

Cálculo em Computadores 2007

Exercícios preparatórios em Maple

Exercícios sobre Transformações afins inversíveis do plano, polígonos, simetrias

1. Utilize Maple para determinar:

- (a) $1/5 + 2/3$ (b) $\frac{1/3 - 4/7}{4/13 + 1/9}$ (c) 2^{40} (d) 2^{400} (e) 2^{4000} (f) $\log 2$
 (g) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (h) e^{-1} (i) $1/e + 1/\pi$ (j) $e^\pi - \pi^e$ (l) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

2. Utilize Maple para calcular as seguintes expressões com 10 algarismos significativos:

- (a) $4^{1/5}$ (b) $(-4)^{1/5}$ (c) $5^{2/3}$ (d) $(-5)^{2/3}$ (e) $((-5)^2)^{1/3}$ (f) $\sqrt{2}$

3. Calcule π com 200 dígitos.

4. Utilize a função "help" do maple para escrever o o décimo número primo.

5. Considere a seguinte sequência de comandos *Maple*:

```
> p := 'p';
> q := 1 + p;
> p := 2;
> q;
> p := 1;
> q;
```

Compare os resultados obtidos com os que obtém quando troca os comandos nas linhas 2 e 3. Explique convenientemente o resultado.

6. Defina a função $g(x) = \sqrt{1+x^2}$. Calcule em seguida as seguintes alíneas:

- (a) $g(2)$ com 10 dígitos.
 (b) $g'(x)$.
 (c) um valor aproximado de $g'(2)$.
 (d) $\int g(x)dx$.

7. Defina a função h utilizando a instrução *proc*:

$$h(x) = 2x - 5, \text{ se } x < 0, \quad h(x) = x^2 + 7x - 2, \text{ se } x \geq 0.$$

e calcule $h(-3)$ e $h(3)$.

8. (a) Factorize $x^3 + 4x^2 + x - 6$.
 (b) Simplifique $x^{3/2}(xy)^{-1/2}(xy^2)^3$ utilizando o comando *simplify*.
 (c) Factorize $x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x-1}$

9. Represente no mesmo gráfico $f(x)$ e $3f(x)$:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 9, \quad -10 \leq x \leq 10$$

10. Sendo $f(x) = x^3 - 8$ e $g(x) = x + 4$, represente graficamente $f(x)$, $g(x)$ e $f(x) + g(x)$ para $-2 \leq x \leq 2$, sobrepostos no mesmo gráfico.
11. Sendo $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x$, represente graficamente $f(x)$, $g(x)$ e $f(x) \times g(x)$ para $-2 \leq x \leq 2$, sobrepostos no mesmo gráfico.

12. Determine o domínio de cada uma das seguintes funções

(a) $f(x) = \frac{4}{x^3 - 2.01x^2 - 4.415x + 3.2886}$

(b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2.5 + 1.2x - x^2}}$

13. Calcule $\frac{d^{10}y}{dx^{10}}$, para $y = \sin(2x)$

14. Para cada uma das seguintes funções $f(x)$, determine (se existirem)

- domínio
- zeros, ie, soluções de $f(x) = 0$
- assíntotas verticais e horizontais
- máximos e mínimos relativos de $f(x)$
- pontos de inflexão $f(x)$
- os domínios de crescimento e decrescimento de $f(x)$
- os domínios em que $f''(x) > 0$ e em que $f''(x) < 0$

Desenhe o gráfico da função. Se necessário restrinja o domínio e/ou contradomínio de maneira a evidenciar a forma do gráfico de $f(x)$.

(a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 12$

(b) $f(x) = 4x^6 - 12x^5 + 13x^4 - 6x^3 + x^2$

(c) $f(x) = 10000x^3 - 30011x^2 + 30022x + 10010$

(d) $f(x) = \frac{x^{1/3}}{x^{2/3} - 5}$

(e) $f(x) = 3 \cos x - \sqrt{4 + x}$

(f) $f(x) = 2x + \sqrt{2x^2 + \frac{1}{x}}$

(g) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

(h) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1}$

(i) $f(x) = \frac{2}{1 - e^{2x}}$

- (j) $f(x) = \frac{\ln(x^2)}{x}$
 (k) $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{e^x}$
 (l) $f(x) = \frac{x - \cos(x)}{x^2 + \sin(x)}$

15. Escreva um procedimento em Maple que calcule o produto de uma matriz dada por um vector dado.
16. Escreva um procedimento Maple que calcule o produto de duas matrizes dadas.
17. Dadas as matrizes e os vectores seguintes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e usando Maple e os procedimentos que escreveu

- (a) calcule AB e BA e verifique se $ABBA$.
- (b) calcule $(A+B)C$ e $A+(B+C)$
- (c) verifique que $A(BC) = (AB)C$
- (d) verifique que $(AB)^T = B^T A^T$
- (e) verifique que x é solução de $Ax = y$
- (f) calcule $\|Ay - b\|$
18. Escreva a expressão $T(x_1, x_2)$ da transformação linear $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ representada por cada uma das matrizes seguintes. Use Maple para representar no plano as imagens $T(1, 0)$, $T(0, 1)$, $T(-3, 2)$ e $T(Q)$ onde Q é o quadrado de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} \sin(\pi/3) & -\cos(\pi/3) \\ \cos(\pi/3) & \sin(\pi/3) \end{pmatrix} \quad A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_9 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

