

MODELOS MATEMÁTICOS

RESUMOS DAS AULAS

ISABEL S. LABOURIAU

ÍNDICE

1. Modelos para a ocupação de leitos em um hospital	3
1.1. Modelo básico	3
1.2. Modelo com limitação de leitos	3
1.3. Modelo com previsão de saídas	3
1.4. Planejamento de admissões	4
1.5. Previsão total	4
2. Dinâmica de uma população, tempo discreto	4
2.1. Modelo de Malthus	5
2.2. Modelo de Malthus com migração	5
2.3. Equações às diferenças	6
2.4. Populações: Modelo não linear: (séc XX)	9
2.5. População com crescimento limitado	9
3. Dinâmica de populações, tempo discreto, classes de idade	10
3.1. Modelo de Fibonacci (séc XIII)	10
3.2. Exemplo mais simples	10
3.3. Modelo de Fibonacci — Polinômio característico	11
3.4. Dinâmica a partir dos autovetores	11
3.5. Modelo de Fibonacci modificado	11
3.6. Modelo de Fibonacci ainda mais modificado	12
3.7. Modelo com três classes de idades	12
3.8. Modelo geral — Matriz de Leslie	12
3.9. Equações às diferenças — Exemplo	12
3.10. Equações às diferenças	14
3.11. De volta às matrizes de Leslie	15
3.12. E se os autovalores não forem reais?	16
3.13. De volta às matrizes de Leslie	17
4. Modelos Matemáticos — Teste-surpresa	18
5. Conservação da energia, curvas de nível	18
5.1. Exemplo — oscilador harmônico	19
5.2. Exemplo — pêndulo plano sem atrito	20
6. Jogos, curvas de nível	21
6.1. Par ou ímpar	21
6.2. Equilíbrio de Nash	21
6.3. Estratégia adaptativa	22
6.4. Jan-Ken-Po	22

7.	Cilindro de aquecimento de água	24
7.1.	Resfriamento de água	24
7.2.	Aquecimento da água	25
7.3.	Cilindro desligado à noite	25
7.4.	Termostato	25
7.5.	Cilindro ligado à noite	26
8.	Sistemas Dinâmicos: modelos para populações, tempo contínuo	27
8.1.	Lei de Malthus com tempo contínuo	27
8.2.	Modelo de Velhurst	28
8.3.	Existência e unicidade de soluções de equações diferenciais	28
8.4.	Modelo de Velhurst	28
8.5.	Soluções de equações diferenciais	29
8.6.	Comportamento das soluções do modelo de Velhurst	29
8.7.	Modelo de Velhurst adaptado para colheita	29
8.8.	primeiro modelo: taxa de colheita constante.	30
9.	Curvas de nível — predador-presa	30
9.1.	Populações de predadores e presas	31
9.2.	Equação de Volterra (1926)	31
10.	Cinética de reações químicas	34
10.1.	Existência e unicidade de soluções de equações diferenciais	35
10.2.	Comportamento das soluções de equações diferenciais	35
10.3.	Comportamento assintótico das soluções de equações diferenciais	36
10.4.	Estados de equilíbrio	36
10.5.	Em Scilab	37
11.	Equações com duas escalas temporais	37
11.1.	Equação de camada	38
11.2.	Dinâmica na variedade lenta	40
11.3.	Modelo de Zeeman para o coração (1973)	43

1. MODELOS PARA A OCUPAÇÃO DE LEITOS EM UM HOSPITAL

Todos os modelos desta secção têm tempo discreto e a unidade de tempo t é 1 dia, $t = t_i \in \mathbf{Z}$.

1.1. Modelo básico. Dados de entrada: $u, p, m, a \in \mathbf{N}$

u = número de admissões em urgência;

p = número de admissões planejadas;

m = número de mortes entre os leitos ocupados;

a = número de altas entre os leitos ocupados.

Dados de saída: $z \in \mathbf{N}$, z = número de leitos ocupados.

Condição inicial: $z(t_0) \in \mathbf{N}$.

Modelo:

$$z(t_{i+1}) = z(t_i) + u(t_i) + p(t_i) - m(t_i) - a(t_i)$$

com a restrição $m(t_i) + a(t_i) \leq z(t_i)$.

Estados de equilíbrio (condições iniciais que dão origem a saídas constantes):

Se $u(t_i) + p(t_i) = m(t_i) + a(t_i)$ então todo $z \in \mathbf{N}$ é estado de equilíbrio. Se $u(t_i) + p(t_i) > m(t_i) + a(t_i)$ então não há estados de equilíbrio.

Crítica: este hospital tem uma infinidade de leitos!

1.2. Modelo com limitação de leitos. Dados de entrada: $u, p, m, a \in \mathbf{N}$ (os mesmos do modelo anterior).

Dados de saída: $z, n \in \mathbf{N}$

z = número de leitos ocupados;

n = número de casos não atendidos.

Variáveis internas: $x \in \mathbf{N}$.

Parâmetros: $L \in \mathbf{N}$, L = número de leitos existente no hospital.

Condição inicial: $z(t_0) \in \mathbf{N}$.

Modelo:

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) &= z(t_i) + u(t_i) + p(t_i) - m(t_i) - a(t_i) \\ z(t_{i+1}) &= \min \{x(t_{i+1}), L\} \quad n(t_{i+1}) = \max \{x(t_{i+1}) - L, 0\} \end{aligned}$$

Estados de equilíbrio: Se $u(t_i) + p(t_i) = m(t_i) + a(t_i)$ então todo $z \in \mathbf{N}$ com $z \leq L$ é estado de equilíbrio. Se $u(t_i) + p(t_i) > m(t_i) + a(t_i)$ então o único estado de equilíbrio é $z = L$.

Crítica: este modelo permite obter uma descrição mas não uma previsão.

1.3. Modelo com previsão de saídas. Dados de entrada: $u, p \in \mathbf{N}$ com as mesmas interpretações do modelo 1.1).

Dados de saída: $z, n \in \mathbf{R}$ com as mesmas interpretações do modelo 1.2.

Variáveis internas: $x, m, a \in \mathbf{R}$ com as mesmas interpretações dos modelos anteriores.

Parâmetros: $L \in \mathbf{N}$ como em 1.2; $\alpha, \omega \in [0, 1]$ $0 < \alpha + \omega < 1$, α = taxa de altas; ω = taxa de mortalidade.

Condição inicial: $z(t_0) \in \mathbf{N}$.

Modelo :

$$\begin{aligned} a(t_i) &= \alpha z(t_i) \quad m(t_i) = \omega z(t_i) \quad x(t_{i+1}) = z(t_i) + u(t_i) + p(t_i) - m(t_i) - a(t_i) \\ z(t_{i+1}) &= \min \{x(t_{i+1}), L\} \quad n(t_{i+1}) = \max \{x(t_{i+1}) - L, 0\} \end{aligned}$$

Estados de equilíbrio: Se $u(t_i) + p(t_i) = 0$ então o único estado de equilíbrio é $z = 0$.

Crítica: o número de altas e de mortes não é inteiro, o que pode ser resolvido tomando a parte inteira de $a(t_i)$ e $m(t_i)$. Se os números envolvidos forem muito grandes, esta irregularidade pode ser ignorada. Se o hospital tiver um serviço de obstetrícia o modelo pode ser aperfeiçoado com uma taxa de natalidade :)

1.4. Planejamento de admissões. Dados de entrada: $u, \in \mathbf{N}$; dados de saída: $z, n \in \mathbf{R}$ com as mesmas interpretações do modelo 1.2.

Variáveis internas: $x, m, a, p \in \mathbf{R}$ com as mesmas interpretações dos modelos anteriores.

Parâmetros: $L \in \mathbf{N}$; $\alpha, \omega \in [0, 1]$ $0 < \alpha + \omega < 1$ como em 1.3; $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ estratégia de admissão (por exemplo: planeja-se admitir metade das saídas previsíveis, $f(z) = z/2$)

Condição inicial: $z(t_0) \in \mathbf{N}$.

Modelo :

$$a(t_i) = \alpha z(t_i) \quad m(t_i) = \omega z(t_i) \quad p(t_i) = f(a(t_i) + m(t_i))$$

$$x(t_{i+1}) = z(t_i) + u(t_i) + p(t_i) - m(t_i) - a(t_i)$$

$$z(t_{i+1}) = \min \{x(t_{i+1}), L\} \quad n(t_{i+1}) = \max \{x(t_{i+1}) - L, 0\}$$

1.5. Previsão total. Dados de entrada: não há; dados de saída: $z, n \in \mathbf{R}$ com as mesmas interpretações do modelo 1.2.

Variáveis internas: $x, m, a, p \in \mathbf{R}$ com as mesmas interpretações dos modelos anteriores.

Parâmetros: $L \in \mathbf{N}$; $\alpha, \omega \in [0, 1]$ $0 < \alpha + \omega < 1$ como em 1.3; $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ estratégia de admissão (por exemplo: planeja-se admitir metade das saídas previsíveis, $f(z) = z/2$); $C > 0$ número constante de admissões em urgência.

Condição inicial: $z(t_0) \in \mathbf{N}$.

Modelo :

$$a(t_i) = \alpha z(t_i) \quad m(t_i) = \omega z(t_i) \quad p(t_i) = f(a(t_i) + m(t_i)) \quad u(t_{i+1}) = C$$

$$x(t_{i+1}) = z(t_i) + u(t_i) + p(t_i) - m(t_i) - a(t_i)$$

$$z(t_{i+1}) = \min \{x(t_{i+1}), L\} \quad n(t_{i+1}) = \max \{x(t_{i+1}) - L, 0\}$$

Crítica: Um número constante de admissões em urgência não é muito razoável. Como se pode melhorar isto?

Bibliografia: case study 9.1 de McClamroch, State Models of Dynamic Systems - a case study approach, editora Springer, 1980

2. DINÂMICA DE UMA POPULAÇÃO, TEMPO DISCRETO

Características:

- tempo discreto, unidade de tempo — uma geração,
- sem dados de entrada.
- dados de saída: x_i = dimensão da população na geração i

2.1. Modelo de Malthus. : (séc XIX) Hipóteses:

- número de nascimentos proporcional à dimensão da população constante de proporcionalidade $\alpha > 0$ - taxa de natalidade;
- número de mortes proporcional à dimensão da população constante de proporcionalidade $\omega > 0$ - taxa de mortalidade;
- não há migração.

Formulação do modelo:

- variável interna: x = dimensão da população,
 $x \in \mathbf{R}, x > 0$
- dinâmica: $x(t_{i+1}) = x(t_i) + \alpha x(t_i) - \omega x(t_i) = \mu x(t_i)$.
 $\mu = 1 + \alpha - \omega$ - taxa de crescimento Malthusiano da população.

Notação: $x_i = x(t_i)$, com condição inicial $x_0 = x(t_0)$. $x_{i+1} = f(x_i) = (1 + \alpha - \omega) x_i = \mu x_i$

Dinâmica do modelo A sucessão $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots)$ com $x_{i+1} = f(x_i)$ é chamada uma *trajetória* do modelo.

Trajetoórias do modelo de Malthus: $x_i = (1 + \alpha - \omega)^i x_0 = \mu^i x_0$

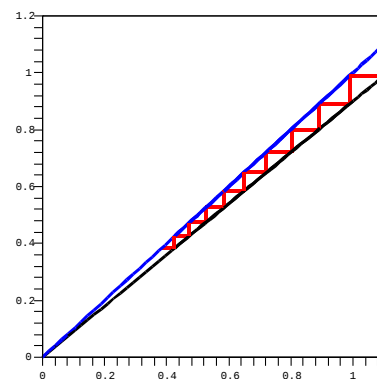
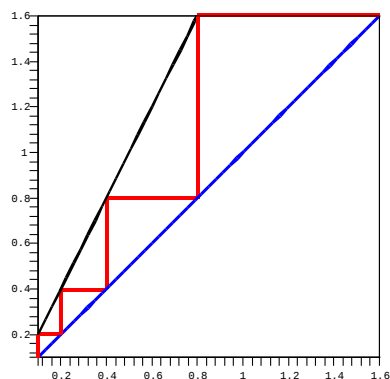
Uma condição inicial para a qual a trajetória é constante $(x_0, x_0, x_0, \dots)$ ou seja $x_{i+1} = f(x_i) = x_0$ é chamada um *estado de equilíbrio* da dinâmica.

Estados de equilíbrio do modelo de Malthus:

- Se $\mu = 1$ todo $x \in \mathbf{R}$ é estado de equilíbrio.
- Se $\mu \neq 1$, o único estado de equilíbrio é $x = 0$.
- Se $0 < \mu < 1$ então $x_{i+1} < x_i$
 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ ($x = 0$ é equilíbrio *atrator*).
- Se $\mu > 1$ então $x_{i+1} > x_i$
 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \infty$ ($x = 0$ é equilíbrio *repulsor*).

Modelo de Malthus — Representação gráfica

Trajetoórias: $x_i = \mu^i x_0$ $\mu = 2$ à esquerda, $\mu = 0.9$ à direita $y = x$ a azul



2.2. Modelo de Malthus com migração. Hipóteses:

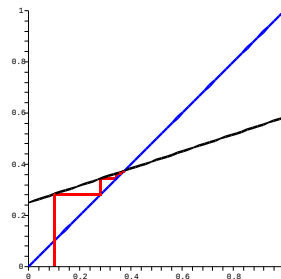
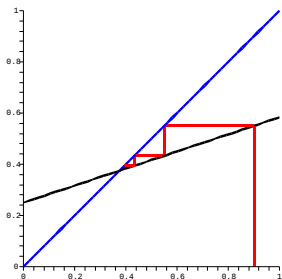
- crescimento (ou decrescimento) Malthusiano — proporcional à dimensão da população constante de proporcionalidade $\mu > 0$ - taxa de crescimento Malthusiano;
- migração
 - frequência de *Emigração* constante, $E > 0$;
 - frequência de *Imigração* constante, $I > 0$.

