

Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais
notas de aula
2008/2009

J. A. Basto Gonçalves, I. S. Labouriau

Índice

Capítulo 1. Resultados gerais	5
1. Sistemas dinâmicos e campos de vectores	5
2. Mudanças de coordenadas	6
3. Rectificação do fluxo	8
4. Prolongamento de soluções	13
5. Construção do difeomorfismo rectificador	14
6. Equações diferenciais não autónomas	15
7. Estrutura das órbitas maximais	17
Capítulo 2. Estabilidade de pontos de equilíbrio	21
1. Integrais primeiros	21
2. Sistemas conservativos	22
3. Definição de estabilidade	25
4. Métodos de Liapunov	26
5. Equações lineares	28
6. Equações não lineares	30
7. Comportamento assintótico	32
8. Comparação de um campo de vectores com a sua linearização	33
Capítulo 3. Órbitas periódicas	35
1. Secções locais	35
2. Campos de Vectores no Plano	36
Capítulo 4. Exemplos	41
1. Equações de Liénard e van der Pol	41
2. Modelos predador-presa	45
Capítulo 5. Métodos perturbativos	51
1. Aplicação do teorema da derivabilidade em ordem aos parâmetros	51
2. Perturbação singular	53
3. Exemplos	54
4. Equação rápida	55
5. Teoria de Tikhonov	57
Capítulo 6. Órbitas periódicas, bifurcação e estabilidade	61
1. Bifurcação de Hopf	61
2. Estabilidade de órbitas periódicas	65
Capítulo 7. Persistência de pontos de equilíbrio e órbitas periódicas	69

CAPÍTULO 1

Resultados gerais

1. Sistemas dinâmicos e campos de vectores

Sistema dinâmico é um modelo matemático de um processo cuja evolução passada e futura depende unicamente do estado presente: mais precisamente, um *sistema dinâmico* é um par (U, F) tal que:

- (1) U é um aberto de $\mathbf{R}^n$, chamado o *espaço de fases*.
- (2) $F : \mathbf{R} \times U \longrightarrow U$ é uma aplicação C^k , $k \geq 1$.
- (3) Cada uma das aplicações $F_t = F(t, \cdot)$, satisfaz $F_0 = id_U$, $F_{t+s} = F_t \circ F_s = F_s \circ F_t$.

A aplicação F é chamada *fluxo*. Cada uma das aplicações F_t é um difeomorfismo de classe C^k , porque tem uma inversa C^k dada por $(F_t)^{-1} = F_{-t}$, F é também chamada *grupo a um parâmetro de difeomorfismos*.

A *trajectória* de $x \in U$ para o fluxo F é a aplicação $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow U$ definida por $\varphi(t) = F(t, x)$ e a *órbita* de x é a imagem de φ , uma curva parametrizada em U . As órbitas de um sistema dinâmico são representadas como curvas orientadas no sentido de t crescente.

Um *ponto fixo* de F (ou do sistema dinâmico) é um ponto $x \in U$ tal que $F(t, x) = x$, $\forall t \in \mathbf{R}$; x também se diz *ponto de equilíbrio*.

O *espaço de fases alargado* é $\mathbf{R} \times U$: o gráfico de φ (contido em $\mathbf{R} \times U$) designa-se por *curva integral*.

EXEMPLO 1.1. A aplicação que roda de um ângulo t cada ponto do plano define um sistema dinâmico cujo espaço de fase é $U = \mathbf{R}^2$, com fluxo dado por

$$F(t, (x_1, x_2)) = (x_1 \cos t - x_2 \sin t, x_1 \sin t + x_2 \cos t)$$

ou seja,

$$F(t, (x_1, x_2))^T = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

A órbita da origem é a própria origem, que é um ponto fixo de $(\mathbf{R}^2, F)$. A órbita de qualquer outro ponto é uma circunferência orientada no sentido anti-horário, e a sua curva integral é uma hélice no espaço de fase alargado, $\mathbf{R}^3$.

O *espaço tangente a U no ponto $x \in U$* é o conjunto dos vectores (em $\mathbf{R}^n$) aplicados em x , designado por $T_x U$; o *espaço tangente* é $TU = \bigcup_{x \in U} T_x U \cong U \times \mathbf{R}^n$. Um vector tangente tem $2n$ coordenadas: as primeiras n indicam o ponto da aplicação, as outras n , as componentes do vector.

Um *campo de vectores* C^k é uma aplicação $U \longrightarrow TU$ da forma $x \mapsto (x, v(x))$ onde v é C^k . Assim, um campo de vectores associa a cada ponto um vector aplicado nesse ponto. Habitualmente identifica-se o campo de vectores com a aplicação v .