19. Sejam R o rectângulo de vértices $(1, 0), (3, 0), (3, 1), (1, 1)$ e T o triângulo de vértices $(1/2, 0), (-1/2, 0), (0, 1)$. Represente, no plano, R e as suas imagens pelas transformações seguintes:
- (a) reflexão no eixo horizontal
 - (b) reflexão no eixo vertical
 - (c) rotação em torno da origem de ângulos $2\pi/3, \pi/2, \pi/3$
 - (d) translação de duas unidades para a direita e uma para cima
 - (e) reflexão na recta que passa origem e faz um ângulo de $2\pi/3$ com o eixo horizontal
20. Use Maple para representar no plano os polígonos com os vértices indicados:
- (a) Vértices: $p_1 = (-1, -1)$ e $p_n = r(p_{n-1})$ com $n = 2 \dots 6$, onde $r : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ é a rotação em torno da origem de um ângulo $\pi/3$.
 - (b) Vértices: $p_1 = (1, 1)$ e $p_n = r(p_{n-1})$ com $n = 2 \dots 11$, onde $r : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ é a rotação em torno da origem de um ângulo $2\pi/11$.
 - (c) Vértices: $p_1 = (1, 1)$ e $p_n = r(p_{n-1})$ com $n = 2 \dots 11$, onde $r : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ é a rotação em torno da origem de um ângulo $4\pi/11$.
 - (d) Vértices: $p_1 = (1, 1)$ e $p_n = r(p_{n-1})$ com $n = 2 \dots 11$, onde $r : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ é a rotação em torno da origem de um ângulo $3\pi/11$.
 - (e) Vértices: $p_1 = (1, 0), p_2 = (0.8, 0.2)$ e $p_n = r(p_{n-2})$ com $n = 3 \dots 12$, onde $r : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ é a rotação em torno da origem de um ângulo $\pi/3$.
 - (f) Vértices: $p_1 = (1, 1)$ e $p_n = r(p_{n-1})$ com $n = 2 \dots 8$, onde $r : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ é a rotação em torno de $(0, 1)$ de um ângulo $\pi/4$.
21. Use Maple para representar a imagem de cada um dos polígonos do exercício anterior pelas seguintes transformações:
- (a) Rotação em torno da origem dos ângulos $2\pi/11, \pi/22$.
 - (b) Rotação em torno de $(0, 1)$ dos ângulos $\pi/2, \pi/22$.
 - (c) Reflexão na recta que passa pela origem e faz um ângulo de $\pi/11$ com o eixo horizontal.
22. Diga quais são as simetrias de cada um dos polígonos do exercício 20 e use Maple para verificar suas afirmações.
23. (*) Seja r_θ a rotação em torno da origem de um ângulo θ . Já sabemos que para calcular os vértices de um polígono regular de n lados, começando com um ponto $p_0 \neq 0$, calculamos $p_i = r_{2\pi/n}(p_{i-1})$.

- (a) Para calcular os vértices de uma estrela de 11 pontas usamos rotações $r_{4\pi/11}$. Uma estrela diferente, com ângulos mais agudos nas pontas, pode ser construída com rotações $r_{6\pi/11}$. Quantas estrelas de 11 pontas diferentes é possível construir dessa maneira?
- (b) Quantas vezes tenho que aplicar a rotação $r_{3\pi/11}$ a um ponto $p \neq (0, 0)$ para obter o ponto original? Quantas pontas tem a estrela que se obtém usando as rotações $r_{3\pi/11}$? E para $r_{5\pi/11}$?
- (c) Escreva um procedimento para desenhar estrelas regulares com um número ímpar qualquer $2n + 1$ de pontas, $n \geq 2$. Quantas estrelas regulares com ângulos diferentes nas pontas é possível construir?
- (d) Escreva um procedimento para desenhar estrelas com um número par qualquer $2n$ de pontas, $n \geq 2$. Quantas estrelas com ângulos diferentes nas pontas é possível construir?
- (e) Começando com um ponto $p_0 \neq 0$, calculamos $p_i = r_\theta(p_{i-1})$. Se $\theta = 2\pi/n$, com $n \neq 0$ inteiro, então o ponto p_n deve teoricamente coincidir com p_0 . O mesmo acontece se $\theta = 2m\pi/n$, com m e n inteiros e $n \neq 0$. O que acontece se usarmos $\theta = \alpha\pi$ com α irracional? Faça experiências com alguns irracionais, por exemplo, $\theta = \sqrt{2}\pi/2$ ou $\theta = \pi^2/9$ e formule uma conjectura. Como é a “estrela com um número irracional de pontas”?

Cálculo em Computadores 2007

Exercícios sobre trajectórias planas para as aulas práticas

1. (a) Represente, usando lápis e papel, os pontos do plano definidos em coordenadas polares (r, θ) por:

$$i) (r, \theta) = (3, \frac{\pi}{6}) \quad ii) (r, \theta) = (-3, \frac{\pi}{6})$$

$$iii) (r, \theta) = (-3, -\frac{\pi}{6}) \quad iv) (r, \theta) = (3, -\frac{\pi}{6}).$$

- (b) Usando Maple, encontre as coordenadas cartesianas dos mesmos pontos e represente graficamente o segmento de recta que liga cada um deles à origem.
2. Usando lápis e papel, represente graficamente o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas polares (r, θ) satisfazem
- (a) $0 \leq r \leq 2, \quad \theta \in [0, 2\pi]$.
- (b) $r = -1, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
- (c) $-2 \leq r \leq -1, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$.

3. Use Maple para representar o lugar geométrico das trajectórias abaixo. Em cada caso, diga em que sentido é percorrida a trajectória quando t cresce.

(a) $\alpha_1 :]-5, 5[\longrightarrow \mathbf{R}^2, \alpha_1(t) = (1 + t, 3 - t)$

(b) $\alpha_2 :]-5, 5[\longrightarrow \mathbf{R}^2, \alpha_2(t) = (1 + t^2, 3 - t)$

(c) $\alpha_3 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2, \alpha_3(t) = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right)$

(d) $\alpha_4 : [0, 8\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^2, \alpha_4(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$

(e) $\alpha_5 :]0, \pi/2[\longrightarrow \mathbf{R}^2, \alpha_5(t) = (\sec(t), \operatorname{tg}(t))$ (para usar Maple: em inglês a função $\operatorname{tg}(t)$ é representada por $\tan(t)$.)

4. Para a trajectória $\alpha_2 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2, \alpha_2(t) = (1 + t^2, 3 - t)$, e usando Maple,

- (a) Calcule a velocidade e a rapidez da trajectória.
- (b) Represente graficamente a rapidez como função do parâmetro t .
- (c) Quais são os pontos regulares da trajectória?
- (d) Decida se o ponto $\alpha_2(0)$ é regular e, caso seja, represente no mesmo gráfico o lugar geométrico de α_2 para $t \in [-5, 5]$ e a sua recta tangente em $\alpha_2(0)$.
- (e) Represente no mesmo gráfico o lugar geométrico de α_2 para $t \in]-5, 5[$ e, para j inteiro $j \in [-5, 5]$, os 11 segmentos de recta que unem os pontos $\alpha_2(j)$ aos pontos $\alpha_2(j) + \alpha'_2(j)$ (isto é, 11 vectores velocidade colocados nos pontos $\alpha_2(j)$). Talvez seja boa ideia escrever um ciclo...

