos $y = 1$ obteremos $f(x) = \cos(x)$ e $f'(x) = -\sin(x)$. Se fixarmos $y = \pi$ obteremos $f(x) = \cos(\pi x)$ e $f'(x) = -\pi \sin(\pi x)$.

Agora podemos fixar $x \in]a_1, b_1[$ e obter uma função $g :]a_2, b_2[\longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $g(y) = \varphi(x, y)$ que será derivável no ponto $y \in]a_2, b_2[$ se existir o limite

$$g'(y) = \frac{dg}{dy}(y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\varphi(x, y+k) - \varphi(x, y)}{k}.$$

Estas duas derivadas são chamadas as *derivadas parciais* de φ no ponto (x, y) , com a notação:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)}{h} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\varphi(x, y+k) - \varphi(x, y)}{k}.$$

Calcular as derivadas parciais de uma função é fácil: basta pensar que uma das variáveis é constante e derivar a outra. Todas as regras para calcular derivadas de funções de uma variável podem ser aplicadas. Por exemplo, as derivadas parciais da função $\varphi_1(x, y)$ definida acima são

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y) = -y \sin(xy) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y) = -x \sin(xy)$$

e as de $\varphi_2(x, y)$ são

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y) = \frac{y \sin x - xy \cos x}{\sin^2 x} \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{\sin x}$$

Derivadas parciais de funções de três variáveis são definidas da mesma maneira: se $\psi(x, y, z)$ definir uma função $\psi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbf{R}$ onde $\mathcal{P} \subset \mathbf{R}^3$ é um paralelepípedo aberto, $\mathcal{P} =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times]a_3, b_3[$ com a_i e $b_i \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ então as derivadas parciais de ψ num ponto $(x, y, z) \in \mathcal{P}$ serão dadas pelos limites abaixo, se existirem:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{\psi(x+h_1, y, z) - \psi(x, y, z)}{h_1} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y, z) = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{\psi(x, y+h_2, z) - \psi(x, y, z)}{h_2}$$

e

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}(x, y, z) = \lim_{h_3 \rightarrow 0} \frac{\psi(x, y, z + h_3) - \psi(x, y, z)}{h_3}.$$

A mesma definição serve para derivadas parciais de uma função de um número qualquer de variáveis $\phi(x_1, \dots, x_n)$ que esteja definida num produto cartesiano de intervalos abertos. Chamaremos a este produto cartesiano um *retângulo de dimensão n* .

Uma função é de classe C^1 no retângulo $\mathcal{R}$ se tiver derivadas parciais em relação a todas as variáveis e se todas estas derivadas parciais forem contínuas em $\mathcal{R}$.

2 exercícios

1. Para cada uma das expressões φ_i a seguir, encontre um retângulo aberto em $\mathbf{R}^2$, o maior possível, em que φ_i está bem definida como função.

$$\varphi_1(x, y) = x^2 y^5 + 1 \quad \varphi_2(x, y) = \frac{4xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \quad \varphi_3(x, y) = \frac{4xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2 - \pi}$$

$$\varphi_4(x, y) = \ln(x + \sin y) \quad \varphi_5(x, y) = x \cos(x + y) \quad \varphi_6(x, y) = x^y$$

2. Calcule as derivadas parciais das funções $\varphi_i(x, y)$ acima, se existirem.
3. Use Maple para fazer gráficos de $g(x) = \varphi_i(x, c)$ e $h(x) = \varphi_i(c, y)$ para vários valores de c . Use o comando Maple ‘plot3d’ para fazer o gráfico de $\varphi_i(x, y)$.
4. Para cada uma das expressões ψ_i a seguir, encontre um paralelepípedo aberto em $\mathbf{R}^3$, o maior possível, em que ψ_i está bem definida como função.

$$\psi_1(x, y, z) = xy + z \quad \psi_2(x, y, z) = \sin(xyz) \quad \psi_3(x, y, z) = e^{xyz} \quad \psi_4(x, y, z) = x^2 \sin(yz)$$

5. Calcule as derivadas parciais das funções $\psi_i(x, y, z)$ acima, se existirem.

3 composição e curvas de nível

As derivadas parciais nos dão informação sobre o gráfico de uma função quando a restringimos a retas paralelas aos eixos coordenados. Por exemplo o gráfico de $\varphi_1(x, y) = x^2 + 4y^2$ é o parabolóide $x^2 + 4y^2 - z = 0$, e a restrição de φ_1 a uma reta paralela ao eixo x , da forma $y = c$ com c uma constante, é o gráfico de $g(x) = x^2 + 4c^2$, uma parábola. A restrição a uma reta $x = d$ com d uma constante, que é paralela ao eixo y , é também uma parábola, gráfico de $h(y) = 4y^2 + d^2$. As derivadas parciais de φ_1 dão a informação de que $g(x)$ e $h(y)$ são funções com um mínimo em 0:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y) = 8y.$$

Mesmo que não soubéssemos que os gráficos de $g(x)$ e de $h(y)$ são parábolas, poderíamos concluir das derivadas parciais de φ_1 que g e h têm sempre um mínimo em 0. Podemos usar Maple para ver o que está acontecendo, experimente:

```
> restart; with(plots):
> f1:=x^2+4*y^2;
> plot3d(f1,x=-2..2,y=-1..1);
> listaplot:= [seq(j,j=1..8)]:c:=-1:
> for j from 1 to 8 do
> c:=c+1/8:
```

```

> listaplot[j]:=subs(y=c,f1) od:
> plot(listaplot,x=-2..2);
> d:=2:
> for j from 1 to 8 do
> d:=d+1/4:
> listaplot[j]:=subs(y=c,f1) od:
> plot(listaplot,x=-2..2);

```

Para $\varphi_2(x, y) = xy$ as derivadas parciais são

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y) = y \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x, y) = x .$$

As restrições de φ_2 aos eixos coordenados, $g_0(x) = \varphi_2(x, 0)$ e $h_0(y) = \varphi_2(0, y)$ são constantes e iguais a zero. A restrição a qualquer outra reta paralela aos eixos é uma função monótona: $g(x) = \varphi_2(x, y)$ tem derivada $g'(x) = \partial \varphi_2 / \partial x = y$ que tem sinal constante ao longo da reta $y = \text{constante}$.