Formulação do modelo:

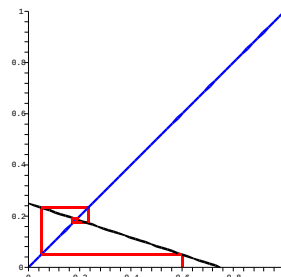
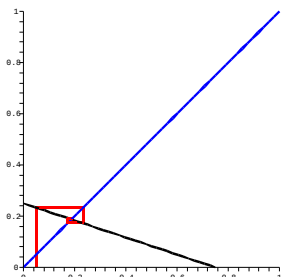
- variável interna: x = dimensão da população, $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$
- dinâmica: $x_{i+1} = \mu x_i + I - E = \mu x_i + M$.
- frequência de migração constante, $M = I - E \in \mathbf{R}$.

Estados de equilíbrio do modelo: $f(x) = x \iff x = \frac{M}{1 - \mu}$

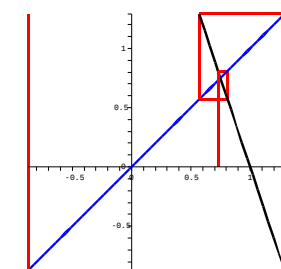
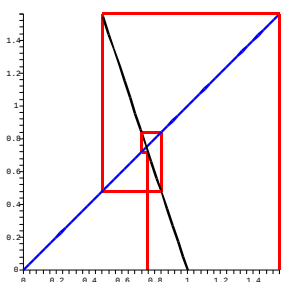
Representação gráfica $\mu = 1/3 \quad M = 1/4 \quad x_0 = 1/10$ à esquerda; $x_0 = 9/10$ à direita



$\mu = -1/3 \quad M = 1/4 \quad x_0 = 1/20$ à esquerda; $x_0 = 6/10$ à direita



$\mu = -3 \quad M = 3 \quad x_0 = 76/100$ à esquerda; $x_0 = 73/100$ à direita



2.3. Equações às diferenças. Exemplo: Modelo de Malthus com migração: (séc XIX)

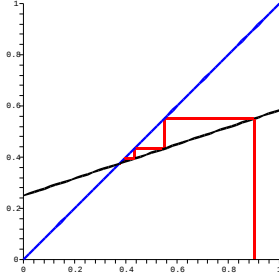
Dinâmica: $x_{i+1} = \mu x_i + M = f(x_i)$

Exemplo: $\mu = 1/3 \quad M = 1/4$

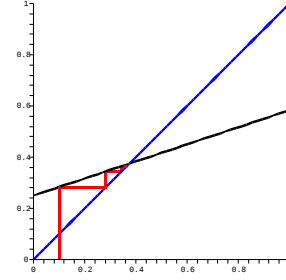
Estados de Equilíbrio: $f(x) = x \iff x = \frac{3}{8}$

Trajetórias:

$$x_0 = 9/10$$



$$x_0 = 1/10$$



Teorema 1. A equação às diferenças $x_{i+1} = \mu x_i + M = f(x_i)$ com $\mu > 0$, $\mu \neq 1$ tem sempre um estado de equilíbrio $x_* = \frac{M}{1-\mu}$. Além disso:

- (1) x_* é estado de equilíbrio repulsor se $\mu > 1$.
- (2) x_* é estado de equilíbrio atrator se $0 < \mu < 1$.

Prova: Se $\mu > 1$, então (x_i) é

- monótona crescente para $x_0 > x_*$.
- monótona decrescente para $x_0 < x_*$.

Se $0 < \mu < 1$, então (x_i) é

- monótona decrescente e limitada por x_* para $x_0 > x_*$.
- monótona crescente e limitada por x_* para $x_0 < x_*$.

logo (x_i) converge. Resta verificar que $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x_*$.

Teorema 2 (do ponto fixo). Se $f : I \rightarrow I$ for uma função contínua no intervalo $I \subset \mathbf{R}$ e se a sucessão (x_i) com $x_0 \in I$ e com $x_{i+1} = f(x_i)$ tiver limite $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x_* \in I$ então $f(x_*) = x_*$.

Prova: A função f transforma a sucessão (x_i)

$$x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots$$

na sucessão $(f(x_i))$

$$f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots$$

logo, $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x_*$.

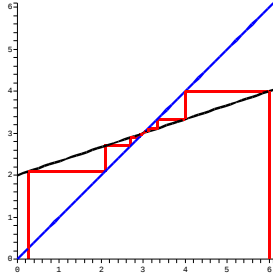
como f é contínua $x_* = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = f(\lim_{i \rightarrow \infty} x_i) = f(x_*)$.

Exercício 1 Escreva explicitamente o modelo linear para uma população com taxa de natalidade $\alpha = 1$, taxa de mortalidade $\omega = 5/3$, frequência de emigração $E = 2$, frequência de imigração $I = 4$, descreva seus estados de equilíbrio e as suas trajetórias.

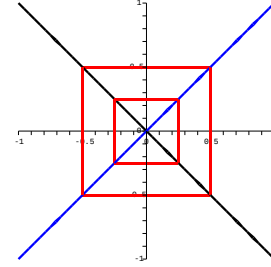
$$\text{Modelo } x_{i+1} = f(x_i) = x_i + \alpha x_i - \omega x_i + I - E = \mu x_i + M = 5x_i/3 + 2$$

Exercício 2 Escreva explicitamente o modelo linear para uma população com taxa de natalidade $\alpha = 1$, taxa de mortalidade $\omega = 3$, sem migração, descreva seus estados de equilíbrio e as suas trajetórias.

Modelo $x_{i+1} = f(x_i) = x_i + \alpha x_i - \omega x_i = \mu x_i = -x_i$
 Trajetórias do Exercício 1



Trajetórias do Exercício 2



Exercício 3 Escreva explicitamente o modelo linear para uma população com taxa de natalidade $\alpha = 1$, taxa de mortalidade $\omega = 3$, frequência de emigração $E = 2$, frequência de imigração $I = 4$, descreva seus estados de equilíbrio e as suas trajetórias.

Modelo $x_{i+1} = f(x_i) = x_i + \alpha x_i - \omega x_i + I - E = -x_i + 2$

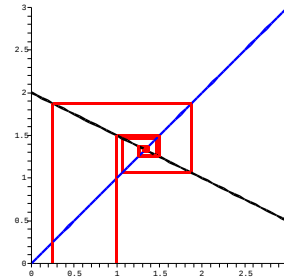
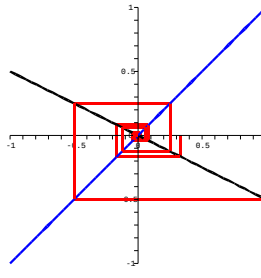
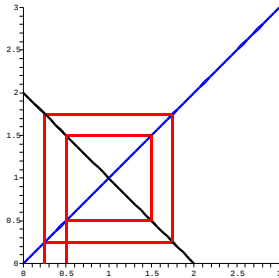
Exercício 4 Escreva explicitamente o modelo linear para uma população com taxa de natalidade $\alpha = 1$, taxa de mortalidade $\omega = 5/2$, sem migração, descreva seus estados de equilíbrio e as suas trajetórias.

Modelo $x_{i+1} = f(x_i) = x_i + \alpha x_i - \omega x_i = -x_i/2$

Trajetórias do Exercício 3

Trajetórias do Exercício 4

Trajetórias do Exercício 5



Exercício 5 Escreva explicitamente o modelo linear para uma população com taxa de natalidade $\alpha = 1$, taxa de mortalidade $\omega = 5/2$, frequência de emigração $E = 2$, frequência de imigração $I = 4$, descreva seus estados de equilíbrio e as suas trajetórias.

Modelo $x_{i+1} = f(x_i) = x_i + \alpha x_i - \omega x_i + I - E = -x_i/2 + 2$

Teorema 3. A equação às diferenças $x_{i+1} = \mu x_i + M = f(x_i)$ com $\mu > 0$, $\mu \neq 1$ tem sempre um estado de equilíbrio $x_* = \frac{M}{1-\mu}$. Além disso:

- (1) x_* é estado de equilíbrio repulsor se $\mu < -1$.
- (2) x_* é estado de equilíbrio atrator se $-1 < \mu < 0$.

Teorema 4. Se $f : I \rightarrow I$ for uma função C^1 no intervalo $I \subset \mathbf{R}$ com $f(x_*) = x_*$ para algum $x_* \in I$ então:

- (1) x_* é estado de equilíbrio repulsor se $|f'(x_*)| > 1$.
- (2) x_* é estado de equilíbrio atrator se $|f'(x_*)| < 1$.

Mais precisamente, para x_0 próximo de x_* a trajetória (x_i) da equação às diferenças $x_{i+1} = f(x_i)$:

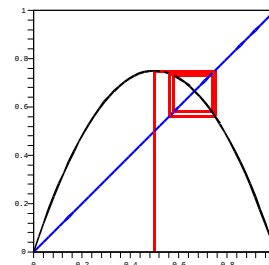
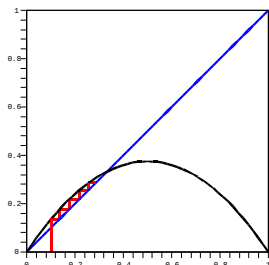
- (1) afasta-se de x_* se $|f'(x_*)| > 1$.

(2) *satisfaz* $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x_*$ se $|f'(x_*)| < 1$.

2.4. Populações: Modelo não linear: (séc XX). Dinâmica: $x_{i+1} = f(x_i) = \mu(x_i)x_i = px_i(1 - x_i)$

Exemplos: $p = 1.5$, $x_0 = 0.1$

$p = 3$, $x_0 = 0.8$

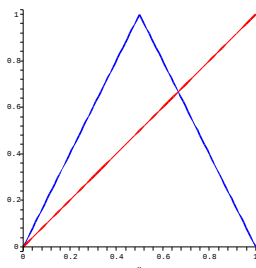


2.5. População com crescimento limitado. : (séc XX e XXI)

População normalizada $x \in [0, 1]$

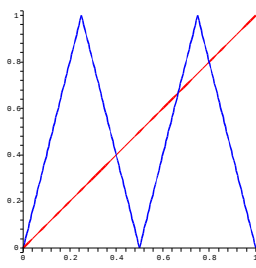
Dinâmica: $x_{i+1} = f(x_i)$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x + 2 & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$



dois estados de equilíbrio: $x = 0$ e $x = 3/2$ repulsores

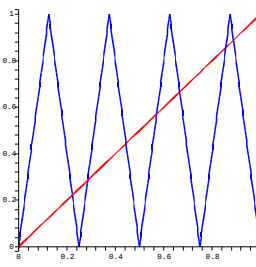
$$f^2(x) = f(f(x))$$



para $f^2(x) = x$ quatro estados de equilíbrio: *repulsores*

para $f(x)$ dois estados de equilíbrio $f(x) = x$
uma trajetória com período 2: $f(x) = y$ $f(y) = x$ *repulsora*

$$f^3(x) = f(f(f(x)))$$



para $f^3(x) = x$ oito estados de equilíbrio: *repulsores*

para $f(x)$ dois estados de equilíbrio $f(x) = x$
duas trajetórias com período 3 $f(x) = y$ $f(y) = z$ $f(z) = x$ *repulsoras*

$f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ gráfico com 2^{n-1} picos
 para $f^n(x) = x$ 2^n estados de equilíbrio *repulsores*
 para $f(x)$ trajetórias *repulsoras* com todos os períodos.

Bibliografia Secções 2.1 a 2.3 de Brauer e Castillo-Chvez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, editora Springer, 2001

Secções 1.1 a 1.2 de Britton, *Essential Mathematical Biology*, editora Springer, 2003

Secções 2.1 a 2.3 de Murray, *Mathematical Biology 1- An introduction*, editora Springer, 2002

3. DINÂMICA DE POPULAÇÕES, TEMPO DISCRETO, CLASSES DE IDADE

3.1. Modelo de Fibonacci (séc XIII). População de coelhos estruturada por classes de idade; tempo discreto, um ciclo reprodutivo ≈ 1 mês.

Hipóteses:

- o fator limitante ao crescimento da população é o número de fêmeas;
- os coelhos fêmea atingem a maturidade reprodutiva ao fim de 1 mês;
- cada fêmea produz uma nova fêmea por mês;
- os coelhos fêmea morrem antes de completar 3 meses, mas depois de se reproduzirem aos 2 meses;
- há coelhos macho em quantidade suficiente para não limitar a reprodução;
- Variáveis internas:
 a número de coelhas com 1 mês de idade
 b número de coelhas com 2 meses de idade
- Dados de saída: $N = b + a$ número total de coelhas.
- Dinâmica do modelo:
 $b_{n+1} = a_n$ porque as coelhas ficaram um mês mais velhas.
 $a_{n+1} = b_n + a_n = N_n$ porque todas as coelhas que tinham 1 ou 2 meses se reproduziram.
 $N_n = b_n + a_n$

Dinâmica do Modelo de Fibonacci $A_{n+1} = L \cdot A_n$ com

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{dado} \quad A_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$N_n = b_n + a_n = a_{n+1}.$$

Exemplo Condição inicial: $a_0 = 1, b_0 = 0$

(N_n) é a *sequência de Fibonacci* 1 2 3 5 8 13 21 28 ...