- (f) Represente no mesmo gráfico o lugar geométrico de α_2 para $t \in [-5, 5]$ e, para j inteiro $j \in [-5, 5]$, os 11 segmentos de recta de comprimento 1, passando pelos os pontos $\alpha_2(j)$ na direcção dos vectores $\alpha'_2(j)$.
5. Seja $A := [f(t), g(t), t = a..b]$ a expressão em Maple que faz o gráfico de uma trajectória plana $\alpha(t) = (f(t), g(t))$ para $t \in [a, b]$.
- Escreva um procedimento Maple $Veloc(A, s)$ que, para uma expressão A e um número s , calcule as coordenadas do vector velocidade de α em $t = s$ como uma lista $[L_1, L_2]$.
 - Escreva um procedimento Maple $VT(A, s)$ que, para uma expressão A e um número s tenha como saída a expressão paramétrica do segmento de recta que une os pontos $\alpha(s)$ ao ponto $\alpha(s) + \alpha'(s)$.
 - Escreva um procedimento Maple $V1(A, s)$ que, para uma expressão A e um número s tenha como saída a expressão paramétrica do segmento de recta de comprimento 1 que passa pelo ponto $\alpha(s)$ na direcção do vector velocidade $\alpha'(s)$.
 - Use os procedimentos que escreveu para repetir o exercício 4 para a trajectória α_3 do exercício 3, com $t \in] - 20, 20[$ e nos pontos $t = j \in \mathbf{Z}$.
6. Considere o rectângulo R centrado no ponto $(1, 0)$ cujos lados horizontal e vertical têm comprimento, respectivamente, 2 e 1.
- Escreva uma trajectória contínua $\gamma(t)$, $t \in [0, 4]$, cujo lugar geométrico seja o rectângulo R .
 - Diga se a trajectória que escreveu descreve o rectângulo em sentido horário ou anti-horário.
 - Para os diferentes valores de $t \in [0, 4]$ diga se o ponto $\gamma(t)$ de R é regular ou singular. Existem pontos de reversão?
 - Use Maple para representar no mesmo gráfico o lugar geométrico de $\gamma(t)$ e as rectas tangentes nos pontos $(0, -1/2)$ e $(1, -1/2)$, se existirem.
 - Calcule o comprimento total do rectângulo descrito pela trajectória γ .
 - Escreva, se existir, uma outra trajectória contínua $\gamma_1(t)$, $t \in [0, 4]$, ($\gamma_1 \neq \gamma$) cujo lugar geométrico seja o rectângulo R . Caso exista γ_1 , responda às perguntas acima para a trajectória γ_1 . Compare as respostas obtidas para γ e γ_1 . Comente os resultados.
7. Considere a trajectória $\gamma(t)$ dada em coordenadas polares (ρ, θ) por:
- $$\rho(t) = \sin^2(t) \quad \theta(t) = t, \quad t \in [-\pi, \pi]$$
- Use Maple para representar o lugar geométrico de $\gamma(t)$.

- (b) Mostre (sem calcular) que os laços do lugar geométrico de $\gamma(t)$ têm o mesmo comprimento e a mesma área. Calcule o valor deste comprimento e desta área usando Maple.
- (c) Encontre um valor t_0 do parâmetro t tal que o comprimento do lugar geométrico de $\gamma(t)$ para t entre 0 e t_0 seja $\frac{1}{2}$ do comprimento de um laço. Comente a sua resposta.
- (d) Encontre um valor t_1 do parâmetro t tal que área do sector angular delimitado pelo lugar geométrico de $\gamma(t)$ para t entre 0 e t_1 seja $\frac{1}{3}$ da área de um laço. Represente o laço e o sector angular no mesmo gráfico.
- (e) Represente no mesmo gráfico os lugares geométricos de $\gamma(t)$, $N\gamma(t)$ e $M\gamma(t)$ onde N e M são transformações lineares de $\mathbf{R}^2$ representadas, respectivamente, pelas matrizes:

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Comente os resultados que obteve.

8. Seja $\gamma(t)$ a trajectória, descrita no tratado das curvas de Gomes Teixeira com o nome *conchóide* e dada em coordenadas polares (ρ, θ) por:

$$\rho(t) = 2 - \frac{1}{1 + \cos(t/2)} \quad \theta(t) = t, \quad t \in [0, 2\pi[$$

Use Maple para fazer o seguinte estudo da conchóide:

- (a) Para $t \in [0, 3\pi/2]$ represente o lugar geométrico de $\gamma(t)$.
- (b) Calcule a área varrida pelos segmentos que ligam os pontos da conchóide à origem, quando t varia entre 0 e $4\pi/3$.
- (c) Verifique que para $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ o lugar geométrico da *conchóide* forma um laço.
- (d) Encontre o valor t_0 do parâmetro t tal que a área varrida pelos segmentos que ligam os pontos $\gamma(t)$ à origem, quando t varia entre $\frac{\pi}{2}$ e t_0 , seja $\frac{1}{3}$ da área da região do plano delimitada pelo laço.
- (e) Seja L a região do plano delimitada pelo laço. Represente no mesmo gráfico três regiões de L com a mesma área.
- (f) Calcule o comprimento do lugar geométrico do laço da conchóide.
- (g) Seja M a transformação linear de $\mathbf{R}^2$ representada pela matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- i. Para $t \in [0, \frac{3\pi}{2}]$ represente no mesmo gráfico os lugares geométricos de $\gamma(t)$ e $M\gamma(t)$.

- ii. Diga para que valores de t o lugar geométrico de $M\gamma(t)$ forma um laço.
 - iii. Calcule o seu comprimento e a sua área.
9. Seja $\gamma(t)$ a trajectória dada em coordenadas polares (ρ, θ) por $\rho(t) = (\cos(4t))^2$, $\theta(t) = t$ para $t \in [0, 2\pi]$. Use Maple para fazer o seguinte estudo de γ :
- (a) Represente o lugar geométrico da trajectória.
 - (b) Diga em que sentido é percorrido o lugar geométrico, identificando os pontos $\gamma(0)$ e $\gamma(2\pi)$.
 - (c) Encontre as coordenadas polares e cartesianas de um ponto $\gamma(t) \neq (0, 0)$ que esteja na intersecção do lugar geométrico de γ com a reta dada em coordenadas cartesianas por $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = y\}$.
 - (d) Calcule a velocidade e a rapidez de $\gamma(t)$.
 - (e) Faça o gráfico da rapidez como função de t .
 - (f) Decida se o ponto $\gamma(\pi)$ é regular.
 - (g) Represente no mesmo gráfico o lugar geométrico de γ e a sua reta tangente em $\gamma(\pi/4)$, se existir.
 - (h) Calcule a área e o comprimento de um dos laços do lugar geométrico desta trajectória.
 - (i) Encontre valores t_1 e t_2 do parâmetro t tais que a área varrida pelos segmentos que ligam os pontos da trajectória à origem, quando t varia entre 0 e t_j seja $\frac{j}{3}$ da área do laço.
 - (j) Represente no mesmo gráfico o laço e os segmentos de recta passando pela origem que o dividem em sectores com $1/3$ e $2/3$ da sua área.
 - (k) Seja $A : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ a rotação de $\pi/4$. Verifique se A e A^2 são simetrias do lugar geométrico da trajectória.
 - (l) Verifique se a reflexão $R : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ na recta $\{(x, y) : y = x\}$ é uma simetria do lugar geométrico da trajectória.
 - (m) Calcule o comprimento da imagem do laço por $R \circ A \circ A$.
10. Uma *ciclóide* é a trajectória percorrida por um ponto no bordo de um disco que rola sem deslizar sobre uma recta. Suponha que o disco tenha raio 1 e que role sobre o eixo dos xx de maneira que no instante t o seu centro esteja no ponto $c(t) = (-t, 1)$. Use Maple para fazer o seguinte estudo da ciclóide:
- (a) Represente no mesmo gráfico: a trajectória do centro do disco e a posição do disco nos instantes $t = 0$ e $t = 4$. Diga em que sentido rola o disco.
 - (b) O ponto P que parte de $(1, 1)$ em $t = 0$ é o que vamos acompanhar para estudar a ciclóide. Verifique que este ponto está sobre o disco, para $t = 1$.