A cada sistema dinâmico está associado um campo de vectores $v_F(x)$, definido como a velocidade do movimento de x :

$$v_F(x) = \left. \frac{d}{dt} F_t(x) \right|_{t=0} = \frac{\partial F}{\partial t}(0, x) = \frac{d\varphi}{dt}(0).$$

Por exemplo, o campo de vectores $(x, v_F(x))$ associado ao sistema dinâmico do exemplo 1.1 é $v_F(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$.

Um *ponto singular* ou *ponto crítico* de um campo de vectores v em U é um ponto $x \in U$ em que $v(x) = 0$. Os pontos de equilíbrio de F são pontos singulares do campo de vectores v_F associado.

Um campo de vectores v , de classe C^k ($k \geq 1$) em U define uma *equação diferencial* $\dot{x} = v(x)$ no aberto $U \subset \mathbf{R}^n$, usando a notação $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. A cada sistema dinâmico (U, F) , em que F é uma aplicação C^k com $k \geq 2$, corresponde a equação diferencial $\dot{x} = v_F(x)$.

Uma *solução* da equação $\dot{x} = v(x)$ em U é uma função $\varphi : I \rightarrow U$, onde I é um intervalo aberto de $\mathbf{R}$, tal que $\dot{\varphi}(t) = v(\varphi(t))$, $\forall t \in I$; a *condição inicial* (t_0, x_0) é satisfeita por φ quando $t_0 \in I$ e $\varphi(t_0) = x_0$.

A imagem de uma solução é uma *órbita* da equação diferencial. No caso especial de x_0 ser um ponto singular de v , então a aplicação constante $\varphi(t) \equiv x_0$ é uma solução da equação diferencial satisfazendo a condição inicial (t_0, x_0) e φ é designada por *solução de equilíbrio* ou *solução estacionária*. Cada uma das órbitas de $\dot{x} = v(x)$ é uma curva em $\mathbf{R}^n$ cujo vector velocidade no ponto $\varphi(t)$ é valor $v(\varphi(t))$ do campo de vectores neste ponto.

TEOREMA 1.1. *Dado um sistema dinâmico (U, F) e $x_0 \in U$, a trajectória φ de x_0 é uma solução de $\dot{x} = v_F(x)$ satisfazendo a condição inicial $(0, x_0)$.*

Demonstração:

A aplicação $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow U$, $\varphi(t) = F(t, x_0)$ é de classe C^1 , e $\varphi(0) = x_0$. Resta verificar que satisfaz a equação diferencial, ou seja que para todo $t \in \mathbf{R}$ tem-se $\left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t=t} = v_F(\varphi(t))$. Como

$$\left. \frac{d}{d\tau} F_\tau(F_t(x_0)) \right|_{\tau=0} = F_t(x_0) = \varphi(t) \quad \text{e} \quad \left. \frac{d}{d\tau} F_\tau(y) \right|_{\tau=0} = v_F(y)$$

então, substituindo y por $F_t(x_0) = \varphi(t)$ na segunda equação temos

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = \left. \frac{d}{d\tau} F_\tau(F_t(x_0)) \right|_{\tau=0} = v_F(F_t(x_0)) = v_F(\varphi(t)).$$

□

Tal como para sistemas dinâmicos, podemos considerar em relação a uma equação diferencial definida em $U \subset \mathbf{R}^n$ o espaço de fases alargado $\mathbf{R} \times U$ e curvas integrais, gráficos de soluções de equação. Assim, uma solução satisfaz a condição inicial (t_0, x_0) se a curva integral correspondente passar em (t_0, x_0) . As curvas integrais do campo de vectores v são tangentes ao campo de vectores $\tilde{v} = (1, v)$ definido em $\mathbf{R} \times U$.

A partir daqui, a menos de menção explícita, todos os campos de vectores são de classe C^k , com k pelo menos igual a 1.

2. Mudanças de coordenadas

Seja $f : U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ uma função diferenciável; se $\alpha : I \rightarrow U$ for uma curva diferenciável em U passando por x , isto é, se $\alpha(t) = x$ para algum $t \in I$, então f transforma α na curva $\beta = f \circ \alpha$ e $Df(x)$ transforma o vector velocidade $v = \dot{\alpha}(t)$ em $w = \dot{\beta}(t)$ (figura 1).

Dado $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$, um difeomorfismo de um aberto $U \subset \mathbf{R}^n$ sobre a sua imagem $V = f(U) \subset \mathbf{R}^n$, um aberto de $\mathbf{R}^n$, e dado v um campo de vectores em U , podemos definir em V um novo campo de vectores $w = f_*v$ por $w(f(x)) = Df(x) \cdot v(x)$ ou seja, para $y = f(x) \in V$ define-se $w(y) = Df(f^{-1}(y)) \cdot v(f^{-1}(y))$.