$N_n = N_{n-1} + N_{n-2}$ ou seja

$$A_n = L^n \cdot A_0 \quad \text{com} \quad L^n = \underbrace{L \cdot L \cdots L}_n \text{ vezes}$$

Queremos prever o comportamento de A_n para n grande e para *qualquer* condição inicial A_0 .

3.2. Exemplo mais simples. $A_{n+1} = L \cdot A_n$ com

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \quad A_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{dado} \quad A_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$A_n = L^n \cdot A_0 \quad \text{com} \quad L^n = \underbrace{L \cdot L \cdots L}_{n \text{ vezes}}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 a_0 \\ \alpha_2 b_0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 a_0 \\ \alpha_2^2 b_0 \end{pmatrix} \quad A_n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n a_0 \\ \alpha_2^n b_0 \end{pmatrix}$$

Queremos prever o comportamento de A_n para n grande e para *qualquer* condição inicial A_0 .

- Se $|\alpha_1| < 1$ então $a_n \rightarrow 0$
- Se $|\alpha_1| > 1$ e $a_0 \neq 0$ então $|a_n| \rightarrow \infty$
- Se $|\alpha_2| < 1$ então $b_n \rightarrow 0$
- Se $|\alpha_2| > 1$ e $b_0 \neq 0$ então $|b_n| \rightarrow \infty$

3.3. Modelo de Fibonacci — Polinômio característico.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad p_L(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$$

Autovalores

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\phi > 1 \quad (\text{razão de ouro}) \quad -1 < \beta < 0.$$

Autovetores

$$v_\phi = \begin{pmatrix} \phi \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_\beta = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.4. Dinâmica a partir dos autovetores. Condição inicial $A_0 = xv_\phi + yv_\beta$, com $x, y \in \mathbf{R}$

$$A_1 = L \cdot A_0 = x\phi v_\phi + y\beta v_\beta$$

$$A_n = L^n \cdot A_0 = x\phi^n v_\phi + y\beta^n v_\beta$$

Quando $n \rightarrow \infty$:

- $-1 < \beta < 0 \implies \beta^n \rightarrow 0$
- $A_n \rightarrow (x\phi^n)v_\phi$

Conclusões

Para quase todas as condições iniciais A_0 , quando $n \rightarrow \infty$:

- A população total tende a crescer segundo a razão de ouro $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
- A proporção entre coelhas jovens e coelhas adultas tende para a razão de ouro ϕ .

Quase todas as condições iniciais significa que A_0 não é múltiplo escalar de v_β , ou seja, $A_0 \neq (0, 0)^T$ e

a proporção inicial entre coelhas jovens e coelhas adultas não é igual a $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$.

3.5. Modelo de Fibonacci modificado. Variáveis internas

a número de coelhas jovens b número de coelhas adultas

Modelo

$a_{n+1} = a_n + b_n = N_n$ coelhas jovens e adultas que se reproduziram.

$b_{n+1} = sa_n$ proporção das coelhas jovens que sobrou $s \in [0, 1]$.

$A_{n+1} = L \cdot A_n$, ou seja $A_n = L^n \cdot A_0$ com

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ s & 0 \end{pmatrix} \quad A_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{dado} \quad A_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

3.6. Modelo de Fibonacci ainda mais modificado. *Variáveis internas*

a número de coelhas jovens b número de coelhas adultas

Modelo $a_{n+1} = s_1 m_1 a_n + s_1 m_2 b_n$ coelhas jovens e adultas que se reproduziram.

$b_{n+1} = s_2 a_n$ proporção das coelhas jovens que sobreviveu

$s_1, s_2 \in [0, 1]$ taxas de sobrevivência.

$m_1, m_2 \geq 0$ taxas de reprodução

$A_{n+1} = L \cdot A_n$, ou seja $A_n = L^n \cdot A_0$ com

$$L = \begin{pmatrix} s_1 m_1 & s_1 m_2 \\ s_2 & 0 \end{pmatrix} \quad A_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{dado} \quad A_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

3.7. Modelo com três classes de idades. *Variáveis internas*

Grupos por idades a_1, a_2, a_3 em ordem crescente de idade

Modelo

$a_{1,n+1} = s_1 m_1 a_{1,n} + s_1 m_2 a_{2,n} + s_1 m_3 a_{3,n}$ nascimentos.

$a_{1,n+1} = s_1 (m_1 a_{1,n} + m_2 a_{2,n} + m_3 a_{3,n})$

$a_{2,n+1} = s_2 a_{1,n}$ proporção da classe a_1 que sobreviveu

$a_{3,n+1} = s_3 a_{2,n}$ proporção da classe a_2 que sobreviveu

$s_1, s_2, s_3 \in [0, 1]$ taxas de sobrevivência.

$m_1, m_2, m_3 \geq 0$ taxas de reprodução

$A_{n+1} = L \cdot A_n$, ou seja $A_n = L^n \cdot A_0$ dado A_0 com

$$L = \begin{pmatrix} s_1 m_1 & s_1 m_2 & s_1 m_3 \\ s_2 & 0 & 0 \\ 0 & s_3 & 0 \end{pmatrix} \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ a_{3,n} \end{pmatrix}$$

3.8. Modelo geral — Matriz de Leslie. (séc XX) *Variáveis internas*

Grupos por idades $a_1, a_2, \dots, a_\omega$ em ordem crescente de idade

Modelo

$A_{n+1} = L \cdot A_n$, com $A_n = (a_{1,n}, a_{2,n}, \dots, a_{\omega,n})^T$

$$L = \begin{pmatrix} s_1 m_1 & s_1 m_2 & \cdots & s_1 m_{\omega-1} & s_1 m_\omega \\ s_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_\omega & 0 \end{pmatrix}$$

$s_1, s_2, \dots, s_\omega \in [0, 1]$ taxas de sobrevivência.

$m_1, m_2, \dots, m_\omega \geq 0$ taxas de reprodução

3.9. Equações às diferenças — Exemplo.

$$A_{j+1} = L \cdot A_j \quad L = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad A_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$$

$$x_j = \alpha^j x_0 \quad y_j = \beta^j y_0$$

com $|\alpha| > |\beta|$ e $|\alpha| \neq 0, 1$ e $|\beta| \neq 0, 1$.

Se $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ então

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |x_j| = \begin{cases} 0 & \text{se } |\alpha| < 1 \\ \infty & \text{se } |\alpha| > 1 \end{cases} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} y_j = \begin{cases} 0 & \text{se } |\beta| < 1 \\ \infty & \text{se } |\beta| > 1 \end{cases}$$

$$\frac{|y_j|}{|x_j|} = \frac{|\beta|^j |y_0|}{|\alpha|^j |x_0|} = \left(\frac{|\beta|}{|\alpha|} \right)^j \frac{|y_0|}{|x_0|}.$$

Como $\frac{|\beta|}{|\alpha|} < 1$ então $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|y_j|}{|x_j|} = 0$.

Logo a direção de A_j tende para a horizontal.

Exemplo 1 — direção limite de A_j

$$A_{j+1} = L \cdot A_j \quad L = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^j x_0 \\ 3^j y_0 \end{pmatrix}$$

Se $x_0 > 0$, $y_0 \neq 0$ então $\frac{|y_j|}{|x_j|} = \left(\frac{3}{4} \right)^j \frac{|y_0|}{|x_0|}$ e $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|y_j|}{|x_j|} = 0$. $|A_j| = 4^j \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{3}{4} \right)^{2j} y_0^2}$

$$\frac{1}{|A_j|} A_j = \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{3}{4} \right)^{2j} y_0^2}}, \left(\frac{3}{4} \right)^j \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{3}{4} \right)^{2j} y_0^2}} \right)^T$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{|A_j|} A_j = (1, 0)^T$$

Se $x_0 < 0$, $y_0 \neq 0$ então

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{|A_j|} A_j = (-1, 0)^T$$

Exemplo 2 — direção limite de A_j

$$A_{j+1} = L \cdot A_j \quad L = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \quad A_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^j 2^j x_0 \\ y_0 / 3^j \end{pmatrix}$$

Se $x_0 > 0$, $y_0 \neq 0$ então $\frac{|y_j|}{|x_j|} = \left(\frac{1}{6} \right)^j \frac{|y_0|}{|x_0|}$ e $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|y_j|}{|x_j|} = 0$. $|A_j| = 2^j \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{1}{6} \right)^{2j} y_0^2}$

$$\frac{1}{|A_j|} A_j = \left(\frac{(-1)^j x_0}{\sqrt{(-1)^{2j} x_0^2 + \left(\frac{1}{6} \right)^{2j} y_0^2}}, \left(\frac{1}{6} \right)^j \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{1}{6} \right)^{2j} y_0^2}} \right)^T$$

$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{|A_j|} A_j$ não existe! Mas $\frac{1}{|A_j|} A_j$ aproxima-se alternadamente de $(\pm 1, 0)^T$ quando $j \rightarrow \infty$.

3.10. Equações às diferenças.

Teorema 5. As trajetórias $A_j = (x_j, y_j)^T$ de $A_{j+1} = L \cdot A_j$ com $A_0 = (x_0, y_0)^T$ e

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad A_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$$

para $|\alpha| > |\beta|$ tais que $|\alpha| \neq 0, 1$ e $|\beta| \neq 0, 1$, satisfazem:

- (1) Se $A_0 = (0, 0)^T$ então $A_j = (0, 0)^T$.
- (2) Se $A_0 = (x_0, 0)^T$ então $A_j = \alpha^j A_0$.
Se $A_0 = (0, y_0)^T$ então $A_j = \beta^j A_0$.

Se $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$, então

(3)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |x_j| = \begin{cases} 0 & \text{se } |\alpha| < 1 \\ \infty & \text{se } |\alpha| > 1 \end{cases} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} |y_j| = \begin{cases} 0 & \text{se } |\beta| < 1 \\ \infty & \text{se } |\beta| > 1 \end{cases}$$

- (4) $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|y_j|}{|x_j|} = 0$ e $\frac{1}{|A_j|} A_j \longrightarrow (\pm 1, 0)^T$ quando $j \rightarrow \infty$.

Definição

Se $\alpha \in \mathbf{R}$ for autovalor de uma matriz L , $n \times n$ então o subespaço vetorial:

$$V_\alpha = \{v \in \mathbf{R}^n : L \cdot v = \alpha v\}$$

é chamado *autoespaço* associado ao autovalor α .

Teorema 6. Seja L uma matriz 2×2 com autovalores reais $\alpha \neq \beta$ e tais que $|\alpha|$ e $|\beta| \neq 0, 1$. Então as trajetórias A_j de $A_{j+1} = L \cdot A_j$ com $A_0 \in \mathbf{R}^2$ têm as seguintes propriedades:

- (1) Se $A_0 = (0, 0)^T$ então $A_j = (0, 0)^T$.
- (2) Se $A_0 \in V_\alpha$ então $A_j \in V_\alpha$. Se $A_0 \in V_\beta$ então $A_j \in V_\beta$.
- (3) Se $A_0 \notin V_\alpha \cup V_\beta$ então:
 - (a) Se $0 < |\beta| < |\alpha| < 1$ então $\lim_{j \rightarrow \infty} |A_j| = 0$.
 - (b) Se $|\alpha| > 1$ então $\lim_{j \rightarrow \infty} |A_j| = \infty$.
- (4) Se $A_0 \notin V_\beta$ então $\frac{1}{|A_j|} A_j$ aproxima-se de V_α quando $j \rightarrow \infty$.

Prova

L matriz 2×2 autovalores $|\alpha|$ e $|\beta| \neq 0, 1$, $\alpha \neq \beta$, $A_{j+1} = L \cdot A_j$.

1. Se $A_0 = (0, 0)^T$ então $A_1 = L \cdot (0, 0)^T = (0, 0)^T$ e $A_j = L \cdot (0, 0)^T = (0, 0)^T$.

2. Se $A_0 \in V_\alpha$

então $A_1 = L \cdot A_0 = \alpha A_0 \in V_\alpha$ e $A_{j+1} = L \cdot A_j = \alpha A_j \in V_\alpha$.

L matriz 2×2 autovalores $|\alpha|$ e $|\beta| \neq 0, 1$, $\alpha \neq \beta$, $A_{j+1} = L \cdot A_j$.

v_α e v_β autovetores de L .

P e D matrizes 2×2 dadas por:

$$P \cdot v_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P \cdot v_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(as colunas de P^{-1} são as coordenadas dos autovetores).

Então $P^{-1} \cdot D \cdot P = L$.

Se $B_j = P \cdot A_j$ então $B_{j+1} = D \cdot B_j$.

Se $B_{j+1} = D \cdot B_j$ e $A_j = P^{-1} \cdot B_j$ então $A_{j+1} = L \cdot A_j$.

L matriz 2×2 autovalores $|\alpha|$ e $|\beta| \neq 0, 1$, $\alpha \neq \beta$, $A_{j+1} = L \cdot A_j$.

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ com } P^{-1} \cdot D \cdot P = L.$$

P transforma:

Trajetórias A_j de L em trajetórias B_j de D .

Autoespaços de L em autoespaços de D (eixos coordenados).

3. Se $A_0 \notin V_\alpha \cup V_\beta$

então $B_0 = P \cdot A_0$ não está nos eixos coordenados, logo

- Se $0 < |\beta| < |\alpha| < 1$ então $\lim_{j \rightarrow \infty} |B_j| = 0$.
- Se $|\alpha| > 1$ então $\lim_{j \rightarrow \infty} |B_j| = \infty$.

e as mesmas estimativas valem para A_j .