Outra maneira de entender o gráfico de φ_2 é olhar para a sua restrição a uma reta qualquer que passe pela origem, o lugar geométrico de uma trajetória $\gamma(t) = (at, bt)$. O gráfico da composta $\varphi_2(\gamma(t)) = \varphi_2(at, bt) = abt^2$, para $ab \neq 0$ é sempre uma parábola. Quando $ab > 0$ o lugar geométrico de γ é uma reta que passa no primeiro e no terceiro quadrantes e sobre esta reta o gráfico de φ_2 é uma parábola com a concavidade para cima. Quando $ab < 0$ o gráfico da restrição de φ_2 é uma parábola com a concavidade para baixo e $\gamma(t)$ percorre uma reta do quarto ao segundo quadrantes. Se $a = 0$ ou $b = 0$ então $\varphi_2(\gamma(t)) = 0$. O gráfico de φ_2 é superfície que é chamada uma *sela*. Para entender porque e ver melhor o que está acontecendo experimente os seguintes comandos Maple que desenharam o gráfico de φ_2 e a sua restrição a quatro retas, para $a = 1, -1, -2$ e -3 e para $b = 1$:

```

> with(plots): phi2:=x*y;
> p1:=plot3d(phi2,x=-1..1,y=-1..1):
> c1:=spacecurve([t,t,t^2],t=-1..1,colour=blue):
> c2:=spacecurve([-t,t,-t^2],t=-1..1,colour=black):
> c3:=spacecurve([-2*t,t,-2*t^2],t=-1/2..1/2,colour=red):
> c4:=spacecurve([-3*t,t,-3*t^2],t=-1/3..1/3,colour=green):
> display(p1,c1,c2,c3,c4);

```

Para $\varphi_3(x, y) = e^{xy} - 1$ temos

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(x, y) = ye^{xy} \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(x, y) = xe^{xy} .$$

Aa restrição de φ_3 a um dos eixos é de novo constante (porque $\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(x, 0) = 0$ e $\frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(0, y) = 0$) e igual a zero. De novo, a restrição a uma reta paralela aos eixos é uma função monótona. Composto com $\gamma(t) = (at, bt)$, cujo lugar geométrico é uma reta pela origem, temos $g(t) = \varphi_3(\gamma(t)) = e^{abt^2} - 1$ que tem um ponto crítico em $t = 0$, máximo ou mínimo conforme o sinal de ab . Usando os comandos Maple

```

g:=exp(x*y); plot3d(g,x=-1..1,y=-1..1);

```

vê-se que os gráficos de φ_2 e de φ_3 são mesmo parecidos.

Uma maneira sintética de descrever as derivadas parciais de uma função de n variáveis é escrevê-las como uma matriz linha que se chama a *derivada* da função e que representa uma transformação linear: $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Se $\phi(x_1, \dots, x_n)$ estiver definida num retângulo de dimensão n e tiver derivadas parciais em todos os pontos do retângulo, define-se $D\phi$ a derivada de ϕ , como sendo a matriz $n \times 1$:

$$(D\phi)(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right) .$$

Por exemplo, para

$$\varphi_4 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \quad \varphi_4(x, y) = \cos(xy)$$

tem-se

$$(D\varphi_4)(x, y) = \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi_4}{\partial y}(x, y) \right) = (-y \sin(xy), -x \sin(xy))$$

e para

$$\varphi_5 :]2\pi, 4\pi[\times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \quad \varphi_5(x, y) = \frac{xy}{\sin x}$$

a derivada é

$$(D\varphi_5)(x, y) = \left(\frac{\partial \varphi_5}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi_5}{\partial y}(x, y) \right) = \left(\frac{y \sin x - xy \cos x}{\sin^2 x}, \frac{x}{\sin x} \right)$$

Para simplificar a notação omitimos os parêntesis em torno de $D\varphi$. Nos exemplos do início desta secção temos:

$$D\varphi_1(x, y) = (2x, 8y) \quad D\varphi_2(x, y) = (y, x) \quad D\varphi_3(x, y) = (2ye^{xy}, xe^{xy})$$

A derivada pode ser usada para estudar a derivada da composta de uma função de duas variáveis com uma trajetória no plano:

Teorema 1 (*função composta*) Sejam $\varphi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ uma função de classe C^1 num retângulo aberto $\mathcal{R} \subset \mathbf{R}^2$ e $\gamma : I \longrightarrow \mathcal{R}$ uma trajetória derivável num intervalo aberto $I \subset \mathbf{R}$ tomando valores $\gamma(t) \in \mathcal{R}$ para todo $t \in I$. Então a função composta $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(t) = \varphi(\gamma(t))$ é derivável e sua derivada é $f'(t) = ((D\varphi)(\gamma(t))) \cdot (\gamma'(t))^T$ onde $\cdot$ representa o produto de uma matriz por um vetor.