- (c) Quando o disco rola de um ângulo θ , o ponto P desloca-se para a posição

$$c(t) + (\cos \theta, \sin \theta)$$

e percorre sobre a circunferência uma distância igual a θ . A mesma distância é percorrida pelo ponto de contacto do disco com o eixo dos xx , no mesmo intervalo de tempo (é isto que quer dizer “rola sem deslizar”). Por outro lado, no instante t o ponto de contacto está na posição $(-t, 0)$, a uma distância t da sua posição inicial. Logo, se tomarmos $\theta = t$ teremos a expressão $\gamma(t)$ da cicloide. Represente o lugar geométrico de $\gamma(t)$ para $t \in [0, 4]$.

- (d) Calcule o valor $\tau > 0$ do primeiro instante em que $\gamma(\tau)$ pertence ao eixo dos xx . Represente o lugar geométrico de $\gamma(t)$ para $t \in [\tau, \tau + 8\pi]$.
- (e) Calcule a velocidade e a rapidez da cicloide e represente graficamente a rapidez como função do tempo t .
- (f) Quais são os pontos singulares da cicloide? Quais são os pontos de reversão?
- (g) Represente no mesmo gráfico a cicloide e suas rectas tangentes nos pontos $\gamma(\pi)$ e $\gamma(3\pi/2)$, se existirem.
- (h) Calcule a distância percorrida pelo ponto P entre dois instantes sucessivos em que P toque no eixo dos xx .

Exercícios adicionais

11. (a) * Use Maple para verificar que o lugar geométrico da trajectória α_3 do exercício 3 está contido em uma circunferência.
- (b) * Decida se o lugar geométrico da trajectória α_3 do exercício 3 é toda a circunferência ou apenas parte dela.
- (c) * Use Maple para verificar que o lugar geométrico da trajectória α_5 do exercício 3 está contido em uma hipérbole.
12. Mostre que o lugar geométrico da trajectória dada em coordenadas polares (r, θ) por $r(t) = -\sin(\frac{t}{3})$, $\theta(t) = t$ para $t \in [0, 6\pi]$ contem o ponto do plano cujas coordenadas polares são $(r, \theta) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\pi)$.
13. Repita o exercício 4 para as demais trajectórias do exercício 3, nos intervalos e pontos indicados abaixo, usando os procedimentos que escreveu para o exercício 5:
- | | | | |
|------------|-------------------------|---|-------------------------------|
| α_4 | $t \in]-10\pi, 10\pi[$ | pontos $t = \frac{\pi}{2} + j\pi$ | $j \in \mathbf{Z}$ |
| α_5 | $t \in]-10\pi, 10\pi[$ | pontos $t = \frac{1}{2} + \frac{j}{10}$ | $j \in \mathbf{Z}$ |
| α_4 | $t \in]-10\pi, 10\pi[$ | pontos $t = j\pi$ | $j \in \mathbf{Z}$ (cuidado!) |
14. Esboce o lugar geométrico das trajectórias em coordenadas polares a seguir. Verifique os seus resultados usando Maple.
- (a) $r = 1 - \sin t$, $\theta = t$, $t \in [0, 2\pi]$, (esta curva é designada por *cardióide*).

- (b) $r = e^t$, $\theta = t$, $t \in [-2\pi, 2\pi]$.
15. Seja $\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$ a trajectória dada em coordenadas polares (r, θ) por $r_1(t) = \cos t + 1, \theta_1(t) = t$. Represente o seu lugar geométrico. Verifique que o lugar geométrico de γ é o mesmo que o da trajectória $\alpha : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$ dada em coordenadas polares (r, θ) por $r_2(t) = \cos t - 1, \theta_2(t) = t$. Mostre que a sua conclusão é verdadeira. O que acontece se restringirmos o domínio das trajectórias ao intervalo $[0, \pi]$? Comente os resultados.
16. (a) Usando Maple, represente graficamente as curvas dadas em coordenadas cartesianas por
- $3x + 4y = 5$.
 - $x^2 + y^2 + 6x = 0$.
 - $y = p$, $p \in \mathbf{R}$.
- (b) Encontre as equações em coordenadas polares das curvas acima. Verifique que não se enganou representando-as graficamente.
17. (a) Calcule a velocidade e a rapidez das trajectórias do exercício 14 e decida quais são os seus pontos regulares.
- (b) Para cada uma das trajectórias do exercício 14, represente no mesmo gráfico o seu lugar geométrico e suas rectas tangentes (se existirem) nos pontos $t = j\pi/5$ para $j = 0, 1, \dots, 10$ (e também para $j = -10, -9, \dots, -1$ no segundo exercício).
18. Encontre as coordenadas polares e cartesianas dos pontos de intersecção, se existirem, dos seguintes pares de curvas:
- $r^2 = 2a^2 \sin(2\theta)$ e $r = a$ onde $a > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.
 - $x = -1$ e $y = 3$.

Cálculo em Computadores 2006/07

Exercícios sobre formas quadráticas

1. Considere as seguintes funções $P_i : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ e $Q_i : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$:

$$P_1(x, y) = 10x^2 + xy, \quad P_2(x, y) = 2x^2 - 2xy + \pi y^2, \quad P_3(x, y) = x^2 + x + 3y^2,$$

$$P_4(x, y) = x^4 - x^2 y^2 + 2x^3 y + y^4, \quad Q_1(x, y, z) = \sqrt{3}z^3 + xy^2 - x^2 z + 2yz^2.$$

$$Q_3(x, y, z) = 3x^2 - 4y^2 + \frac{3}{5}z^2 + 18xy - 7yz + 3xz.$$

- Verifique, sem usar Maple, quais das expressões acima definem formas quadráticas.
 - Para as expressões acima que definam formas quadráticas, escreva as matrizes simétricas que as representam.
 - Use Maple para verificar se não se enganou na alínea anterior: a partir de cada matriz simétrica encontre a forma quadrática associada.
2. Para cada uma das formas quadráticas a seguir:

$$\mathcal{P}_A(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 \quad \mathcal{P}_B(x, y) = -4x^2 + 4xy - y^2$$

$$\mathcal{P}_C(x, y) = 13x^2 + 6\sqrt{3}xy + 7y^2 \quad \mathcal{P}_D(x, y) = -11x^2 + 6\sqrt{3}xy - 5y^2$$