L matriz 2×2 autovalores $|\alpha|$ e $|\beta| \neq 0, 1$, $\alpha \neq \beta$, $A_{j+1} = L \cdot A_j$.

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ com } P^{-1} \cdot D \cdot P = L.$$

P transforma:

Trajetórias A_j de L em trajetórias B_j de D .

Autoespaço V_α de L no autoespaço correspondente de D (eixo xx).

Autoespaço V_β de L no autoespaço correspondente de D (eixo yy).

4. Se $A_0 \notin V_\beta$

então $B_0 \notin$ eixo dos yy .

Logo $\frac{1}{|B_j|} B_j$ aproxima-se do eixo dos xx quando $j \rightarrow \infty$.

Logo $\frac{1}{|A_j|} A_j$ aproxima-se de V_α quando $j \rightarrow \infty$.

Teorema 7. *Seja L uma matriz $n \times n$ com n autovalores reais distintos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ e tais que $|\alpha_k| \neq 0, 1$. Então as trajetórias A_j de $A_{j+1} = L \cdot A_j$ com $A_0 \in \mathbf{R}^n$ têm as seguintes propriedades:*

- (1) Se $A_0 = (0, \dots, 0)^T$ então $A_j = (0, \dots, 0)^T$.
- (2) Se $A_0 \in V_{\alpha_k}$ então $A_j \in V_{\alpha_k}$.
- (3) Se $A_0 \notin (V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n})$ então:
 - (a) Se $0 < |\alpha_k| < 1$ para $k = 1, \dots, n$ então $\lim_{j \rightarrow \infty} |A_j| = 0$.
 - (b) Se $|\alpha_k| > 1$ para algum k então $\lim_{j \rightarrow \infty} |A_j| = \infty$.
- (4) Se $A_0 \notin (V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n})$ e se $|\alpha_1| > |\alpha_k|$, $k = 2, \dots, n$ então $\frac{1}{|A_j|} A_j$ aproxima-se de V_{α_1} quando $j \rightarrow \infty$.

3.11. De volta às matrizes de Leslie.

$$L = \begin{pmatrix} s_1 m_1 & s_1 m_2 & \cdots & s_1 m_{\omega-1} & s_1 m_\omega \\ s_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_\omega & 0 \end{pmatrix}$$

Se os autovalores α_k de L forem reais, distintos e $|\alpha_k| \neq 0, 1$, então para quase todas as condições iniciais $A_0 \in \mathbf{R}^\omega$, as trajetórias A_j de $A_{j+1} = L \cdot A_j$ com $A_0 \in \mathbf{R}^\omega$ têm as seguintes propriedades:

- (1) Se $0 < |\alpha_k| < 1$ para $k = 1, \dots, \omega$ então $\lim_{j \rightarrow \infty} |A_j| = 0$.

- (2) Se $|\alpha_k| > 1$ para algum k então $\lim_{j \rightarrow \infty} |A_j| = \infty$.
- (3) Se $A_0 \notin (V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n})$ e se $|\alpha_1| > |\alpha_k|$, $k = 2, \dots, n$ então $\frac{1}{|A_j|} A_j$ aproxima-se de V_{α_1} quando $j \rightarrow \infty$.

Supondo que a matriz de Leslie tenha autovalores reais, distintos e com módulo diferente de 0 e 1:

Conclusões:

- Se todos os autovalores de L forem, em módulo, menores que 1 então a população está em extinção.
- Se algum autovalor de L for, em módulo, maior que 1 então a população cresce.
- A proporção entre o número de indivíduos das várias classes de idades aproxima-se da proporção encontrada no autovetor de L associado ao autovalor de maior módulo.

3.12. E se os autovalores não forem reais? Exemplo 3 — matriz de rotação

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Autovalores: $\cos \theta \pm i \sin \theta$.

Exemplo 4

$$C = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Autovalores: $r \cos \theta \pm ir \sin \theta = a \pm ib$ com $r = |a + ib|$.

Trajetórias $A_{j+1} = C \cdot A_j$

$A_j = r^j M^j \cdot A_0$.

Se $r < 1$ então $\lim_{j \rightarrow \infty} |A_j| = 0$.

Se $r > 1$ então $\lim_{j \rightarrow \infty} |A_j| = \infty$.

Notação

Dado $v = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$, define-se:

$\bar{v} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) \in \mathbf{C}^n$;

$\text{Re}(v) = (\text{Re}(z_1), \dots, \text{Re}(z_n)) \in \mathbf{R}^n$, $\text{Im}(v) = (\text{Im}(z_1), \dots, \text{Im}(z_n)) \in \mathbf{R}^n$.

Teorema 8. Se $a \pm ib \in \mathbf{C}$ forem raízes do polinômio característico de uma matriz real L , $n \times n$, então

$v \in \mathbf{C}^n$ é autovetor de L associado ao autovalor $\zeta = a + ib$

se e somente se

$\bar{v} \in \mathbf{C}^n$ é autovetor de L associado ao autovalor $\bar{\zeta} = a - ib$.

Teorema 9. Se $a \pm ib \in \mathbf{C}$ forem raízes do polinômio característico de uma matriz real L , 2×2 ,

se $v \in \mathbf{C}^2$ for autovetor de L associado ao autovalor $\zeta = a + ib$,

e se P e C forem matrizes tais que

$$P \cdot \text{Re}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P \cdot \text{Im}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

então

$P^{-1} \cdot C \cdot P = L$ e por isso

P transforma trajetórias A_j de L em trajetórias B_j de C .

Definição

Se $a \pm ib \in \mathbf{C}$ forem raízes do polinômio característico de uma matriz real L , $n \times n$ e se $v = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ for autovetor de L associado ao autovalor $\zeta = a + ib$, então o subespaço vetorial V_ζ de $\mathbf{R}^n$ gerado por $\{\text{Re}(v), \text{Im}(v)\}$ é chamado *autoespaço* associado aos *autovalores* $a \pm ib$.

Teorema 10. *Seja L uma matriz $n \times n$ com n autovalores distintos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{C}$ e tais que $|\alpha_k| \neq 0, 1$. Então as trajetórias A_j de $A_{j+1} = L \cdot A_j$ com $A_0 \in \mathbf{R}^n$ têm as seguintes propriedades:*

- (1) Se $A_0 = (0, \dots, 0)^T$ então $A_j = (0, \dots, 0)^T$.
- (2) Se $A_0 \in V_{\alpha_k}$ então $A_j \in V_{\alpha_k}$.
- (3) Se $A_0 \notin (V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n})$ então:
 - (a) Se $0 < |\alpha_k| < 1$ para $k = 1, \dots, n$ então $\lim_{j \rightarrow \infty} |A_j| = 0$.
 - (b) Se $|\alpha_k| > 1$ para algum k então $\lim_{j \rightarrow \infty} |A_j| = \infty$.
- (4) Se $A_0 \notin (V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n})$ e se $|\alpha_1| > |\alpha_k|$, $k = 2, \dots, n$ então $\frac{1}{|A_j|} A_j$ aproxima-se de V_{α_1} quando $j \rightarrow \infty$.

3.13. De volta às matrizes de Leslie.

$$L = \begin{pmatrix} s_1 m_1 & s_1 m_2 & \cdots & s_1 m_{\omega-1} & s_1 m_\omega \\ s_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_\omega & 0 \end{pmatrix}$$

Se os autovalores $\alpha_k \in \mathbf{C}$ de L forem distintos e $|\alpha_k| \neq 0, 1$, então para quase todas as condições iniciais $A_0 \in \mathbf{R}^\omega$, as trajetórias A_j de $A_{j+1} = L \cdot A_j$ com $A_0 \in \mathbf{R}^\omega$ têm as seguintes propriedades:

- (1) Se $0 < |\alpha_k| < 1$ para $k = 1, \dots, \omega$ então $\lim_{j \rightarrow \infty} |A_j| = 0$.
- (2) Se $|\alpha_k| > 1$ para algum k então $\lim_{j \rightarrow \infty} |A_j| = \infty$.
- (3) Se $A_0 \notin (V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n})$ e se $|\alpha_1| > |\alpha_k|$, $k = 2, \dots, n$ então $\frac{1}{|A_j|} A_j$ aproxima-se de V_{α_1} quando $j \rightarrow \infty$.

Supondo que a matriz de Leslie tenha autovalores distintos e com módulo diferente de 0 e 1:

Conclusões:

- Se todos os autovalores de L forem, em módulo, menores que 1 então a população está em extinção.
- Se algum autovalor de L for, em módulo, maior que 1 então a população cresce.
- Se o autovalor de L de maior módulo for real, então a proporção entre o número de indivíduos das várias classes de idades aproxima-se da proporção encontrada no autovetor de L associado ao autovalor de maior módulo.

É possível mostrar que se as taxas de sobrevivência e de natalidade forem todas diferentes de zero, então o autovalor de L de maior módulo é real, positivo, e tem um autovetor com todas as coordenadas maiores do que zero. (Teorema de Perron-Frobenius).

Bibliografia:

Secções 1.8 a 1.9 de Britton, Essential Mathematical Biology, editora Springer, 2003

4. MODELOS MATEMÁTICOS — TESTE-SURPRESA

CADERNOS GUARDADOS

SOBRE AS MESAS SÓ:

1 FOLHA, LÁPIS, BORRACHA, CANETA, RÉGUA

1 DE ABRIL DE 2009

Para uma população normalizada $x \in [0, 1]$ com dinâmica

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{com} \quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 1/2. \end{cases}$$

mostre que esta população tem dinâmica caótica, isto é, que

- (1) Existem trajetórias com todos os período $P \in \mathbf{N}$.
- (2) Existe uma trajetória $(x_n) = (f^n(x_0))$ tal que, dados $y \in [0, 1]$ e $\varepsilon > 0$ para algum $N \in \mathbf{N}$ $|x_N - y| < \varepsilon$.
- (3) Dado $\varepsilon > 0$ e dados $x_0, y_0 \in [0, 1]$ com $|x_0 - y_0| < \varepsilon$, existe um $N \in \mathbf{N}$ tal que $|f^N(x_0) - f^N(y_0)| > 1/2$.

5. CONSERVAÇÃO DA ENERGIA, CURVAS DE NÍVEL

Definição

$A \subset \mathbf{R}^n$ aberto. Um *campo de vetores* em A é uma aplicação que a cada ponto de A associa um vetor de $\mathbf{R}^n$.

Exemplo

$A =$ semi-plano superior de $\mathbf{R}^2$

$F(x, y) = \left(x^3, \frac{x}{y}\right)$ define um campo de vetores em U .

Exemplo

$A = \mathbf{R}^2$

$F(x, y) =$ força exercida sobre uma partícula quando passa pelo ponto $x \in \mathbf{R}$ com velocidade $y = x' \in \mathbf{R}$.

Movimento de uma partícula $x(t)$ Posição da partícula no instante t

$y(t) = x'(t)$ Velocidade da partícula no instante t

$x''(t) = y'(t)$ Aceleração da partícula

Lei de Newton

$m =$ massa da partícula F força

$$F = mx''(t)$$

Energia cinética

$$T = \frac{1}{2}m(x'(t) \cdot x'(t))$$

Definição

$\psi : A \longrightarrow \mathbf{R}$ função derivável

$F(X) = -\nabla\psi(X) = \nabla(-\psi)(X)$ campo de vetores em U .

$F(X)$ é um *campo conservativo* Lei de Newton para uma partícula em posição $C(t)$

$$F(C(t)) = mC''(t)$$

Energia cinética

$$\frac{1}{2}m(C'(t) \cdot C'(t))$$

ψ é a *energia potencial* do campo conservativo $F = -\nabla\psi$

Teorema 11. *Se F for um campo conservativo, com $F = -\nabla\psi$ então para uma partícula que se move em uma curva segundo a lei de Newton, a soma da energia cinética e da energia potencial é constante.*

Teorema 12 (para $n = 1$). *Se $F = -\frac{df}{dx}$ for um campo conservativo, então para uma partícula que se move em uma curva segundo a lei de Newton, a soma da energia cinética e da energia potencial é constante.*

Prova do Teorema para dimensão $n = 1$

Basta provar que se a partícula se mover segundo $x(t)$, duas vezes derivável, então

$$\frac{d}{dt} \left(f(x(t)) + \frac{1}{2}mx'(t) \cdot x'(t) \right) = 0$$

Usando a derivada da função composta

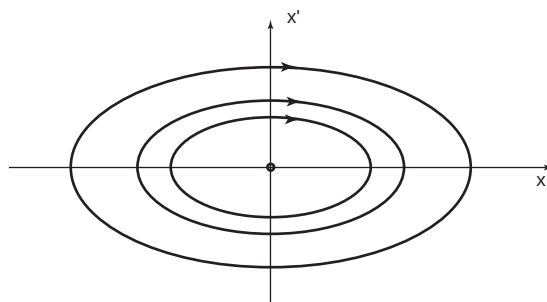
$$\frac{d}{dt} \left(f(x(t)) + \frac{1}{2}mx'(t) \cdot x'(t) \right) = \frac{df}{dx}(x(t)) \cdot x'(t) + mx''(t) \cdot x'(t),$$

que é igual a zero porque por hipótese (Newton)

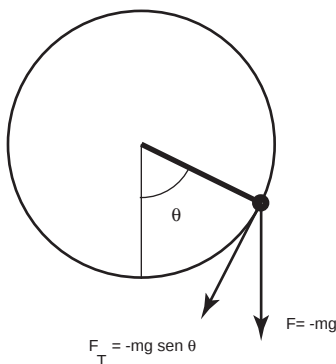
$$\frac{df}{dx}(x(t)) = -F(x(t)) = -mx''(t).$$

Teorema 13. *Se uma partícula se mover sobre uma curva segundo a lei de Newton e se a força sobre a partícula for dada por $F(x) = -f'(x)$ onde x é a posição da partícula, então o ponto $(x, y) = (x(t), x'(t))$ está sempre sobre uma curva de nível de $E(x, y) = f(x) + my^2/2$.*

5.1. Exemplo — oscilador harmônico. força: $F(x) = -x$, potencial $f(x) = x^2/2$.
 $(x, y) = (x(t), x'(t))$ está sobre uma elipse, curva de nível de $E(x, y) = (x^2 + my^2)/2$.