Antes de demonstrar o teorema, vamos olhar para alguns exemplos. Se $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ então para $\varphi_1(x, y) = x^2 + 4y^2$, temos $D\varphi_1(x, y) = (2x, 8y)$. Substituindo $(x, y) = \gamma(t)$:

$$(D\varphi_1)(\gamma(t)) = (2a \cos t, 8b \sin t) \quad \text{e} \quad \gamma'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$$

para $f_1(t) = \varphi_1(\gamma(t)) = a^2 \cos^2 t + 4b^2 \sin^2 t$ obtemos

$$f'_1(t) = (2a \cos t, 8b \sin t) \cdot (-a \sin t, b \cos t)^T = (8b^2 - 2a^2) \cos t \sin t.$$

Se $a^2 = 4b^2$ então $f'_1(t) = 0$ para todo t , logo $f_1(t) = \varphi_1(\gamma(t))$ é constante. Podemos concluir que os lugares geométricos das trajetórias $\gamma(t) = (2b \cos t, \pm b \sin t)$ estão contidos em conjuntos de nível de φ_1 .

Outro exemplo: para $\alpha(t) = (at, b/t)$ com $t > 0$, temos:

$$(D\varphi_1)(\alpha(t)) = (2at, \frac{8b}{t}) \quad \alpha'(t) = (-a, -\frac{b}{t^2})$$

e para $g_1(t) = \varphi_1(\alpha(t))$ obtemos

$$g'_1(t) = (2at, \frac{8b}{t}) \cdot (-a, -\frac{b}{t^2})^T = -2a^2t - \frac{8b^2}{t}$$

de onde se conclui que o lugar geométrico da trajetória α nunca está contido num conjunto de nível de φ_1 , a menos que $a = b = 0$ caso este em que o lugar geométrico é a origem. Neste caso, quando nos deslocamos sobre a trajetória α , o valor de φ_1 , em geral, diminui.

Demonstração do teorema 1: A derivada que queremos calcular é

$$\phi'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\gamma(t+h)) - \varphi(\gamma(t))}{h}.$$

Vamos ao mesmo tempo mostrar que o limite existe e calculá-lo. Se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ então podemos reescrever o limite como:

$$\phi'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x(t+h), y(t+h)) - \varphi(x(t+h), y(t))}{h} + \frac{\varphi(x(t+h), y(t)) - \varphi(x(t), y(t))}{h}. \quad (1)$$

Aplicando o teorema do valor médio à função $g(x) = \varphi(x, y)$ e escrevendo $H = x(t+h) - x(t)$ concluímos que existe um valor $\tilde{H} \in [0, H]$ tal que $g(x+H) - g(x) = Hg'(x+\tilde{H})$ isto é, que

$$\varphi(x(t+h), y(t)) - \varphi(x(t), y(t)) = H \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t) + \tilde{H}, y(t))$$

e que como $\tilde{H} \in]0, H[$ e $H \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$, então $\tilde{H} \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$. Da mesma maneira concluímos que existe $\tilde{K}$ entre 0 e $K = y(t+h) - y(t)$ tal que

$$\varphi(x(t+h), y(t+h)) - \varphi(x(t), y(t+h)) = K \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x(t+h), y(t) + \tilde{K})$$

com $\lim_{h \rightarrow 0} K = \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{K} = 0$. Substituindo em (1) obtemos

$$\phi'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x(t+h), y(t) + \tilde{K}) \frac{K}{h} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t) + \tilde{H}, y(t)) \frac{H}{h}$$

e podemos voltar a substituir os valores de H e K nesta expressão para obter

$$\phi'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x(t+h), y(t) + \tilde{K}) \frac{y(t+h) - y(t)}{h} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t) + \tilde{H}, y(t)) \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \quad (2)$$

Como as derivadas parciais são contínuas então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x(t+h), y(t) + \tilde{K}) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x(t), y(t)) \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t) + \tilde{H}, y(t)) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t), y(t))$$

e por definição

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right) = (x'(t), y'(t)).$$

Assim o limite (2) existe e é dado por:

$$\phi'(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) = (D\varphi)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

□

No caso especial em que o lugar geométrico da trajetória $\gamma(t)$ está contido num conjunto de nível de φ , ou seja, em que $\phi(t) = \varphi(\gamma(t))$ é constante, podemos concluir que $\phi'(t) = (D\varphi)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$, ou seja $\gamma'(t)$ pertence ao núcleo da transformação linear representada pela matriz $(D\varphi) = (\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y})$. O núcleo de $(D\varphi)$ é o conjunto dos vetores (a, b) de $\mathbf{R}^2$ tais que

$$(D\varphi) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0.$$

define-se $\nabla \phi$, o *gradiente*¹ de ϕ , como sendo o vetor que é perpendicular a todos os vetores do núcleo de φ , isto é:

$$\nabla \phi(x, y) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right).$$

Temos então que (a, b) pertence ao núcleo de $(D\varphi)$ se e só se $(a, b) \cdot \nabla \varphi(x, y) = 0$, onde $\cdot$ agora representa o produto escalar.

Corolário 1 *Uma trajetória derivável $\gamma : I \longrightarrow \mathbf{R}^2$ que tenha velocidade diferente de zero para todo t no intervalo I está contida num conjunto de nível de uma função $\varphi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe C^1 num retângulo aberto se e só se o gradiente de φ for perpendicular à velocidade de γ em todos os pontos do lugar geométrico de γ .*

¹O símbolo ∇ chama-se *nabla*. Tente descobrir porque!