- Escreva a matriz simétrica $J = A, B, C, D$ que representa $\mathcal{P}_J(x, y)$ e use Maple para verificar se a sua matriz está correcta: a partir de cada matriz simétrica encontre a forma quadrática associada.
 - Use Maple para calcular os autovalores e autovetores de cada uma das matrizes que encontrou.
 - Use Maple para representar no mesmo gráfico o conjunto $C_1 = \{(x, y) : \mathcal{P}_J(x, y) = 1\}$ e as duas rectas pela origem onde estão os autovetores da matriz J . Faça o mesmo para os conjuntos $C_{-1} = \{(x, y) : \mathcal{P}_J(x, y) = -1\}$ e $C_0 = \{(x, y) : \mathcal{P}_J(x, y) = 0\}$.
3. Sejam $\mathcal{P}(x, y) = x^2 + y^2$ e $\mathcal{Q}(x, y) = xy$. Para $i = 1, \dots, 6$, considere as transformações lineares $\mathcal{L}_i : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ que são representadas, respectivamente, pelas matrizes N_i a seguir:

$$N_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad N_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad N_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad N_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Diga justificando, e sem usar Maple, qual é a imagem das rectas $x = 0$, $y = 0$ e $x = y$ pelas aplicações lineares $\mathcal{L}_3$ e $\mathcal{L}_4$. Use Maple para representar graficamente cada uma delas, e verificar assim se as suas respostas estavam correctas.

- (b) Descreva geometricamente, e sem usar Maple, cada uma das aplicações lineares $\mathcal{L}_i$, isto é, em cada caso descreva a imagem: dos eixos coordenados; de uma reta passando na origem; da circunferência de centro na origem e raio 1. Use Maple para representar graficamente cada um dos conjuntos e sua imagem, e verificar assim se as suas respostas estavam correctas.
- (c) Use Maple para obter expressões da forma $ax^2+bx+cy^2$ para as formas quadráticas: $\mathcal{P}_i = \mathcal{P} \circ \mathcal{L}_i$, $\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q} \circ \mathcal{L}_i$ $i = 1, \dots, 6$.
- (d) Use Maple para obter a matriz M_{P_i} que representa cada uma das formas quadráticas $\mathcal{P}_i$ e a matriz M_{Q_i} correspondente a $\mathcal{Q}_i$, $i = 1, \dots, 6$.
- (e) Encontre os autovalores e autovetores de cada uma das matrizes N_i , M_{P_i} e M_{Q_i} . Use Maple apenas quando a resposta necessitar de contas.
- (f) Para quais das transformações lineares $\mathcal{L}_i$ é possível encontrar uma base de $\mathbf{R}^2$ na qual $\mathcal{L}_i$ é representada por uma matriz diagonal?
- (g) Para quais das formas quadráticas $\mathcal{P}_i$ e $\mathcal{Q}_i$ é possível encontrar coordenadas em $\mathbf{R}^2$ nas quais a forma quadrática é representada por uma matriz diagonal?
- (h) Para $c \in \{-1, 1, -5, \sqrt{2}, 0\}$:
- Classifique e represente graficamente as cônicas:
 $\{(x, y) : \mathcal{P}(x, y) = c\}$, $\{(x, y) : \mathcal{Q}(x, y) = c\}$;
 $\{(x, y) : \mathcal{P}_i(x, y) = c\}$, $\{(x, y) : \mathcal{Q}_i(x, y) = c\}$ para $i = 1, \dots, 6$.
 - Para cada valor de c , descreva as relações geométricas entre as cônicas $\{(x, y) : \mathcal{P}(x, y) = c\}$ e $\{(x, y) : \mathcal{P}_i(x, y) = c\}$, $i = 1 \dots 6$.
Faça o mesmo para $\{(x, y) : \mathcal{Q}(x, y) = c\}$ e $\{(x, y) : \mathcal{Q}_i(x, y) = c\}$, $i = 1 \dots 6$.
 - Para os diferentes valores de c relacione geometricamente as cônicas $\{(x, y) : \mathcal{P}(x, y) = c\}$. Faça o mesmo para as cônicas $\{(x, y) : \mathcal{Q}(x, y) = c\}$.

4. Seja $\mathcal{Q}(x, y, z) = \frac{5}{2}x^2 - \sqrt{3}xy + \frac{3}{2}y^2 - z^2$.

- (a) Encontre a matriz M correspondente a $\mathcal{Q}(x, y, z)$.
- (b) Verifique que a forma quadrática $\mathcal{Q}$ não é degenerada e classifique a quádrlica $\mathcal{H} = \{(x, y, z) : \mathcal{Q}(x, y, z) = 1\}$.
- (c) Represente graficamente a quádrlica $\mathcal{H}$.
- (d) Descreva as simetrias de $\mathcal{H}$. Decida se $\mathcal{H}$ é uma superfície de revolução e caso seja encontre o eixo de revolução.
- (e) Represente no mesmo gráfico a quádrlica $\mathcal{H}$ e os seus planos de simetria.
- (f) Encontre coordenadas (X, Y, Z) nas quais a forma quadrática $\mathcal{Q}(x, y, z)$ se escreva na forma $aX^2 + bY^2 + cZ^2$, onde a, b, c são os valores próprios de M . Encontre a matriz da rotação $\mathcal{R}$ que faz esta transformação. Verifique que não se enganou: multiplique as matrizes, e calcule explicitamente $\mathcal{Q}(\mathcal{R}(X, Y, Z))$.