5.2. **Exemplo — pêndulo plano sem atrito.** força: $F_T(\theta) = -mg \sin \theta$ (componente tangencial), potencial $f(\theta) = -mg \cos \theta$.

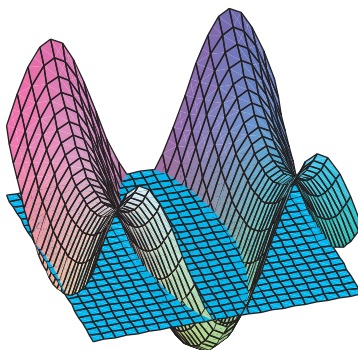


$(x, y) = (\theta(t), \theta'(t))$ está sobre uma curva de nível de $E(x, y) = m(-g \cos x + y^2/2)$.

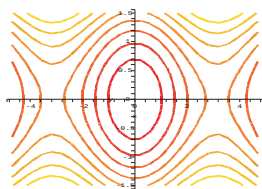
força: $F_T(\theta) = -mg \sin \theta$, potencial $f(\theta) = -mg \cos \theta$.

$(x, y) = (\theta(t), \theta'(t))$ está sobre uma curva de nível de $E(x, y) = m(-g \cos x + y^2/2)$.

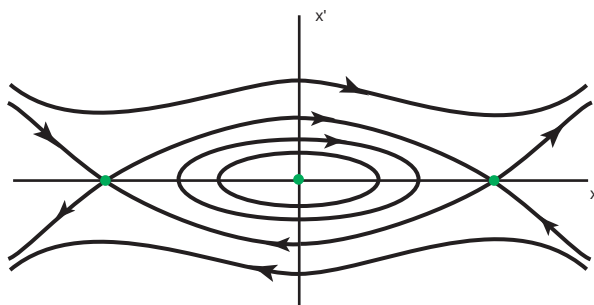
Gráfico de $E(x, y)$ e do plano $\{(x, y, z) : z = 1/4\}$:



Curvas de nível de $E(x, y) = m(-g \cos x + y^2/2)$, que contêm as curvas $(x, y) = (\theta(t), \theta'(t))$



Orientação das curvas $(x, y) = (\theta(t), \theta'(t))$



6. JOGOS, CURVAS DE NÍVEL

6.1. Par ou ímpar. Jogador que escolheu *par*.

Resultados:

<i>jogador</i>	<i>adversário</i>	
	<i>par</i>	<i>ímpar</i>
<i>par</i>	1	-1
<i>ímpar</i>	-1	1

Tática — par ou ímpar — jogador que escolheu par.

$p = (p_1, p_2)$ com $p_1 + p_2 = 1$: joga *par* com probabilidade p_1 .

Ganho

$$G(p, q) = p \cdot M \cdot q^T \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo

Jogador que escolheu *par* joga $p = (1, 0)$

Adversário joga $q = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

$$G(p, q) = -\frac{1}{2} \text{ (par perde).}$$

Mais exemplos

$$p = (1, 0), q = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), G(p, q) = \frac{1}{2} \text{ (par ganha).}$$

$$p = (1, 0), q = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), G(p, q) = -\frac{1}{3} \text{ (par perde).}$$

$$p = (1, 0), q = (1, 0), G(p, q) = 1 \text{ (par ganha).}$$

6.2. Equilíbrio de Nash. Definição

p é Equilíbrio de Nash se para toda tática $q \neq p$

$$G(q, p) \leq G(p, p)$$

Exemplos , para o jogo de par ou ímpar

$p = (1, 0)$ é equilíbrio de Nash, com $G(p, p) = 1$.

$p = (0, 1)$ também é equilíbrio de Nash, com $G(p, p) = 1$.

$p = (1/2, 1/2)$ também é equilíbrio de Nash, com $G(p, p) = 0$.

Definição

p é Equilíbrio de Nash estrito se para toda tática $q \neq p$, ou

$$G(q, p) < G(p, p)$$

ou então

$$\text{se } G(q, p) = G(p, p) \text{ então } G(q, q) < G(p, q)$$

Exemplos, para o jogo de par ou ímpar

$p = (1, 0)$ é equilíbrio de Nash estrito.

$p = (1/2, 1/2)$ não é equilíbrio de Nash estrito.

6.3. Estratégia adaptativa. População de jogadores

x = proporção dos jogadores que joga par quando escolheu *par*.

y = proporção dos jogadores que joga ímpar quando escolheu *par*.

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

$$X(t) = (x(t), y(t))$$

Estratégia adaptativa

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t) (G((1, 0), X(t)) - G(X(t), X(t))) \\ \frac{dy}{dt} = y(t) (G((0, 1), X(t)) - G(X(t), X(t))) \end{cases}$$

com $x(t) + y(t) = 1$, isto é:

$$x(t) + y(t) = 1 \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t) (x(t) - y(t) - (x(t) - y(t))^2) \\ \frac{dy}{dt} = y(t) (y(t) - x(t) - (x(t) - y(t))^2) \end{cases}$$

Como $y(t) = 1 - x(t)$ então $x(t) - y(t) = 2x(t) - 1$ e

$$\frac{dx}{dt} = 2x(t) (2x(t) - 1) (1 - x(t))$$

logo

se $x(t) > \frac{1}{2}$ então $\frac{dx}{dt} > 0$ e quando t cresce $x(t) \rightarrow 1$;

se $x(t) < \frac{1}{2}$ então $\frac{dx}{dt} < 0$ e quando t cresce $x(t) \rightarrow 0$;

Conclusão

No jogo de par ou ímpar, a estratégia adaptativa leva quase sempre a um equilíbrio de Nash estrito.

6.4. Jan-Ken-Po. Resultados

jogador	adversário		
	pedra	papel	tesoura
pedra	0	-1	1
papel	1	0	-1
tesoura	-1	1	0

Tática

$p = (p_1, p_2, p_3)$ com $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ probabilidades de escolha p_j .

Ganho

$$G(p, q) = p \cdot M \cdot q^T \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Equilíbrio de Nash

Se $p = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ então $M \cdot p^T = (0, 0, 0)^T$.

Para qualquer tática q o ganho é $G(q, p) = 0$.

Logo $p = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ é equilíbrio de Nash (não estrito).

População de jogadores

x = proporção dos jogadores que joga pedra.

y = proporção dos jogadores que joga papel.

z = proporção dos jogadores que joga tesoura.

$x, y, z \in [0, 1] \quad x + y + z = 1$

$X(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Estratégia adaptativa

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t) (G((1, 0, 0), X(t)) - G(X(t), X(t))) \\ \frac{dy}{dt} = y(t) (G((0, 1, 0), X(t)) - G(X(t), X(t))) \\ \frac{dz}{dt} = z(t) (G((0, 0, 1), X(t)) - G(X(t), X(t))) \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t) (z(t) - y(t)) \\ \frac{dy}{dt} = y(t) (x(t) - z(t)) \\ \frac{dz}{dt} = z(t) (z(t) - x(t)) \end{cases}$$

Lei de conservação

$f(x, y, z) = xyz \quad f(X(t))$ é constante.

Prova:

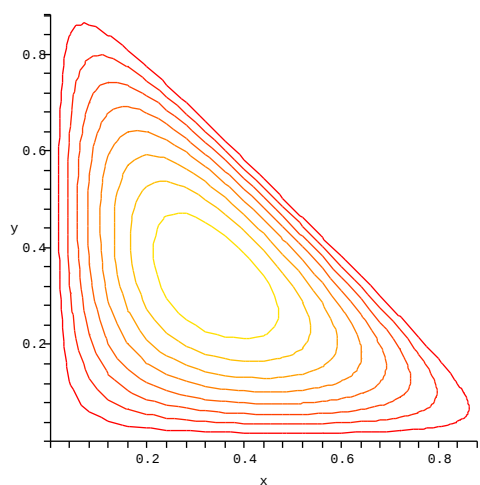
Segue de $\frac{d}{dt}f(X(t)) = \nabla f(X(t)) \cdot X'(t) = 0$, que é verdade porque

$$\nabla f(X(t)) = (y(t)z(t), x(t)z(t), x(t)y(t))$$

$$X'(t) = (x(t)(z(t) - y(t)), y(t)(x(t) - z(t)), z(t)(z(t) - x(t)))$$

Lei de conservação

$f(x, y, z) = xyz \quad f(X(t))$ é constante, $x + y + z = 1$, logo $z = 1 - x - y$. Curvas de nível de $f(x, y, 1 - x - y)$:



Bibliografia (e leitura adicional - aplicação à Biologia)
 Secção 4.9 de N. Britton “Essential Mathematical Biology”, editora Springer, 2003

7. CILINDRO DE AQUECIMENTO DE ÁGUA

7.1. **Resfriamento de água.** $T(t)$ temperatura da água T_E temperatura no exterior

$$\frac{d}{dt}(T(t) - T_E) = -\alpha(T(t) - T_E)$$

$\alpha > 0$ constante.

Nova variável

$$x(t) = (T(t) - T_E) \quad \frac{d}{dt}x(t) = -\alpha x(t)$$

Solução

$$x(t) = x(t_0)e^{-\alpha(t-t_0)} \quad T(t) = (T(t_0) - T_E)e^{-\alpha(t-t_0)} + T_E$$

$T(t)$ temperatura da água T_E temperatura no exterior $\alpha > 0$ constante.

$$\frac{d}{dt}(T(t) - T_E) = -\alpha(T(t) - T_E)$$

solução

$$T(t) = (T(t_0) - T_E)e^{-\alpha(t-t_0)} + T_E$$

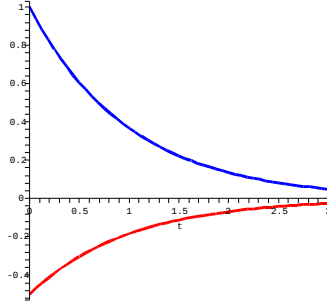
Conclusões:

- Se $T(t_0) > T_E$ então T decresce exponencialmente para T_E .
- Se $T(t_0) < T_E$ então T cresce exponencialmente para T_E .
- Se $T(t_0) = T_E$ então T é constante, igual a T_E .

Solução

$$x(t) = x(t_0)e^{-\alpha(t-t_0)} \quad T(t) = (T(t_0) - T_E)e^{-\alpha(t-t_0)} + T_E$$

Gráfico de $x(t)$:



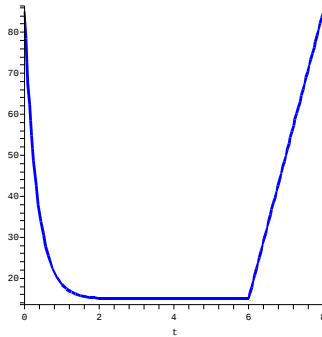
7.2. Aquecimento da água. Com a resistência ligada a temperatura $T(t)$ da água aumenta a uma taxa constante $k > 0$.

$$\frac{d}{dt}T(t) = k \quad T(t) = k(t - t_0) + T(t_0)$$

7.3. Cilindro desligado à noite. desligado em $t = 0$, ligado de $t = 6$ a $t = 8$

$$T(t) = \begin{cases} (T(0) - T_E)e^{-\alpha t} + T_E & \text{para } t \in [0, 6] \\ k(t - 6) + T(6) & \text{para } t \in [6, 8] \end{cases}$$

Gráfico de $x(t)$:



dados usados: $T(0) = 85^\circ C$, $T_E = 15^\circ C$, $\alpha = 3$, $k = 35$, $t \in [0, 8]$.

7.4. Termostato. Desliga a resistência quando a água atinge a temperatura T_{max} . Liga a resistência quando a água atinge a temperatura T_{min} .

Intervalo de tempo com a resistência desligada

Começando em t_0 com $T = T_{max}$ a resistência está desligada até o instante t_1 em que $T = T_{min}$

$$T(t_1) = (T_{max} - T_E)e^{-\alpha(t_1-t_0)} + T_E = T_{min}$$

logo a resistência está desligada durante τ_D tempo

$$\tau_D = t_1 - t_0 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{T_{max} - T_E}{T_{min} - T_E}$$

Intervalo de tempo com a resistência ligada

Começando em t_1 com $T = T_{min}$ a resistência está ligada até o instante t_2 em que $T = T_{max}$

$$T(t_2) = k(t_2 - t_1) + T_{min} = T_{max}$$

logo a resistência está ligada durante τ_L tempo

$$\tau_L = t_2 - t_1 = \frac{T_{max} - T_{min}}{k}$$

7.5. Cilindro ligado à noite. Liga e desliga ciclicamente. a duração de 1 ciclo é:

$$\tau_D + \tau_L = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{T_{max} - T_E}{T_{min} - T_E} + \frac{T_{max} - T_{min}}{k}$$

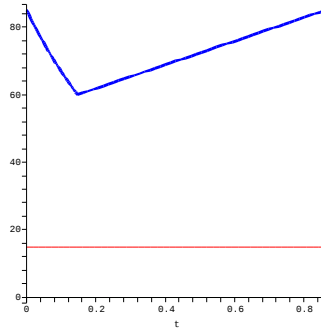


Gráfico de $T(t)$ durante 1 ciclo. Dados: $T_{max} = 85^\circ C$, $T_{min} = 60^\circ C$, $T_E = 15^\circ C$, $\alpha = 3$, $k = 35$.