4 exercícios

1. Mostre que se $\phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ tem derivadas parciais em todos os pontos e se em todo ponto $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) > 0$ e $\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) > 0$ então a restrição de $\phi(x, y)$ a qualquer reta $y = ax + b$ com $a > 0$ dada por $f(x) = \phi(x, ax + b)$ é uma função crescente de x .
2. Calcule o gradiente $(\nabla \varphi_i)(x, y)$ nos pontos $(x, y) = (1, 3)$ e $(x, y) = (-\pi, 1)$ para:

$$\varphi_1(x, y) = x^2 y^5 + 1 \quad \varphi_2(x, y) = \frac{4xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \quad \varphi_3(x, y) = \frac{x + y}{1 - xy}$$

$$\varphi_4(x, y) = \ln(x + \sin y) \quad \varphi_5(x, y) = x \cos(x + y) \quad \varphi_6(x, y) = x^y$$

3. Para cada uma das trajetórias:

$$\gamma_1(t) = (t^3 + 3, t^2 + 2) \quad \gamma_2(t) = (3 + 2 \cos t, 2 + 2 \sin t) \quad \gamma_3(t) = (e^{2/3t}, e^{3t}) \quad \gamma_4(t) = (3 + \cos^3 t, 2 + \cos^2 t)$$

verifique se o lugar geométrico de γ_i está contido numa curva de nível de alguma das funções definidas por:

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &= \cos(xy) & \psi_2(x, y) &= \ln(xy) & \psi_3(x, y) &= e^{(x-3)^2 + (y-2)^2} \\ \psi_4(x, y) &= x^2 - 6x + y^2 - 4y + 6 & \psi_5(x, y) &= y^3 - x^2 - 6y^2 + 6x + 12y + 9 \end{aligned}$$

4. Seja $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ uma função derivável tal que $(\nabla \varphi)(x, y) = (cx, cy)$ para alguma constante $c \in \mathbf{R}$ e em todo ponto $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Mostre que toda circunferência de centro na origem está contida num conjunto de nível de φ .
5. Seja $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ uma função derivável para a qual existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $\varphi(tx, ty) = t^m \varphi(x, y)$ para todo $t \in \mathbf{R}$ e todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Mostre que φ satisfaz a *relação de Euler*

$$x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = m \varphi(x, y)$$

6. * Mostre que se $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ é uma função derivável para a qual existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $\varphi(tx, ty) = t^m \varphi(x, y)$ para todo $t \in \mathbf{R}$ e todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ então $\varphi(x, y)$ é um polinômio homogêneo de grau m .

5 derivadas de ordem superior a 1

Como cada uma das derivadas parciais de uma função $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^1 é também uma função definida em $\mathcal{R}$, podemos definir as suas derivadas parciais como os limites a seguir, se existirem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) (x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x + h, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)}{h} & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) (x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y + h) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)}{h} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) (x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y + h) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)}{h} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) (x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x + h, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)}{h} \end{aligned}$$

Estas *derivadas parciais de segunda ordem* de φ são denotadas por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) (x, y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) (x, y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) (x, y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} (x, y) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) (x, y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} (x, y)$$

Cada uma destas derivadas é uma função definida em $\mathcal{R}$. Se estas funções forem deriváveis, podemos continuar o processo, definindo derivadas parciais de terceira ordem. Há 8 derivadas possíveis, duas para cada uma das derivadas acima:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} (x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (x, y) \right) & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y \partial x} (x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} (x, y) \right) \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} (x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} (x, y) \right) & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} (x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} (x, y) \right) \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial x^2} (x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (x, y) \right) & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^2 \partial x} (x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} (x, y) \right) \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} (x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} (x, y) \right) & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial x \partial y} (x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} (x, y) \right) \end{aligned}$$

Da mesma maneira se define, se existirem, as 2^k derivadas parciais de ordem k para qualquer k natural.

Por exemplo, a função $\varphi_1 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ dada por $\varphi_1(x, y) = 3x + x^2 - 4xy + y^3$ tem derivadas parciais de primeira ordem:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} (x, y) = 3 + 2x - 4y \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} (x, y) = -4x + 3y^2$$

que são funções deriváveis. Suas derivadas são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} (x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (3 + 2x - 4y) (x, y) = 2 & \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial x} (x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (3 + 2x - 4y) (x, y) = -4 \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} (x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (-4x + 3y^2) (x, y) = 6y & \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} (x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (-4x + 3y^2) (x, y) = -4 . \end{aligned}$$

É fácil verificar que φ_1 tem derivadas parciais de todas as ordens e que as derivadas parciais de terceira ordem de φ_1 são todas iguais a zero, com a exceção de

$$\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial y^3} (x, y) = 6 .$$

Dizemos que φ é de classe C^k quando $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ é uma função que tem todas as derivadas parciais de ordem $\leq k$ e se todas estas derivadas forem funções contínuas. Se φ for de classe C^k para todo k natural dizemos que φ é de classe C^∞ .

6 exercícios

1. Calcule todas as derivadas parciais de segunda ordem das funções do exercício 1 da seção 2.
2. Mostre que se $\mathcal{P} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ for uma forma quadrática então todas as derivadas parciais de segunda ordem de $\mathcal{P}$ são constantes e todas as derivadas parciais de terceira ordem de $\mathcal{P}$ são iguais a zero.