- (g) Represente no mesmo gráfico, nas coordenadas (X, Y, Z) , a quádrlica $\mathcal{H}$ e os seus planos de simetria.
- (h) Classifique e represente graficamente, as quádrlicas: $\{(x, y, z) : \mathcal{Q}(x, y, z) = 6\}$, $\{(x, y, z) : \mathcal{Q}(x, y, z) = -3\}$ e $\{(x, y, z) : \mathcal{Q}(x, y, z) = 0\}$. Justifique.
5. Seja $\mathcal{Q}(x, y, z) = 2x^2 - 2\sqrt{3}xy - z^2$.
- (a) Encontre a matriz M que representa $\mathcal{Q}(x, y, z)$.
- (b) Verifique que a forma quadrática não é degenerada e classifique as quádrlicas $Q_1 = \{(x, y, z) : \mathcal{Q}(x, y, z) = 1\}$ e $Q_{-1} = \{(x, y, z) : \mathcal{Q}(x, y, z) = -1\}$.
- (c) Descreva as simetrias de Q_1 e Q_{-1} . Decida se alguma destas quádrlicas é uma superfície de revolução. Caso seja, encontre os eixos de revolução e a cônica que gera a quádrlica por rotação entre torno do eixo de revolução.
- (d) Represente graficamente as quádrlicas Q_1 e Q_{-1} .
6. Sejam $\mathcal{Q}_1(x, y, z) = 2\sqrt{2}xy - y^2 + z^2$ e $\mathcal{Q}_2(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$.
- (a) Encontre as matrizes M_1 e M_2 correspondentes a $\mathcal{Q}_1(x, y, z)$ e $\mathcal{Q}_2(x, y, z)$ respectivamente.
- (b) Verifique se as formas quadráticas são degeneradas e em caso negativo classifique as quádrlicas $\mathcal{Q}_i(x, y, z) = 1$, $i = 1, 2$.
- (c) Decida se é possível encontrar uma rotação $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ que transforme o conjunto $\{(x, y, z) : \mathcal{Q}_1(x, y, z) = 1\}$ no conjunto $\{(x, y, z) : \mathcal{Q}_2(x, y, z) = 1\}$.
- (d) Decida se é possível encontrar uma rotação $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ que transforme o conjunto $\{(x, y, z) : \mathcal{Q}_1(x, y, z) = -1\}$ no conjunto $\{(x, y, z) : \mathcal{Q}_2(x, y, z) = 1\}$.
- (e) Represente graficamente os conjuntos $\{(x, y, z) : \mathcal{Q}_1(x, y, z) = 1\}$ e $\{(x, y, z) : \mathcal{Q}_2(x, y, z) = 1\}$.
- (f) Classifique e represente graficamente, para $i = 1, 2$ as quádrlicas:
 $\{(x, y, z) : \mathcal{Q}_i(x, y, z) = 5\}$,
 $\{(x, y, z) : \mathcal{Q}_i(x, y, z) = -1\}$ e
 $\{(x, y, z) : \mathcal{Q}_i(x, y, z) = 0\}$. Justifique.
7. Responda às mesmas questões do exercício 6, para $\mathcal{Q}_1(x, y, z) = \frac{5}{2}x^2 - \sqrt{3}xy + \frac{3}{2}y^2 + z^2$ e $\mathcal{Q}_2(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^2$.
8. Classifique e represente graficamente as cônicas $\{(x, y) : \mathcal{P}_i(x, y) = 0\}$, $i = 0, \dots, 10$:
- $$\begin{aligned} \mathcal{P}_0(x, y) &= x^2 + 2xy - y^2 & \mathcal{P}_1(x, y) &= \mathcal{P}_0(x, y) + x & \mathcal{P}_2(x, y) &= \mathcal{P}_0(x, y) + x - y \\ \mathcal{P}_3(x, y) &= -4x^2 + 4xy - y^2 & \mathcal{P}_4(x, y) &= \mathcal{P}_3(x, y) + y & \mathcal{P}_5(x, y) &= \mathcal{P}_3(x, y) + x + 2y \\ \mathcal{P}_6(x, y) &= 4x^2 + 2xy + y^2 & \mathcal{P}_7(x, y) &= \mathcal{P}_6(x, y) - 2x + y \\ \mathcal{P}_8(x, y) &= \mathcal{P}_6(x, y) + 12x + 6y + 11 & \mathcal{P}_9(x, y) &= \mathcal{P}_6(x, y) + 12x + 6y + 14 \end{aligned}$$

9. Responda às mesmas questões do exercício 6, para $\mathcal{Q}_1(x, y, z) = -x^2 - y^2 + xz - z^2$
 $\mathcal{Q}_2(x, y, z) = xy + xz + yz + z^2$.

10. Responda às mesmas questões do exercício 4, para as formas quadráticas:

(a) $\mathcal{Q}(x, y, z) = -\frac{9}{4}x^2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}xy + zx - \frac{3}{4}y^2 + \sqrt{3}yz$;

(b) $\mathcal{Q}(x, y, z) = 2zx - y^2$;

(c) $\mathcal{Q}(x, y, z) = -\frac{3}{2}x^2 - 3y^2 - \frac{3}{2}z^2$.

11. Represente graficamente as quádricas $\{(x, y, z) : \mathcal{Q}_i(x, y, z) = 1\}$, $i = 1, \dots, 8$:

$$\mathcal{Q}_1(x, y, z) = \frac{5}{2}x^2 - \sqrt{3}xy + \frac{3}{2}y^2 + z^2 + x - y - z \quad \mathcal{Q}_2(x, y, z) = \mathcal{Q}_1(x, y, z) - 10$$

$$\mathcal{Q}_3(x, y, z) = xy + xz + yz + z^2 \quad \mathcal{Q}_4(x, y, z) = \mathcal{Q}_3(x, y, z) + x + y - z$$

$$\mathcal{Q}_5(x, y, z) = x^2 + y^2 \quad \mathcal{Q}_6(x, y, z) = \mathcal{Q}_5(x, y, z) + x + y - z$$

$$\mathcal{Q}_7(x, y, z) = 5x^2 - 4xy + 6xz + y^2 - 2yz + 2z^2 \quad \mathcal{Q}_8(x, y, z) = \mathcal{Q}_7(x, y, z) + x + y - z$$

Cálculo em Computadores 2006/07

Exercícios sobre funções de duas e de três variáveis

1. Seja $\varphi : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ uma função de classe C^3 e sejam $\psi_j : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $j = 1, \dots, 7$ dadas por:

$$\psi_1(x, y) = x^2\varphi(x, y) \quad \psi_2(x, y) = xy\varphi(x, y) \quad \psi_3(x, y) = y^2\varphi(x, y)$$

$$\psi_4(x, y) = x^3\varphi(x, y) \quad \psi_5(x, y) = x^2y\varphi(x, y) \quad \psi_6(x, y) = xy^2\varphi(x, y) \quad \psi_7(x, y) = y^3\varphi(x, y)$$

- (a) Sem usar Maple calcule, para $j = 1, \dots, 7$:

$$\psi_j(0, 0) \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial x}(0, 0) \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial y}(0, 0)$$

- (b) Use Maple para calcular as derivadas de (1a) e também, para $j = 1, \dots, 7$:

$$\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^2}(0, 0) \quad \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x \partial y}(0, 0) \quad \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial y \partial x}(0, 0) \quad \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial y^2}(0, 0)$$

2. Para cada uma das expressões $\varphi_j(x, y)$, $j = 1, \dots, 9$ abaixo:

$$\begin{array}{lll} \varphi_1(x, y) = 3 & \varphi_2(x, y) = y + 1 & \varphi_3(x, y) = x^2 + y^2 \\ \varphi_4(x, y) = x^2 - y^2 & \varphi_5(x, y) = \cos(y) & \varphi_6(x, y) = |x||y| \\ \varphi_7(x, y) = \frac{1}{x - y^2} & \varphi_8(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} & \varphi_9(x, y) = \frac{xy}{e^{(x^2 + y^2)}} \end{array}$$