Número de ciclos durante a noite (8 horas): $\frac{8}{\tau_D + \tau_L}$

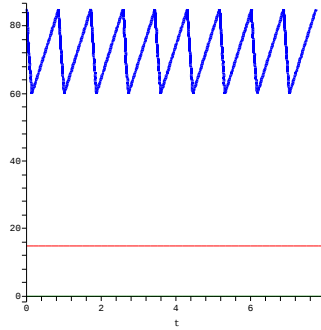


Gráfico de $T(t)$ durante 1 noite. Dados: $T_{max} = 85^\circ C$, $T_{min} = 60^\circ C$, $T_E = 15^\circ C$, $\alpha = 3$, $k = 35$.

Exemplo

Dados: $T_{max} = 85^\circ C$, $T_{min} = 60^\circ C$, $T_E = 15^\circ C$, $\alpha = 3$, $k = 35$.

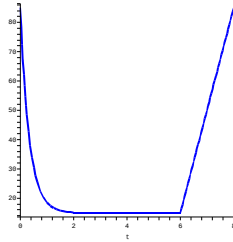
Cilindro ligado à noite

Duração de um ciclo $\approx 0,86h$. Tempo ligado durante um ciclo $\approx 0,71h$. Número de ciclos $9,28 \approx 9$

Tempo total com a resistência ligada: $\approx 9 \times 0,71h = 6,42h$.

Cilindro desligado à noite

Desligado em $t = 0$, ligado de $t = 6$ a $t = 8$



Conclusão

Com os dados inventados acima, seria muito vantajoso desligar o cilindro à noite. *O que acontece com dados verdadeiros?*

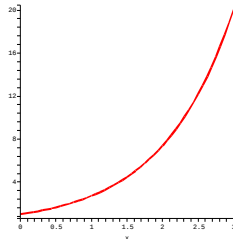
8. SISTEMAS DINÂMICOS: MODELOS PARA POPULAÇÕES, TEMPO CONTÍNUO

8.1. Lei de Malthus com tempo contínuo. $p(t)$ dimensão da população no instante $t \in \mathbf{R}$. α constante.

$$\frac{d}{dt}p(t) = \alpha p(t) \quad \Rightarrow \quad p(t) = p(t_0)e^{\alpha(t-t_0)}$$

Conclusão: se $\alpha > 0$ então a população cresce exponencialmente.

Gráfico de $p(t)$ com $p(0) > 0$:



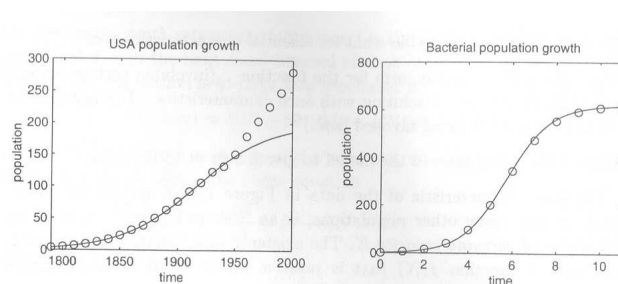
Observações em tempo discreto

$$p_0 = p(0) \quad p_1 = p(1) = p_0 e^{\alpha}$$

$$p_n = p(n) = p_0 e^{\alpha n} = p_0 (e^{\alpha})^n$$

Conclusão:

p_n segue uma lei de Malthus com tempo discreto, com taxa de crescimento e^{α} .



Evolução temporal da população dos EUA (à esquerda, com a curva logística) e de uma população de bactérias (direita).

(em: N. F. Britton, “Essential Mathematical Biology”)

8.2. Modelo de Velhurst. *Modelo mais realista*

Hipótese: as taxas de natalidade e mortalidade da população dependem da sua dimensão.

Modelo de Velhurst (logística)

$p(t)$ dimensão da população. $\alpha > 0$, $M > 0$ constantes.

$$\frac{d}{dt}p(t) = \alpha p(t) \left(1 - \frac{p(t)}{M}\right)$$

Soluções constantes (pontos de equilíbrio):

$$\frac{d}{dt}p(t) = 0 \text{ se e só se } \alpha p(t) \left(1 - \frac{p(t)}{M}\right) = 0, \text{ se e só se}$$

$$p(t) = 0 \text{ ou } p(t) = M \quad \text{Outras soluções?}$$

8.3. Existência e unicidade de soluções de equações diferenciais.

Teorema 14. *A equação diferencial com condição inicial:*

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad x(t_0) = x_0$$

tem solução única $x(t)$ definida para t próximo de t_0 sempre que $f :]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ for uma aplicação de classe C^1 definida em um intervalo aberto $]a, b[\subset \mathbf{R}$, desde que $x_0 \in]a, b[$.

Como sabemos que a solução existe, podemos estudar as suas propriedades sem calculá-la explicitamente.

8.4. Modelo de Velhurst.

$$p' = \frac{d}{dt}p = \alpha p \left(1 - \frac{p}{M}\right) = f(p)$$

Comportamento das soluções

- $f(p) = 0$ se e só se $p = 0$ ou $p = M$.
Logo, as únicas soluções constantes são $p(t) \equiv 0$ e $p(t) \equiv M$.
As demais soluções $p(t)$ são monótonas.
- Se $0 < p(0) < M$ então $0 < p(t) < M$ para todo t em que a solução estiver definida.
 $p(t)$ é crescente, porque $p' = f(p) > 0$.
- Se $p(0) > M$ então $p(t) > M$ para todo t em que a solução estiver definida.
 $p(t)$ é decrescente, porque $p' = f(p) < 0$.

8.5. Soluções de equações diferenciais.

Teorema 15. *Seja $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe C^1 . A solução única $x(t)$ da equação diferencial com condição inicial:*

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad x(t_0) = x_0$$

ou está definida para todo $t \in \mathbf{R}$ ou, se estiver definida para $t \in]a, b[$ e não for possível prolongá-la então

$$\lim_{t \rightarrow a^+} |x(t)| = \infty \quad \lim_{t \rightarrow b^-} |x(t)| = \infty$$

8.6. Comportamento das soluções do modelo de Velhurst.

$$p' = \frac{d}{dt}p = \alpha p \left(1 - \frac{p}{M}\right) = f(p)$$

Comportamento das soluções

- Todas as soluções $p(t)$ estão definidas para todo $t \in \mathbf{R}$.
- Se $0 < p(0) < M$ então

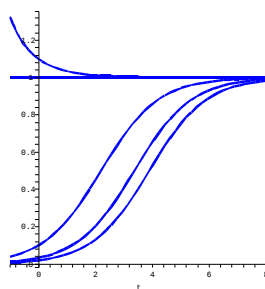
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} p(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = M$$

- Se $p(0) > M$ então

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} p(t) = +\infty \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = M$$

- O ponto de equilíbrio $p(t) \equiv M$ é *atrator*.

Soluções da equação de Velhurst para 5 condições iniciais



Conclusões do modelo

- Se $p(t_0) = 0$ então $p(t) \equiv 0$. O modelo não prevê geração espontânea!
- Se $p(t_0) > 0$ então $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = M$.

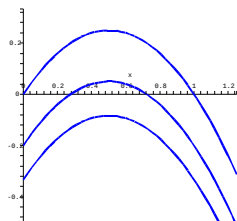
O ponto de equilíbrio atrator $p(t) \equiv M$ é chamado a *capacidade máxima do meio*.

8.7. Modelo de Velhurst adaptado para colheita.

$$p' = \frac{d}{dt}p = \alpha p \left(1 - \frac{p}{M}\right) - u(t, p) = f(p, t)$$

$u(t, p) > 0$ taxa de colheita.

8.8. **primeiro modelo: taxa de colheita constante.** Gráfico de $f(p, t)$ para 3 valores diferentes de u :



Análise do modelo

Para $u > 0$ pequeno:

- Dois pontos de equilíbrio p_1 e p_2 com $0 < p_1 < p_2 < M$.
- $p(t) \equiv p_2$ é atrator.

Conclusões

Para $u > 0$ pequeno a capacidade máxima do meio diminui.

O comportamento das soluções não se altera significativamente.

Crítica:

Quando $0 < p(t_0) < p_1$ a população tende para menos infinito!

Análise do modelo

Para $u > 0$ grande:

- Não há pontos de equilíbrio.
- $p(t)$ decresce sempre.

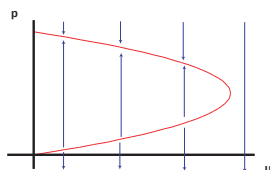
Conclusão

Para $u > 0$ grande o meio deixa de ser capaz de repor a população.

Crítica:

A população tende para menos infinito!

Resumo da dinâmica para valores diferentes de u :



Bibliografia (e leitura adicional, outras formas para a taxa de colheita):

Case Study 2-2; McClamroch, N.H., State Models of Dynamical Systems

Cap. 2 Sec. 2.4; Burghes, D.N. e Borrie, M.S.; Modelling with Differential Equations

9. CURVAS DE NÍVEL — PREDADOR-PRESA

Lei de Malthus com tempo contínuo

$p(t)$ dimensão de uma população no instante $t \in \mathbf{R}$.

$$\frac{d}{dt}p(t) = \alpha p(t)$$

com α constante.

Solução: $p(t) = p(0)e^{\alpha t}$

Conclusão: a população cresce exponencialmente.

Comparação com o modelo com tempo discreto

Para $t = n$ inteiro:

$$p(n) = p(0)e^{\alpha n} = p(0)(e^\alpha)^n$$

o que corresponde a uma lei discreta de Malthus:

$$p(n+1) = e^\alpha p(n).$$

9.1. Populações de predadores e presas. Dados sobre a população de peixes do Mar Adriático:

porcentagem de predadores (tubarões, raias) na população total pescada:

Durante a primeira guerra mundial (1914–18)

ano	1914	1915	1916	1917	1918
predadores	11.9%	21.4%	22.1%	21.2%	36.4%

A seguir à primeira guerra mundial

ano	1919	1920	1921	1922	1923
predadores	27.3%	16.0%	15.9%	14.8%	10.7%

Observe que houve um aumento na população de predadores nos anos de guerra, em que houve muito menos pesca.

9.2. Equação de Volterra (1926). $x(t)$ população de presas $y(t)$ população de predadores

$$(V) \begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = x(t)(a - by(t)) \\ \frac{dy}{dt}(t) = y(t)(-c + dx(t)) \end{cases}$$

com $a, b, c, d > 0$.

Relação com a lei de Malthus

taxa de crescimento Malthusiano da presa: $\alpha = (a - by(t))$

a é a taxa de crescimento da presa na ausência do predador;

$by(t)$ é a taxa de mortalidade da presa devida aos predadores; taxa de crescimento Malthusiano do predador: $\alpha = (-c + dx(t))$

c é a taxa de mortalidade do predador na ausência da presa;

$dx(t)$ é a taxa de crescimento do predador devida à presença de presas (comida).

Estados de equilíbrio

$$\frac{dx}{dt}(t) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt}(t) = 0 \quad \text{logo} \quad (x, y) = (0, 0) \quad \text{ou} \quad (x, y) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$$

Teorema 16. *A função*

$$f(x, y) = x^c y^a e^{-(dx+by)}$$

é constante sobre a curva $(x(t), y(t))$ cujas coordenadas são soluções da equação de Volterra (V).

Prova

Basta provar que

$$\frac{d}{dt} (f(x(t), y(t))) = 0 \quad \text{para} \quad f(x, y) = x^c y^a e^{-(dx+by)}.$$

Seja $C(t) = (x(t), y(t))$ então sabemos que

$$\frac{d}{dt} (f(C(t))) = \nabla f(C(t)) \cdot C'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x^{c-1} y^a e^{-(dx+by)} (c - dx)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^c y^{a-1} e^{-(dx+by)} (a - by).$$

Por outro lado, como $C(t) = (x(t), y(t))$ satisfaz a equação de Volterra (V) então

$$C'(t) = (x(t)(a - by(t)), y(t)(-c + dx(t)))$$

logo

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} = x^c y^a e^{-(dx+by)} (c - dx) (a - by)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = x^c y^a e^{-(dx+by)} (a - by) (-c + dx) = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt}.$$

Conclusão $\frac{d}{dt} (f(x(t), y(t))) = 0$ como queríamos.

Aplicação do Teorema

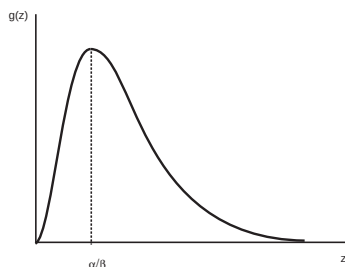
As curvas que representam soluções da equação de Volterra (V) estão contidas em curvas de nível de

$$f(x, y) = x^c y^a e^{-(dx+by)} = (x^c e^{-dx}) (y^a e^{-by}).$$

Para desenhar as curvas de nível, estudamos antes a função $g(z) = z^\alpha e^{-\beta z}$ com $\alpha, \beta > 0$:

- $g(0) = 0$ e $\lim_{z \rightarrow +\infty} g(z) = 0$;
- o único ponto crítico de g é $z = \frac{\alpha}{\beta}$ que é um ponto de máximo global.