7 funções que se anulam na origem

Teorema 2 (Hadamard)² *Seja $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ uma função C^∞ definida num retângulo aberto $\mathcal{R} \subset \mathbf{R}^2$ que contenha a origem. Se $\varphi(0,0) = 0$ então existem duas funções f_1 e $f_2 : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ tais que $\varphi(x,y) = xf_1(x,y) + yf_2(x,y)$ e que satisfazem:*

$$f_1(0,0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) \quad f_2(0,0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) .$$

Demonstração: Seja $f(t) = \varphi(tx, ty)$. Pelo teorema fundamental do cálculo sabemos que

$$\int_0^1 \left(\frac{d}{dt} f(t) \right) dt = f(1) - f(0) = \varphi(x,y) - \varphi(0,0) = \varphi(x,y) . \quad (3)$$

Sabemos também calcular

$$\left(\frac{d}{dt} f(t) \right) = (\nabla \varphi)(tx, ty) \cdot (x, y) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(tx, ty), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(tx, ty) \right) \cdot (x, y) = x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial \varphi}{\partial y}(tx, ty) .$$

Substituindo em (3) obtemos

$$\varphi(x,y) = \int_0^1 \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial \varphi}{\partial y}(tx, ty) \right) dt = x \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(tx, ty) dt + y \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(tx, ty) dt$$

e a primeira afirmação do teorema fica demonstrada tomando

$$f_1(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(tx, ty) dt \quad f_2(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(tx, ty) dt .$$

Para calcular o valor de f_1 e de f_2 na origem basta calcular as derivadas parciais da expressão $\varphi(x,y) = xf_1(x,y) + yf_2(x,y)$ em $(0,0)$. Como este processo irá ser usado recursivamente mais adiante, vale a pena fazer uma vez o cálculo com cuidado:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) + x \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$$

logo,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) = f_1(0,0) + 0 \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) + 0 \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) = f_1(0,0)$$

O cálculo da derivada parcial em relação a y é análogo. □

Se as derivadas parciais $\partial \varphi / \partial x$ e $\partial \varphi / \partial y$ também se anularem na origem podemos aplicar o Teorema 2 às funções f_1 e f_2 e obter:

Teorema 3 *Seja $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ uma função C^∞ definida num retângulo aberto $\mathcal{R} \subset \mathbf{R}^2$ que contenha a origem. Se*

$$\varphi(0,0) = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) = 0$$

então existem funções f_{20} , f_{21} e $f_{22} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ tais que

$$\varphi(x,y) = x^2 f_{20}(x,y) + xy f_{21}(x,y) + y^2 f_{22}(x,y)$$

e que satisfazem:

$$f_{20}(0,0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0,0) \quad f_{21}(0,0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(0,0) \quad f_{22}(0,0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0,0) .$$

²Provado pelo matemático francês Jacques Hadamard que viveu de 1865 a 1963. Seu resultado mais famoso, provado simultaneamente pelo belga C.J. de la Vallée-Poussin (1866–1962) é a demonstração de uma conjectura de Gauss: o número de primos menores que n aproxima-se assintoticamente de $n/\ln(n)$ quando n tende para infinito. O teorema 2 é conhecido como *Lema de Hadamard*.

Demonstração: Depois de aplicar o Teorema 2 duas vezes só nos resta verificar o valor de $f_{0i}(0,0)$ calculando as derivadas de segunda ordem da expressão $\varphi(x, y) = x^2 f_{20}(x, y) + xy f_{21}(x, y) + y^2 f_{22}(x, y)$. Por exemplo:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 2x f_{20}(x, y) + x^2 \frac{\partial f_{20}}{\partial x}(x, y) + y f_{21}(x, y) + xy \frac{\partial f_{21}}{\partial x}(x, y) + y^2 \frac{\partial f_{22}}{\partial x}(x, y)$$

logo,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) = 2 f_{20}(x, y) + 4x \frac{\partial f_{20}}{\partial x}(x, y) + x^2 \frac{\partial^2 f_{20}}{\partial x^2}(x, y) + 2y \frac{\partial f_{21}}{\partial x}(x, y) + xy \frac{\partial^2 f_{21}}{\partial x^2}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f_{22}}{\partial x^2}(x, y)$$

e portanto

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0, 0) = 2 f_{20}(0, 0) .$$

Para calcular $f_{21}(0, 0)$ calculamos $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y)$ e obtemos:

$$2x \frac{\partial f_{20}}{\partial y}(x, y) + x^2 \frac{\partial^2 f_{20}}{\partial x \partial y}(x, y) + f_{21}(x, y) + y \frac{\partial f_{21}}{\partial y}(x, y) + x \frac{\partial f_{21}}{\partial x}(x, y) + xy \frac{\partial^2 f_{21}}{\partial x \partial y}(x, y) + 2y \frac{\partial f_{22}}{\partial x}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f_{22}}{\partial x \partial y}(x, y)$$

e portanto

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0, 0) = f_{21}(0, 0) .$$

O valor de $f_{22}(0, 0)$ pode ser calculado da mesma maneira. □

Note que na demonstração do teorema 3 também poderíamos ter obtido o valor de $f_{21}(0, 0)$ calculando $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x, y)$. Segue-se do teorema que, para funções C^∞ , estas duas derivadas têm sempre o mesmo valor na origem. O mesmo resultado vale em outros pontos:

Teorema 4 *Seja $\psi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ uma função de classe C^∞ definida num retângulo aberto $\mathcal{R} \subset \mathbf{R}^2$. Em todo ponto $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$ tem-se:*

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) .$$

Demonstração: A função $\varphi(x, y) = \psi(x - x_0, y - y_0) - \psi(x_0, y_0)$ está nas condições do teorema 3 e por isso

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(0, 0) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

□

Se as derivadas de φ de segunda ordem também se anularem na origem podemos novamente aplicar o teorema 2 a f_{20} , f_{21} e f_{22} e obter uma expressão para φ como um polinômio de grau 3 cujos coeficientes são funções e assim por diante.