- (a) Encontre o maior retângulo aberto contido em $\mathbf{R}^2$ no qual $\varphi(x, y)$ está bem definida e represente-o graficamente caso seja diferente de $\mathbf{R}^2$.
- (b) Represente o gráfico de φ . Tente primeiro fazer a representação gráfica sem usar Maple.
- (c) Para cada uma das expressões acima indique as coordenadas de um ponto do seu gráfico.
- (d) Sem usar Maple, determine as funções derivadas parciais de ordem 3 de $\varphi_j(x, y)$, $j = 1, \dots, 9$, sempre que existam. Verifique que não se enganou usando Maple.
3. Considere a função $\varphi : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $\varphi(x, y) = e^{x-y}$.
- (a) Calcule $\nabla \varphi(x, y)$.
- (b) Verifique que $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (0, 1)$ e $P_3 = (1, 2)$ são pontos regulares de $\varphi(x, y)$ e encontre a direção de crescimento máximo de $\varphi(x, y)$ nestes pontos.
- (c) Encontre a direção da reta tangente à curva de nível de $\varphi(x, y)$ que passa pelo ponto P_1 . Faça o mesmo para P_2 e P_3 .
- (d) Represente no mesmo gráfico a curva de nível de $\varphi(x, y)$ que passa pelo ponto P_1 e a sua reta tangente neste ponto. Faça o mesmo para P_2 e P_3 .

- (e) Verifique se o lugar geométrico de alguma das trajetórias

$$\gamma(t) = (0, t) \quad \alpha(t) = (\cos(t^2), t) \quad \beta(t) = (t, -t) \quad \delta(t) = (t, t+3) \quad t \in \mathbf{R}$$

está contido numa curva de nível de φ e caso esteja, represente o seu lugar geométrico.

- (f) Represente graficamente $\varphi(x, y)$ bem como as suas curvas de nível para (x, y) no quadrado $[-2, 2] \times [-2, 2]$.
- (g) Verifique se o ponto $(0, 0)$ é um ponto crítico de φ .
- (h) Encontre o polinômio de Taylor, $\mathcal{P}_2(x, y)$, de grau 2 de φ em torno do ponto $(0, 0)$.
- (i) Represente no mesmo gráfico $\varphi(x, y)$ e $\mathcal{P}_2(x, y)$ para (x, y) no rectângulo $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$. Faça o mesmo para as curvas de nível de $\varphi(x, y)$ e $\mathcal{P}_2(x, y)$.

4. Considere a função $\varphi : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $\varphi(x, y) = e^{x^2 - y^2}$.

- (a) Calcule $\nabla \varphi(x, y)$.
- (b) Verifique que $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (0, 1)$ e $P_3 = (1, 2)$ são pontos regulares de $\varphi(x, y)$ e encontre a direção de crescimento máximo de $\varphi(x, y)$ nestes pontos.
- (c) Encontre a direção da reta tangente à curva de nível de $\varphi(x, y)$ que passa pelo ponto P_1 . Faça o mesmo para P_2 e P_3 .
- (d) Represente no mesmo gráfico a curva de nível de $\varphi(x, y)$ que passa pelo ponto P_1 e a sua reta tangente neste ponto. Faça o mesmo para P_2 e P_3 .
- (e) Verifique se o lugar geométrico de alguma das trajetórias $\gamma(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ e $\delta(t)$ do exercício (3) está contido numa curva de nível de φ e caso esteja, represente o seu lugar geométrico.
- (f) Represente graficamente $\varphi(x, y)$ bem como as suas curvas de nível para (x, y) no quadrado $[-2, 2] \times [-2, 2]$.
- (g) Verifique que o ponto $(0, 0)$ é um ponto crítico de φ e decida se é degenerado. Caso não seja, decida se é máximo local, mínimo local ou ponto de sela.
- (h) Encontre o polinômio de Taylor, $\mathcal{P}_4(x, y)$, de grau 4 de φ em torno do ponto $(0, 0)$.
- (i) Represente no mesmo gráfico $\varphi(x, y)$ e $\mathcal{P}_4(x, y)$ para (x, y) no rectângulo $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$. Faça o mesmo para as curvas de nível de $\varphi(x, y)$ e $\mathcal{P}_4(x, y)$.

5. Repita o exercício 4 para $\varphi(x, y) = xye^{-x^2 - y^2}$.

6. Considere a função $\varphi : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $\varphi(x, y, z) = 4x^2 + y^2 - z$.

- (a) Seja S a superfície definida em $\mathbf{R}^3$ pela equação $\varphi = 0$. Represente no mesmo gráfico: a superfície S ; o plano $z = 1$ e o plano $x = 0$.
- (b) Mostre que o ponto $P = (0, 1, 1)$ é um ponto de intersecção das três superfícies.

- (c) Calcule $\nabla\varphi(x, y, z)$.
- (d) Encontre os polinômios de Taylor de grau 2 e 6 de φ em torno de P e em torno da origem de $\mathbf{R}^3$.

7. O movimento de um pêndulo de comprimento $l = 0,1\text{m}$ que se move sem atrito em um plano, pode ser descrito usando o ângulo x que o pêndulo faz com a vertical e a velocidade y do pêndulo, através da função

$$\varphi(x, y) = k \cos x + \frac{y^2}{2} \quad \text{com} \quad g = 9,8 \frac{m}{seg^2} \quad \text{e} \quad k = \frac{g}{l}$$

que descreve a energia total do pêndulo. Se uma trajetória $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ descrever o movimento do pêndulo (ou seja, se $x(t)$ descrever a sua posição e $y(t)$ descrever a sua velocidade no instante t) então, pelo princípio de conservação da energia, o lugar geométrico de γ estará sempre contido em uma curva de nível de φ .

- (a) Calcule $\nabla\varphi(x, y)$.
- (b) Para cada uma das trajetórias $\gamma_j(t)$ abaixo verifique se o seu lugar geométrico com $t \in [0, 2\pi]$ está contido em uma curva de nível de φ :

$$\gamma_1(t) = (t, -\sqrt{k(1 - \cos t)}) \quad \gamma_2(t) = (t, -\sqrt{2k(1 - \cos t)})$$

$$\gamma_3(t) = (t, -\sqrt{2k(2 - \cos t)}) \quad \gamma_4(t) = (t, -\cos(t)\sqrt{2k})$$

Represente o lugar geométrico das $\gamma_j(t)$ para as quais a resposta foi afirmativa.