Gráfico de $g(z) = z^\alpha e^{-\beta z}$ com $\alpha, \beta > 0$



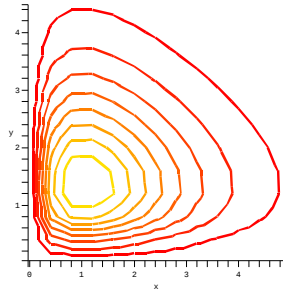
A função $f(x, y) = x^c y^a e^{-(dx+by)} = (x^c e^{-dx}) (y^a e^{-by})$ com $a, b, c, d > 0$ satisfaz:

- $f(0, y) = f(x, 0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0$;
- o único ponto crítico de f é $(x, y) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ que é um ponto de máximo global;
- conjuntos de nível no primeiro quadrante: curvas fechadas em torno do ponto crítico.

À esquerda: Gráfico para (x, y) no primeiro quadrante de $f(x, y) = x^c y^a e^{-(dx+by)}$ com $a, b, c, d > 0$ visto a partir da origem e à direita indicando as linhas de altura constante.



Curvas de nível no primeiro quadrante de $f(x, y) = x^c y^a e^{-(dx+by)}$.



Teorema 17. Se $x(t)$ e $y(t)$ forem soluções da equação de Volterra (V) com período P então o valor médio de $x(t)$ é $\bar{x} = \frac{c}{d}$ e o valor médio de $y(t)$ é $\bar{y} = \frac{a}{b}$, isto é:

$$\bar{x} = \frac{1}{P} \int_0^P x(t) dt = \frac{c}{d} \quad e \quad \bar{y} = \frac{1}{P} \int_0^P y(t) dt = \frac{a}{b}.$$

Prova
Como $\frac{dx}{dt}(t) = x'(t) = x(t)(a - by(t))$, então

$$\frac{1}{P} \int_0^P \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \frac{1}{P} \int_0^P (a - by(t)) dt.$$

Como por hipótese $x(P) = x(0)$ então

$$\int_0^P \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \ln x(P) - \ln x(0) = 0,$$

$$\frac{1}{P} \int_0^P (a - by(t)) dt = 0 \implies \frac{1}{P} \int_0^P a dt = \frac{b}{P} \int_0^P y(t) dt = 0$$

e portanto $\bar{y} = \frac{a}{b}$ como queríamos. A prova para $\bar{x}$ é análoga.

Modelo de Volterra:

$x(t)$ população de presas $y(t)$ população de predadores.

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)(a - by(t)) \\ y'(t) &= y(t)(-c + dx(t)) \end{cases} \quad \bar{x} = \frac{c}{d}, \quad \bar{y} = \frac{a}{b}$$

Efeito da pesca:

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)((a - \varepsilon) - by(t)) \\ y'(t) &= y(t)(-(c + \varepsilon) + dx(t)) \end{cases} \quad \text{com } \varepsilon > 0 \quad \bar{x} = \frac{c + \varepsilon}{d}, \quad \bar{y} = \frac{a - \varepsilon}{b}$$

Conclusão: com a pesca

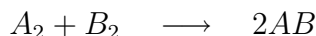
há mais presas, há menos predadores. *a pesca favorece a presa!*

Bibliografia:

Secção 4.10 de M. Braun, Differential Equations and their Applications

10. CINÉTICA DE REAÇÕES QUÍMICAS

Reação química



Exemplo



Cinética

$a = [A_2]$ concentração de A_2 $a(0) = a_0 > 0$

$b = [B_2]$ concentração de B_2 $b(0) = b_0 > 0$

$x = [AB]$ concentração de AB $x(0) = x_0 \geq 0$.

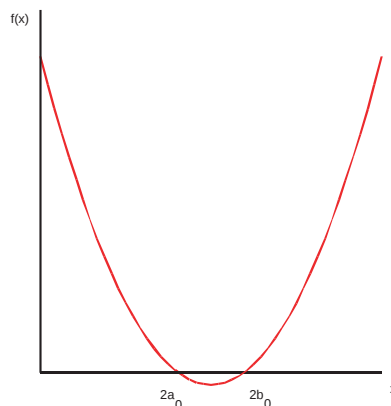
$$\frac{dx}{dt} = ka(t)b(t) \quad k > 0 \quad \text{constante}$$

com

$$a(t) = a_0 - \frac{x(t)}{2} \quad b(t) = b_0 - \frac{x(t)}{2}$$

$$\frac{dx}{dt} = k \left(a_0 - \frac{x}{2} \right) \left(b_0 - \frac{x}{2} \right) = f(x) \quad k > 0 \quad a_0 \geq 0 \quad b_0 \geq 0.$$

Hipótese adicional: $0 < a_0 < b_0$. Gráfico de $f(x)$:



10.1. Existência e unicidade de soluções de equações diferenciais.

Teorema 18. *A equação diferencial com condição inicial:*

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad x(t_0) = x_0$$

tem solução única $x(t)$ definida para t próximo de t_0 sempre que $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ for uma aplicação de classe C^1 .

Esta solução ou está definida para todo $t \in \mathbf{R}$ ou, se estiver definida para $t \in]a, b[$ e não for possível prolongá-la então

$$\lim_{t \rightarrow a^+} |x(t)| = \infty \quad \lim_{t \rightarrow b^-} |x(t)| = \infty$$

Cinética de reações — comportamento das soluções

- $f(x) = 0$ se e só se $x = 0$ ou $x = 2a_0$ ou $x = 2b_0$.
Soluções constantes (estados de equilíbrio) $x(t) \equiv 2a_0$ e $x(t) \equiv 2b_0$.

10.2. Comportamento das soluções de equações diferenciais.

Teorema 19. *As soluções da equação diferencial com condição inicial:*

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad x(t_0) = x_0$$

com $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ uma aplicação de classe C^1 satisfazem:

- Se $f(x_0) = 0$ então $x(t) \equiv x_0$.
- Se $f(x_0) > 0$ então $f(x(t)) > 0$ para todo t e $x(t)$ é crescente.
- Se $f(x_0) < 0$ então $f(x(t)) < 0$ para todo t e $x(t)$ é decrescente.

Cinética de reações — comportamento das soluções

- As soluções $x(t)$ que não são constantes são monótonas:
 - crescentes se $x(0) < 2a_0$ ou se $x(0) > 2b_0$.
 - decrescentes se $2a_0 < x(0) < 2b_0$

10.3. Comportamento assintótico das soluções de equações diferenciais.

Teorema 20. *Seja $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ uma aplicação de classe C^1 . Se uma solução $x(t)$ da equação diferencial:*

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

estiver definida para todo $t > t_0$ e se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = L \in \mathbf{R}$$

então $f(L) = 0$ ou seja, $\tilde{x}(t) \equiv L$ é também solução da mesma equação diferencial.

Cinética de reações — comportamento das soluções

- $f(x) = 0$ se e só se $x = 0$ ou $x = 2a_0$ ou $x = 2b_0$.
Soluções constantes (estados de equilíbrio) $x(t) \equiv 2a_0$ e $x(t) \equiv 2b_0$.
- Se $x(0) < 2a_0$ então $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 2a_0$
- Se $2a_0 < x(0) < 2b_0$ então $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 2a_0$.

10.4. Estados de equilíbrio.

Teorema 21. *Seja $a \in \mathbf{R}$ um estado de equilíbrio da equação diferencial:*

$$(*) \quad \frac{dx}{dt} = f(x)$$

com $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ uma aplicação de classe C^1 .

- Se $\frac{df}{dx}(a) < 0$ então para x_0 próximo de a as soluções $x(t)$ de $(*)$ com $x(t_0) = x_0$ satisfazem $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = a$ (a é atrator).
- Se $\frac{df}{dx}(a) > 0$ então para x_0 próximo de a as soluções $x(t)$ de $(*)$ com $x(t_0) = x_0$ satisfazem $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = a$ (a é repulsor).

Cinética de reações — comportamento das soluções

- $f(x) = 0$ se e só se $x = 0$ ou $x = 2a_0$ ou $x = 2b_0$.
Soluções constantes (estados de equilíbrio) $x(t) \equiv 2a_0$ e $x(t) \equiv 2b_0$.
- $2a_0$ é um estado de equilíbrio atrator.
- $2b_0$ é um estado de equilíbrio repulsor.

Previsões do modelo

- Se a concentração inicial do produto $[AB]$ for exatamente o dobro da de algum dos reagentes, não há reação.
- A concentração do produto $[AB]$ aumenta se inicialmente for menor que o dobro da concentração do reagente menos concentrado (A_2), mas não pode ultrapassar o dobro da concentração do reagente A_2 . Se $x(0) = 0$ isto é uma previsão razoável: $x(t) = 2a_0$ quereria dizer que todo o reagente inicial tinha sido consumido na reação, dado que uma molécula de A_2 dá origem a duas moléculas de AB .

- Se a concentração inicial do produto $[AB]$ estiver entre $2a_0$ e $2b_0$ então $x(t)$ diminui - logo $a(t)$ aumenta. Nessa situação haveria inicialmente mais átomos de A em moléculas de AB do que em moléculas de A_2 . O modelo prevê que reação se dê em sentido inverso.
- A concentração do produto $[AB]$ aumenta se inicialmente for maior do que o dobro das concentrações dos dois reagentes. Esta não é uma previsão razoável. Conclui-se que o modelo só é aplicável quando a concentração inicial do produto for pequena.

10.5. Em Scilab.

```
-->function dxdt=quimica(t,x);
// equacao da reacao quimica em SCILAB
-->  a=2; b=4;k=1.5;

dxdt=[ k*(a-x)*(b-x)];
endfunction

save('quimica.dat',quimica) // guarda a funcao

//para resolver
clear          // limpa a janela
t=0:0.01:30;   // tempos em que quero a solucao
y0=1           // condi\ca o inicial
t0=0           // tempo inicial

load('quimica.dat','quimica') // vai buscar a funcao

y = ode(y0,t0,t,quimica);      // resolve numericamente
plot(t,y) // faz o grafico
```

Bibliografia: Cap. 9 Seções 9.3 e 9.1; P. Lax, S. Burstein, A. Lax, Calculus with Applications and Computing

11. EQUAÇÕES COM DUAS ESCALAS TEMPORAIS

Considere as equações diferenciais:

$$\begin{cases} \varepsilon x' = f(x, y) & \text{equação rápida} & f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ y' = g(x, y) & \text{equação lenta} & g: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \end{cases}$$

As duas equações podem ser analisadas separadamente por causa da diferença de escalas de tempo.

Para $\varepsilon > 0$ pequeno:

- Quando $f(x, y)$ não está perto de 0, então

$$|x'(t)| = \frac{1}{\varepsilon} |f(x, y)| \ll |y'(t)| = |g(x, y)|$$

- Uma boa aproximação é tomar $y(t) \approx \text{constante}$, e estudar as soluções $x(t)$ de:

$$x'(t) = \frac{1}{\varepsilon} f(x, y)$$

que têm o mesmo comportamento qualitativo que as soluções de:

$$x'(t) = f(x, y)$$

- Obtemos uma equação diferencial diferente para cada $y \in \mathbf{R}$.

Exemplo 1

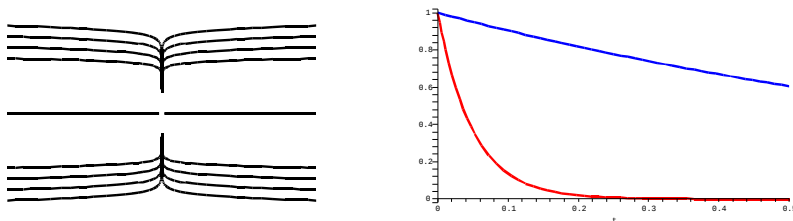
$$\begin{cases} \varepsilon x' = -x & \text{equação rápida} \\ y' = -y & \text{equação lenta} \end{cases}$$

Soluções:

$$\begin{cases} x(t) = x(0)e^{-\frac{t}{\varepsilon}} & \text{solução da equação rápida} \\ y(t) = y(0)e^{-t} & \text{solução da equação lenta} \end{cases}$$

Quando $t \rightarrow +\infty$ então $x(t) \rightarrow 0$ e $y(t) \rightarrow 0$, mas $x(t)$ tende para zero muito mais depressa do que $y(t)$.

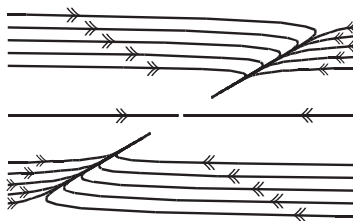
Gráfico das soluções $(x(t), y(t))$ com $\varepsilon = 1/20$, como curvas (à esquerda) e como função do tempo — $x(t)$ (vermelho) e $y(t)$ (azul)



Exemplo 2

$$\begin{cases} \varepsilon x' = -(x - y) & \text{equação rápida} \\ y' = -y & \text{equação lenta} \end{cases}$$

Gráfico das soluções $(x(t), y(t))$ com $\varepsilon = 1/20$, com orientação



11.1. Equação de camada.

$$\begin{cases} \varepsilon x' = f(x, y) & \text{equação rápida} \\ y' = g(x, y) & \text{equação lenta} \end{cases}$$

Para $0 < \varepsilon \ll 1$ analisamos primeiro a *equação de camada*:

$$x' = f(x, y) \quad \text{com } y \text{ constante}$$

- $x(t)$ cresce quando $f(x, y) > 0$.
- $x(t)$ decresce quando $f(x, y) < 0$.
- x_* é um ponto de equilíbrio da equação de camada quando $f(x_*, y) = 0$
- x_* é atrator se $\frac{\partial f}{\partial x}(x_*, y) < 0$ x_* é repulsor se $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$;

Exemplo 2

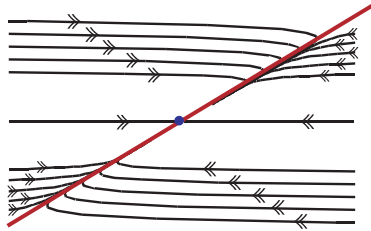
$$\begin{cases} \varepsilon x' &= -(x - y) = f(x, y) && \text{equação rápida} \\ y' &= -y && \text{equação lenta} \end{cases}$$

Para $0 < \varepsilon \ll 1$ analisamos primeiro a equação de camada:

$$x' = f(x, y) = -(x - y) \quad \text{com } y \text{ constante}$$

- $x(t)$ cresce quando $f(x, y) > 0$ isto é, quando $x < y$.
- $x(t)$ decresce quando $f(x, y) < 0$ isto é, quando $x > y$.
- x_* é um ponto de equilíbrio da equação de camada quando $f(x_*, y) = 0$ isto é, quando $x_* = y$.
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_*, y) = -1 < 0$ logo $x_* = y$ é atrator.