Teorema 5 *Seja $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ uma função C^∞ definida num retângulo aberto $\mathcal{R} \subset \mathbf{R}^2$ que contenha a origem. Se $\varphi(0, 0) = 0$ e se todas as derivadas parciais de ordem menor que n de φ se anularem na origem então existem funções $f_{n0}, \dots, f_{nn} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ tais que*

$$\varphi(x, y) = x^n f_{n0}(x, y) + x^{n-1} y f_{n1}(x, y) + \dots + xy^{n-1} f_{n(n-1)}(x, y) + y^n f_{nn}(x, y)$$

e que satisfazem:

$$f_{nj}(0, 0) = \frac{1}{j!(n-j)!} \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^{n-j} \partial y^j}(0, 0) .$$

8 exercícios

Estes exercícios refazem o trabalho da secção anterior para funções de uma variável. Sejam $I \subset \mathbf{R}$ um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ uma função C^∞ .

1. Verifique que se $f(x) = xf_0(x)$ então $f'(0) = f_0(0)$.
2. Mostre que se $0 \in I$ e se $f(0) = 0$ então existe uma função C^∞ , $f_0 : I \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $f(x) = xf_0(x)$ e que $f'(0) = f_0(0)$. *Sugestão: defina $f_0(x)$ usando uma integral.*
3. Mostre que existe uma função $g :]-1, 1[\rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ tal que $g(x) = \sin(x)/x$ para todo $x \neq 0$. *Sugestão: isto pode ser feito à força bruta. Se for feito usando o exercício anterior, os exercícios seguintes ficam mais fáceis.*
4. Verifique que se $f(x) = x^2 f_1(x)$ então $f''(0) = 2f_1(0)$.
5. Mostre que se $0 \in I$ e se $f(0) = f'(0) = 0$ então existe uma função C^∞ , $f_1 : I \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $f(x) = x^2 f_1(x)$ e que $f''(0) = 2f_1(0)$.
6. Mostre que existe uma função $g_1 :]-1, 1[\rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ tal que $g_1(x) = (\sin(x) - x)/x^2$ para todo $x \neq 0$.
7. Verifique que se $f(x) = x^n h(x)$ então a n -ésima derivada de f , $f^{(n)}(x)$ satisfaz $f^{(n)}(0) = n!h(0)$.
8. Mostre que se $0 \in I$ e se todas as derivadas até ordem $n - 1$ de f em $x = 0$ se anularem, isto é se $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ então existe uma função C^∞ , $h : I \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $f(x) = x^n h(x)$ e que $f^{(n)}(0) = n!h(0)$.
9. Mostre que existe uma função $g_2 :]-1, 1[\rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ tal que $g_2(x) = (\sin(x) - x)/x^3$ para todo $x \neq 0$.
10. Mostre que existe uma função $g_4 :]-1, 1[\rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ tal que $g_4(x) = (\sin(x) - x + x^3/6)/x^4$ para todo $x \neq 0$.

9 polinômio de Taylor

Teorema 6 *Seja $\psi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ uma função de classe C^∞ definida num retângulo aberto $\mathcal{R} \subset \mathbf{R}^2$ com $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$, então tem-se sempre:*

$$\psi(x, y) = a_0 + a_{10}(x - x_0) + a_{11}(y - y_0) + r_2(x, y) \quad \text{com} \quad a_0 = \psi(x_0, y_0) \quad a_{10} = \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, y_0) \quad a_{11} = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x_0, y_0)$$

onde $r_2(x, y)$ é uma função C^∞ tal que

$$r_2(x, y) = (x - x_0)^2 r_{20}(x, y) + (x - x_0)(y - y_0) r_{21}(x, y) + (y - y_0)^2 r_{22}(x, y)$$

para r_{20} , r_{21} e r_{22} funções C^∞ em $\mathcal{R}$.

Demonstração: Basta verificar que a função

$$r_2(x, y) = \psi(x - x_0, y - y_0) - (a_0 + a_{10}(x - x_0) + a_{11}(y - y_0))$$

está nas condições do teorema 3:

$$r_2(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial r_2}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 = \frac{\partial r_2}{\partial y}(x_0, y_0) .$$

□

Da mesma maneira podemos aplicar o teorema 5 para obter:

Teorema 7 (Teorema de Taylor) Seja $\psi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ uma função de classe C^∞ definida num retângulo aberto $\mathcal{R} \subset \mathbf{R}^2$ com $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$, então tem-se sempre:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = & a_{00} + a_{10}(x - x_0) + a_{11}(y - y_0) + a_{20}(x - x_0)^2 + a_{21}(x - x_0)(y - y_0) + a_{22}(y - y_0)^2 + \cdots \\ & + a_{n0}(x - x_0)^n + a_{n1}(x - x_0)^{n-1}(y - y_0) + a_{n2}(x - x_0)^{n-2}(y - y_0)^2 + \cdots + a_{nn}(y - y_0)^n + r_n(x, y) \end{aligned}$$

com

$$a_{00} = \psi(x_0, y_0) \quad a_{jk} = \frac{1}{k!(j-k)!} \frac{\partial^j \psi}{\partial x^{j-k} \partial y^k}(x_0, y_0)$$

onde $r_n(x, y)$ é uma função C^∞ tal que

$$r_n(x, y) = (x - x_0)^n r_{n0}(x, y) + (x - x_0)^{n-1}(y - y_0) r_{n1}(x, y) + \cdots + (y - y_0)^n r_{nn}(x, y)$$

para $r_{n0}, \dots, r_{nn}$ funções C^∞ em $\mathcal{R}$.