- (c) A condição de estar contida em uma curva de nível é necessária mas não suficiente para uma trajetória descrever o movimento do pêndulo — além disto, a segunda coordenada da trajetória tem que ser a derivada da primeira coordenada. Verifique que nenhuma das trajetórias acima poderia descrever o movimento do pêndulo.
- (d) Verifique que $P = (0, 0)$ é um ponto crítico não degenerado de φ e decida se é máximo local, mínimo local ou ponto de sela de φ .
- (e) Determine os polinômios de Taylor $\mathcal{P}_2(x, y)$ e $\mathcal{P}_3(x, y)$, de grau 2 e 3 respectivamente, de φ em torno do ponto $P = (0, 0)$.
- (f) Represente graficamente $\varphi(x, y)$ e $\mathcal{P}_2(x, y)$ bem como suas curvas de nível para (x, y) no retângulo $[-3\pi, 3\pi] \times [-20, 20]$.
- (g) Repita os exercícios 7d), 7e) e 7f) para $P = (\pi, 0)$.

Cálculo em Computadores 2006/07

Exercícios sobre integrais de funções de duas variáveis

1. (a) Escreva um procedimento ‘Esquerda2’ em Maple que dados: números a, b, c, d , uma expressão $\varphi(x, y)$ e um natural n ; calcule, para $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbf{R}^2$ o valor aproximado de $\int_{\mathcal{R}} \varphi$ usando $2^n \times 2^n$ paralelepípedos, com altura estimada à esquerda nas duas variáveis x e y .
- (b) Use o procedimento ‘Esquerda2’ para calcular $\int_{\mathcal{R}} \varphi$ para cada uma das funções e retângulos abaixo, com diferentes valores de n .
- (c) Represente graficamente cada uma das funções $\varphi(x, y)$ abaixo nos retângulos indicados.
- (d) Para cada uma das funções e retângulos $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ abaixo, calcule $\int_{\mathcal{R}} \varphi$ usando o comando ‘int’ de Maple e encontre um valor de n para o qual a diferença entre o resultado deste cálculo e o da subrotina ‘Esquerda2’ seja menor que o valor de ε indicado em cada caso.
 - i) $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ $\mathcal{R} = [-1, 1] \times [-2, 2]$ $\varepsilon = 1.0$
 - ii) $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ $\mathcal{R} = [0, 1/2] \times [1, 3/2]$ $\varepsilon = 0.1$ e $\varepsilon = 0.01$
 - iii) $\varphi(x, y) = x^2 - y^3$ $\mathcal{R} = [0, 1/2] \times [1/2, 1]$ $\varepsilon = 0.1$ e $\varepsilon = 0.01$
 - iv) $\varphi(x, y) = \sin 2x \cos 3y$ $\mathcal{R} = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ $\varepsilon = 0.1$ e $\varepsilon = 0.01$
 - v) $\varphi(x, y) = \sin 10x \cos 3y$ $\mathcal{R} = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ $\varepsilon = 0.1$ e $\varepsilon = 0.01$
 - vi) $\varphi(x, y) = \sin^2 10x \cos^2 3y$ $\mathcal{R} = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ $\varepsilon = 0.1$ e $\varepsilon = 0.01$
2. Modifique o procedimento do exercício 1a) para produzir um procedimento ‘Direita2’ que calcule o valor aproximado de $\int_{\mathcal{R}} \varphi$ usando $2^n \times 2^n$ paralelepípedos, com altura estimada à direita nas duas variáveis x e y .
3. Sejam $\varphi(x, y) = e^x \cos 5y$, $a = 0$, $b = \pi/2$, $c = \pi/2$, $d = 3\pi/5$ e $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$.
 - (a) Represente no mesmo gráfico φ e a função constante igual a 0 para $(x, y) \in \mathcal{R}$.
 - (b) Mostre que para todo $x \in [a, b]$ a função $f_x(y) = \varphi(x, y)$ é monótona crescente em $[c, d]$. Mostre que para todo $y \in [c, d]$ a função $f_y(x) = \varphi(x, y)$ é monótona crescente em $[a, b]$.
 - (c) Para $n = 1, \dots, 7$, calcule a diferença entre o resultado dos procedimentos que escreveu em 1a) e 2) aplicados ao cálculo de $\int_{\mathcal{R}} \varphi(x, y)$. O que pode concluir a partir destes cálculos?

4. Represente graficamente a região $\Omega \in \mathbf{R}^2$ e use Maple para calcular $\int_{\Omega} \varphi$ para:

i) $\Omega = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, -1] : -x^2 \leq y \leq -x^2/2\}$
 $\varphi(x, y) = \cos(x + y)$

ii) $\Omega = \{(x, y) \in [0, \pi/2] \times [\pi/2, 3\pi/5] : \frac{\sin x}{7} + \frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{2 \sin x}{7} + \frac{\pi}{2}\}$
 $\varphi(x, y) = e^x \cos 5y$

iii) $\Omega = \{(x, y) \in [0, \pi/2] \times [\pi/2, 3\pi/5] : 6x/5 \leq y \leq x^2\}$
 $\varphi(x, y) = e^x \cos 5y$

iv) $\Omega \subset [0, 1] \times [0, -1]$ a região entre as curvas : $y = -x^2$ e $y = -x/2$
 $\varphi(x, y) = ye^x$

5. Uma placa em espuma em forma de arco é preparada para decorar a fachada de um prédio. A espuma é preparada incorporando uma quantidade variável de ar no material de maneira que a sua densidade no ponto (x, y) seja dada por $\rho(x, y) = 10 + ay \text{ kg/m}^2$ onde x e y são medidos em metros e $a > 0$. O arco é cortado de um retângulo de $8m$ de largura por $9m$ de altura, de maneira que a placa corresponde à região do plano delimitada pela curva $y = 5 + \sqrt{9 - x^2}$ com $x \in [-3, 3]$ e pelos segmentos de reta: $\{(x, 0) : 3 \leq |x| \leq 4\}$, $\{(x, 9) : |x| \leq 4\}$, $\{(\pm 3, y) : 0 \leq y \leq 5\}$ e $\{(\pm 4, y) : 0 \leq y \leq 9\}$.

- Represente graficamente o arco e verifique que o arco é simétrico para reflexão no eixo y .
- Calcule a massa do arco e o seu momento em torno da reta $y = 0$.
- Calcule a segunda coordenada do centro de massa do arco como função de a .
- Verifique se é possível encontrar um valor de $a > 0$ tal que o centro de massa do arco esteja sobre a curva $y = 5 + \sqrt{9 - x^2}$ com $x \in [-3, 3]$.
- Verifique qual o ponto para o qual tende o centro de massa quando $a \rightarrow +\infty$ e represente graficamente a altura a que fica o centro de massa em função do valor de a , quando $a > 0$.
- Calcule o momento do arco em torno da reta $x = 0$.