As soluções da equação de camada se aproximam da reta $x = y$, isto é, $x_* = y$ é um ponto de equilíbrio atrator da equação de camada.



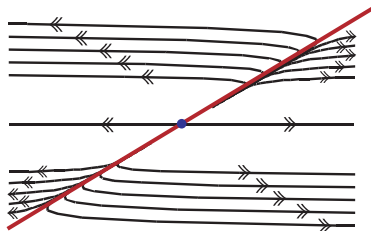
Exemplo 3

$$\begin{cases} \varepsilon x' &= (x - y) = f(x, y) && \text{equação rápida} \\ y' &= y && \text{equação lenta} \end{cases}$$

Para $0 < \varepsilon \ll 1$ analisamos primeiro a equação de camada:

$$x' = f(x, y) = (x - y) \quad \text{com } y \text{ constante}$$

- $x(t)$ cresce quando $f(x, y) > 0$ isto é, quando $x > y$.
- $x(t)$ decresce quando $f(x, y) < 0$ isto é, quando $x < y$.
- x_* é um ponto de equilíbrio da equação de camada quando $f(x_*, y) = 0$ isto é, quando $x_* = y$.
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_*, y) = 1 > 0$ logo $x_* = y$ é um ponto de equilíbrio repulsor da equação de camada.



11.2. Dinâmica na variedade lenta. Definição

A variedade lenta L em um modelo com duas escalas de tempo:

$$\begin{cases} \varepsilon x' = f(x, y) & \text{equação rápida} \\ y' = g(x, y) & \text{equação lenta} \end{cases}$$

é o conjunto dos pontos em que $f = 0$, i.e.

$$L = \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$$

A equação de camada *não* é uma boa aproximação perto da variedade lenta, onde $f(x, y) \approx 0$. Perto da variedade lenta a dinâmica segue a equação lenta.

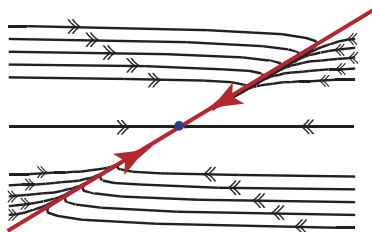
Exemplo 2

$$\begin{cases} \varepsilon x' = -(x - y) = f(x, y) & \text{equação rápida} \\ y' = -y & \text{equação lenta} \end{cases}$$

$$\text{Variedade lenta } L = \{(x, y) : f(x, y) = 0\} = \{(x, y) : x = y\}$$

Dinâmica na variedade lenta

- Se $y > 0$ então $y' < 0$ logo $y(t)$ decresce.
- Se $y < 0$ então $y' > 0$ logo $y(t)$ cresce.
- $y = 0$ é o único ponto de equilíbrio da equação lenta em L e é atrator.



Exemplo 4

$$\begin{cases} \varepsilon x' = -(x - y) = f(x, y) & \text{equação rápida} \\ y' = y & \text{equação lenta} \end{cases}$$

Dinâmica da equação de camada

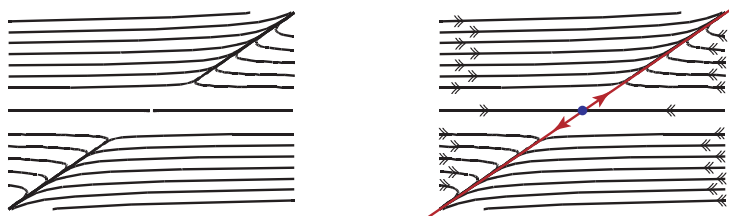
$x' = -(x - y)$ tem um único ponto de equilíbrio, $x_* = y$, atrator.

$$\text{Variedade lenta } L = \{(x, y) : x = y\}$$

Dinâmica na variedade lenta

- Se $y > 0$ então $y' > 0$ logo $y(t)$ cresce.
- Se $y < 0$ então $y' < 0$ logo $y(t)$ decresce.
- $y = 0$ é o único ponto de equilíbrio da equação lenta em L e é repulsor.

Gráfico das soluções $(x(t), y(t))$ para $\varepsilon = 1/20$:



Exemplo 5

$$\begin{cases} \varepsilon x' &= -x - y \\ y' &= -x^2 y \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{equação rápida} \\ \text{equação lenta} \end{array}$$

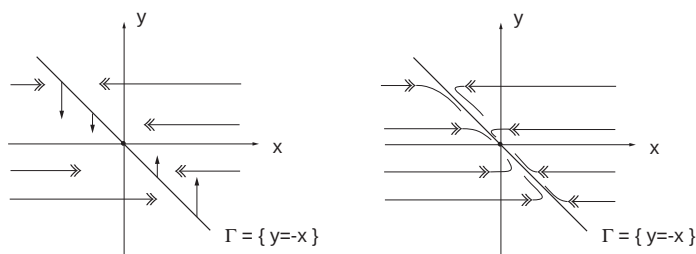
Dinâmica da equação de camada $x' = -x - y$ tem um único ponto de equilíbrio, $x_* = -y$, atrator.

Variedade lenta $\Gamma = \{(x, y) : x = -y\}$

Dinâmica na variedade lenta

- Se $y > 0$ então $y' = -x^2 y < 0$ logo $y(t)$ decresce.
- Se $y < 0$ então $y' = -x^2 y > 0$ logo $y(t)$ cresce.
- $y = 0$ é o único ponto de equilíbrio da equação lenta em Γ e é atrator.

Soluções $(x(t), y(t))$:



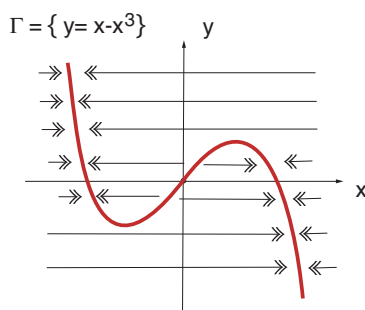
Exemplo 6

$$\begin{cases} \varepsilon x' &= x - x^3 - y \\ y' &= x \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{equação rápida} \\ \text{equação lenta} \end{array} \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

Dinâmica da equação de camada $x' = x - x^3 - y$

pontos de equilíbrio x_* com $x_* - x_*^3 = \varphi(x_*) = y$.

$\varphi(x_*)$ tem dois pontos críticos em $x_* = \pm 1/\sqrt{3}$, $\varphi(x_*) = \pm 2/\sqrt{3}$.



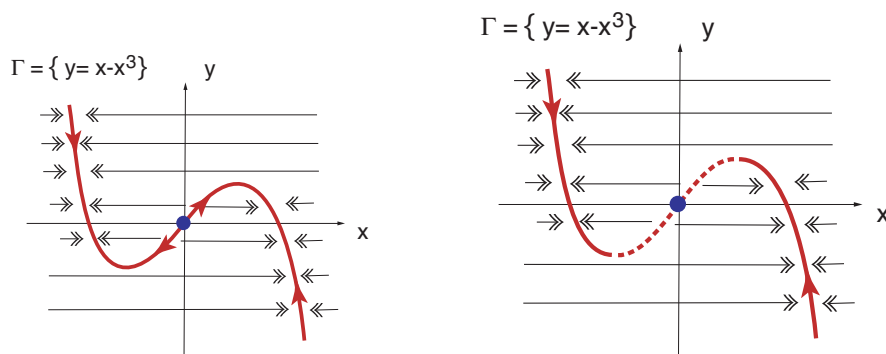
- Se $y < -2/\sqrt{3}$ ou $2/\sqrt{3} < y$
a equação de camada tem um único ponto de equilíbrio x_* , atrator.
- Se $-2/\sqrt{3} < y < 2/\sqrt{3}$
a equação de camada tem 3 pontos de equilíbrio,
dois atratores e um repulsor.

Variedade lenta $\Gamma = \{(x, y) : y = \varphi(x) = x - x^3\}$

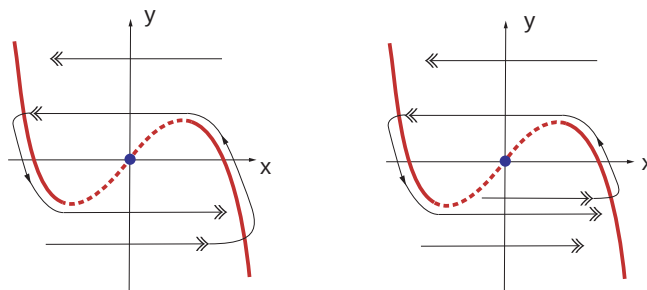
Dinâmica na variedade lenta

- Se $x > 0$ então $y' = x > 0$ logo $y(t)$ cresce.
- Se $x < 0$ então $y' = x < 0$ logo $y(t)$ decresce.
- $(x, y) = (0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio da equação lenta em Γ e é repulsor.

Dinâmica na variedade lenta, parte repulsora a tracejado



Dinâmica global



11.3. Modelo de Zeeman para o coração (1973).

$$\begin{cases} \varepsilon x' = x - x^3 - y & \text{equação rápida } 0 < \varepsilon \ll 1 \\ y' = x - 1 & \text{equação lenta} \end{cases}$$

Identificação das variáveis

x comprimento da fibra muscular

y estímulo, marca-passo.

Estados do coração

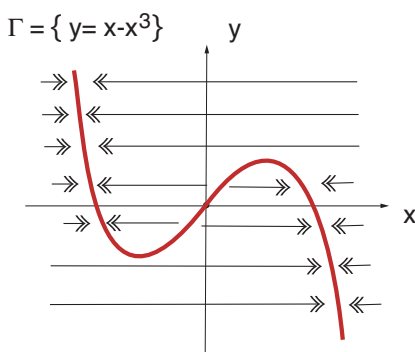
- equilíbrio — diástole, fibras relaxadas;
- ação — sístole, contração rápida das fibras.

Dinâmica global e relação com o coração

- Pequena perturbação — retorno lento ao equilíbrio.
- Limiar para desencadear a ação.
- Ação rápida seguida de retorno rápido ao equilíbrio.

Dinâmica da equação de camada $x' = x - x^3 - y$

- 1 ponto de equilíbrio atrator se $y < -2/\sqrt{3}$ ou $2/\sqrt{3} < y$
- pontos de equilíbrio, dois deles atratores, se $-2/\sqrt{3} < y < 2/\sqrt{3}$

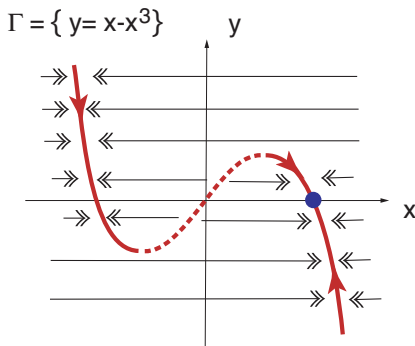


Variedade lenta $\Gamma = \{(x, y) : y = \varphi(x) = x - x^3\}$

Dinâmica na variedade lenta

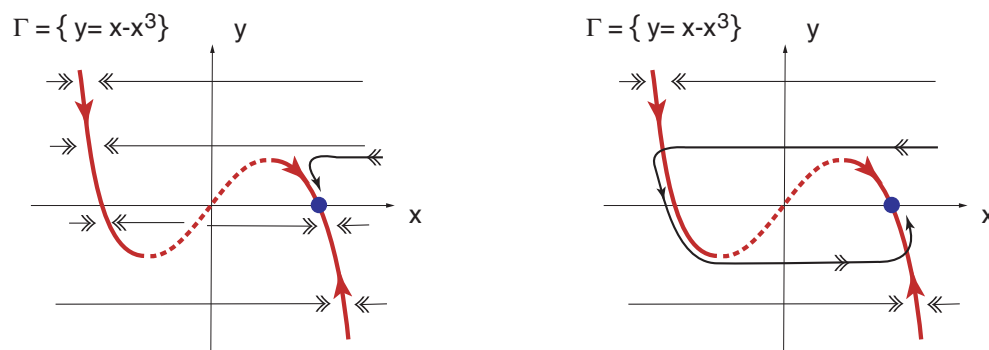
- Se $x > 1$ então $y' = x - 1 > 0$ logo $y(t)$ cresce.
- Se $x < -1$ então $y' = x - 1 < 0$ logo $y(t)$ decresce.
- $(x, y) = (1, 0)$ é o único ponto de equilíbrio da equação lenta em Γ e é atrator.

Dinâmica na variedade lenta



Dinâmica global

Pequena perturbação, retorno lento ao equilíbrio — Perturbação grande, ação e retorno rápido ao equilíbrio



O limiar para desencadear a ação é a altura do máximo local da variedade lenta.

Bibliografia: Arrowsmith e Place - Ordinary Differential Equations, Caps 4 e 5.