O polinômio $a_{00} + a_{10}(x - x_0) + a_{11}(y - y_0) + a_{20}(x - x_0)^2 + a_{21}(x - x_0)(y - y_0) + a_{22}(y - y_0)^2 + \cdots + a_{n0}(x - x_0)^n + a_{n1}(x - x_0)^{n-1}(y - y_0) + \cdots + a_{nn}(y - y_0)^n$ do teorema é chamado *polinômio de Taylor de grau n de ψ em torno de (x_0, y_0)* .

10 exercício

Calcule o polinômio de Taylor (ou seja o polinômio do teorema 7) de grau 4 em torno de $(x_0, y_0) = (0, 0)$ das funções a seguir. Verifique os seus cálculos usando Maple — a instrução que calcula polinômios de Taylor chama-se “mtaylor”. Calcule agora o polinômio de Taylor de grau 3 em torno do ponto (x_0, y_0) indicado.

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &= \cos(xy) & (x_0, y_0) &= (\pi, \pi/2) \\ \psi_2(x, y) &= \ln(xy) & (x_0, y_0) &= (e^2, 1) \\ \psi_3(x, y) &= e^{(x-3)^2+(y-2)^2} & (x_0, y_0) &= (3, 2) \\ \psi_4(x, y) &= x^2 - 6x + y^2 - 4y + 6 & (x_0, y_0) &= (3, 2) \\ \psi_5(x, y) &= y^3 - x^2 - 6y^2 + 6x + 12y + 9 & (x_0, y_0) &= (-1, -1) \end{aligned}$$

11 pontos críticos

Definições: dada uma função $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ definida num retângulo aberto $\mathcal{R} \subset \mathbf{R}^2$ um ponto $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$ é *ponto crítico* de φ se

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

O polinômio de Taylor de grau 2 de φ em torno de um ponto crítico $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$ não tem termos de grau um, isto é, o polinômio é uma forma quadrática mais uma constante. Por exemplo, para $\psi(x, y) = e^{x^2} \cos y$ com $(x_0, y_0) = (0, 0)$ temos:

$$\nabla \psi(x, y) = (2xe^{x^2} \cos y, -e^{x^2} \sin y) \quad \nabla \psi(0, 0) = (0, 0)$$

e o polinômio de Taylor de grau 2 de ψ em torno de $(0, 0)$ é:

$$\psi(0, 0) + x \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, 0) + y \frac{\partial \psi}{\partial y}(0, 0) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(0, 0) + xy \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}(0, 0) + \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(0, 0)$$

ou seja:

$$1 + 0x + 0y + \frac{x^2}{2} + 0xy - 1 \frac{y^2}{2}$$

Um ponto crítico $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$ de φ é *degenerado* se o seu polinômio de Taylor de grau 2 em torno de (x_0, y_0) for uma forma quadrática degenerada (depois de subtraído o termo constante). O ponto crítico do exemplo acima não é degenerado. Já a função $\psi_1(x, y) = e^{x^2} \cos(y^2)$ tem um ponto crítico degenerado na origem.

11.1 exemplo em Maple

O exercício 1 abaixo apresenta exemplos típicos de pontos críticos não degenerados. As instruções em Maple a seguir fazem o estudo de um exemplo destes, para a função $\psi(x, y) = -7x^2 - 14x + 27 - 2\sqrt{3}xy + 4\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}y + 4\sqrt{3} - 5y^2 + 20y$. Começamos por estabelecer quais são os pontos críticos de ψ :

```
> restart;
> R:=sqrt(3):
> psi:=-7*x^2-14*x+27-2*R*x*y+4*R*x-2*R*y+4*R-5*y^2+20*y:
> dx:=diff(psi,x):
> sol:=solve(dx=0,x);
```

$$\text{sol} := -1 - \frac{1}{7} \frac{1}{3} y + \frac{2}{7} \frac{1}{3}$$

```
> dy:=diff(psi,y):
> temp:=subs(x=sol,dy):
> solve(temp=0,y);
```

2

```
> subs(y=2,sol);
```

-1

```
> verifica:=subs(x=-1,y=2,dx);
verifica := 0
> verifica:=subs(x=-1,y=2,dy);
verifica := 0
```

Para saber como é o polinômio de Taylor de ψ em torno do ponto crítico $(x, y) = (-1, 2)$, podemos calcular diretamente a matriz da forma quadrática:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(-1, 2) & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}(-1, 2) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}(-1, 2) & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(-1, 2) \end{pmatrix}$$

e verificar se é ou não degenerada. O polinômio de Taylor de grau 2 em torno de $(x, y) = (-1, 2)$ será

$$\psi(-1, 2) + 0(x + 1) + 0(y - 2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(-1, 2)(x + 1)^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}(-1, 2)(x + 1)(y - 2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(-1, 2)(y - 2)^2$$

isto é:

$$\psi(-1, 2) + (x + 1, y - 2) \cdot M \cdot (x + 1, y - 2)^T.$$

Estes cálculos são feitos nas instruções Maple a seguir, continuando as instruções acima.

```
> dxx:=diff(dx,x):dxy:=diff(dx,y):dyy:=diff(dy,y):
> dx2:=subs(x=-1,y=2,dxx):dxdy:=subs(x=-1,y=2,dxy):dy2:=subs(x=-1,y=2,dyy):
> with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> M:=matrix(2,2,[dx2/2,dxdy/2,dxdy/2,dy2/2]):
> det(M);
```

32

```
> eigenvals(M);
```

```

-8, -4
> X:=vector(2,[(x+1),(y-2)]):
> ptaylor:=subs(x=-1,y=2,psi)+evalm(transpose(X)&*M&*X);
ptaylor := 54 + (-7 x - 7 - (y - 2) 31/2) (x + 1) + (- (x + 1) 31/2 - 5 y + 10) (y - 2)
O polinômio de Taylor pode também ser obtido com o comando 'mtaylor':
> readlib(mtaylor):
> mtaylor(psi, [x=-1,y=2]);

```

$$54 - 2 (x + 1) (y - 2) 3^{1/2} - 7 (x + 1)^2 - 5 (y - 2)^2$$

11.2 pontos críticos não degenerados

O gráfico de uma função em torno dos pontos críticos não degenerados é semelhante ao do seu polinômio de Taylor de grau 2:

Teorema 8 (Morse)³ Se $\psi : \mathcal{R}_0 \longrightarrow \mathbf{R}$ é uma função de classe C^∞ definida num retângulo aberto $\mathcal{R} \subset \mathbf{R}^2$ e se $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$ é um ponto crítico não degenerado de ψ então existe um retângulo $\tilde{\mathcal{R}} \subset \mathcal{R}_0$ com $(x_0, y_0) \in \tilde{\mathcal{R}}$ e uma deformação do retângulo $\tilde{\mathcal{R}}$ que transforma o gráfico de ψ no gráfico de seu polinômio de Taylor de grau 2 em torno de (x_0, y_0) . Esta deformação também transforma os conjuntos de nível de ψ em $\tilde{\mathcal{R}}$ nos conjuntos de nível de seu polinômio de Taylor de grau 2 em torno de (x_0, y_0) .

Para ver uma demonstração deste resultado, e para saber mais sobre pontos críticos de funções de duas variáveis, leia Poston, T e Stewart, I, *Catastrophe Theory and its Applications*, editora Pitman.

Os pontos críticos não degenerados são então pontos em que o gráfico de ψ é localmente semelhante ao de uma forma quadrática $\mathcal{P}(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2$ com α e $\beta \neq 0$. Se α e $\beta > 0$ o ponto será um mínimo local de ψ , e se α e $\beta < 0$ o ponto será um máximo local de ψ . Os pontos em que $\alpha > 0$ e $\beta < 0$ são chamados pontos de sela.

12 exercícios

- Pontos críticos não degenerados: Para cada uma das funções abaixo verifique que o ponto (x_0, y_0) indicado é um ponto crítico não degenerado. Use Maple para representar graficamente as funções e para desenhar os seus conjuntos de nível em torno destes pontos e descubra porque estes pontos críticos têm os nomes indicados.
 - Máximos: $\psi_1(x, y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$
 $\psi_2(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$.
 - Mínimos: $\psi_3(x, y) = -3x^2 - 2xy - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$
 $\psi_4(x, y) = -3x^2 + 22x - 51 - 2xy + 18y - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (3, 2)$.
 - Sela: $\psi_5(x, y) = x^2 + 6xy + y^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$
 $\psi_6(x, y) = x^2 - 10x - 7 + 6xy + 2y + y^2$, $(x_0, y_0) = (-1, 2)$.
- Verifique que as funções do exercício anterior satisfazem: $\psi_2(x, y) = \psi_1(x - 1, y - 2)$; $\psi_4(x, y) = \psi_3(x - 3, y - 2)$ e $\psi_6(x, y) = \psi_5(x + 1, y - 2)$.
- Pontos críticos degenerados: alguns desses pontos críticos têm nome. Verifique que a origem é um ponto crítico degenerado para as funções abaixo. Use Maple para representar graficamente as funções e para desenhar os seus conjuntos de nível em torno destes pontos e descubra porque estes pontos críticos têm os nomes indicados.

³Este resultado é conhecido como Lema de Morse

- (a) Manjedoura: $\varphi_1(x, y) = x^2$.
 - (b) Manjedouras cruzadas: $\varphi_2(x, y) = x^2 y^2$.
 - (c) Sela do macaco: $\varphi_3(x, y) = x^3 - 3xy^2$
4. Encontre os pontos críticos das funções do exercício da secção 10 e decida se são degenerados. Para os pontos não degenerados, decida se são máximos, mínimos ou pontos de sela. Use Maple para representar graficamente as funções e para desenhar os seus conjuntos de nível em torno destes pontos.
5. Experimente

```
plot3d(sin(4*x)*cos(2*y)*x*y, x=0..4*Pi, y=0.1..0.3*Pi);
```

e a seguir classifique os pontos críticos de $\varphi(x, y) = \sin(4x) \cos(2y)xy$ no retângulo $[0, 4\pi] \times [0.1, 0.3\pi]$. (colaboração de Marcus (6 anos) “As melhores coisas do mundo são pescarias, futebol e matemática”.)