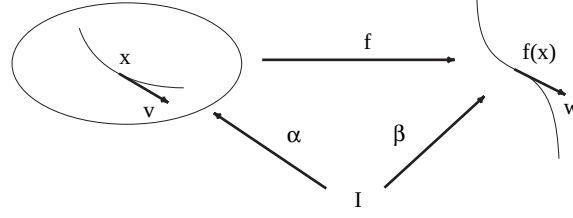


FIGURA 1

EXEMPLO 2.1. Para $U = V = \mathbf{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1, 3x_2) = (y_1, y_2)$ e $v : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $v(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ temos $f_*v(f(x_1, x_2)) = Df(x_1, x_2) \cdot v(x_1, x_2) = (-2x_2, 3x_1)$. Fazendo a substituição $(x_1, x_2) = f^{-1}(y_1, y_2) = (y_1/2, y_2/3)$ obtem-se $w(y_1, y_2) = f_*v(y_1, y_2) = (-2y_2/3, 3y_1/2)$.

Duas equações diferenciais $\dot{x} = v(x)$ e $\dot{y} = w(y)$ são *equivalentes* se existir um difeomorfismo f que transforma as soluções da primeira equação nas soluções da segunda: se $\varphi : I \rightarrow U$ for solução da primeira equação, então $f \circ \varphi$ será solução da segunda.

TEOREMA 2.1. *Dados um difeomorfismo $f : U \rightarrow V$ e um campo de vectores v em U , a equação diferencial $\dot{x} = v(x)$ é equivalente à equação $\dot{y} = v_1(y)$, onde $v_1 = f_*v$.*

Demonstração:

Basta aplicar o teorema da derivada de uma função composta:

$$\frac{d}{dt} f \circ \varphi(t) = Df(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) = v_1(f \circ \varphi(t))$$

□

EXEMPLO 2.2. De novo $v : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $v(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. A invariância aparente para as rotações sugere a passagem a coordenadas polares, $h(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

A aplicação h não é um difeomorfismo em $\mathbf{R}^2$, mas se considerarmos a restrição de h a $V = \{(r, \theta) : r > 0, \theta \in]0, 2\pi[\}$ então $h|_V : V \rightarrow \mathbf{R}^2$ é um difeomorfismo sobre a sua imagem $U = h(V)$. Além disso, h transforma coordenadas polares em coordenadas rectangulares. Como queremos passar (x_1, x_2) para coordenadas polares, iremos usar a inversa $f = h|_V^{-1} : U \rightarrow V$ e então $Df(h(r, \theta)) = (Dh(r, \theta))^{-1}$ que valem

$$Dh(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \quad Df(h(r, \theta)) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Queremos escrever v em coordenadas polares (r, θ) , ou seja queremos calcular $w = f_*v$ dado por

$$w(r, \theta) = Df(h(r, \theta)) \cdot v(h(r, \theta)) = (0, 1).$$

A equação diferencial $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = 1$ com condição inicial $(0, (r_0, \theta_0))$ para $(r_0, \theta_0) \in V$ tem solução $\varphi_1(t) = (r_0, \theta_0 + t)$.

A solução da equação diferencial $\dot{x} = v(x)$ com condição inicial $(0, x_0)$ para $x_0 \in U$ pode ser obtida fazendo $(r_0, \theta_0) = f(x_0, x_0) \in V$, $\varphi(t) = (f \circ \varphi_1)(t)$, isto é, $x_1(t) = r_0 \cos(\theta_0 + t)$, $x_2(t) = r_0 \sin(\theta_0 + t)$. Estas soluções só são válidas em U , no entanto elas estão bem definidas em $\mathbf{R}^2$ e é fácil verificar que são soluções em $\mathbf{R}^2$ mesmo para condições iniciais que não pertençam a U .

Para os apreciadores de diagramas comutativos, o que fizemos foi definir o campo f_*v de maneira a garantir que o diagrama a seguir comute:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{v} & TU \\ f \downarrow & & \downarrow Df \\ U & \xrightarrow{f_*v} & TU \end{array}$$

3. Rectificação do fluxo

Se x não for ponto crítico de v , existe sempre uma escolha criteriosa de f , como no exemplo 2.2, que numa vizinhança de x transforma a equação diferencial dada numa de integração imediata:

TEOREMA 3.1 (Rectificação do fluxo). *Seja $x_0 \in U$ um ponto não singular do campo de vectores $v : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ de classe C^k com $k \geq 1$; então existe uma vizinhança V de x_0 em U e $f : V \rightarrow \mathbf{R}^n$ um difeomorfismo C^k sobre um aberto $f(V)$ tal que $f_*v = e_1$.*

As soluções de $\dot{x} = v(x)$, com $x(t_0)$ próximo de x_0 , são transformadas em rectas. É claro que V pode ser sempre escolhido de modo a que $f(V) = W$ seja o paralelepípedo $\{|y_i - f_i(x_0)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$ para um $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ suficientemente pequeno (figura 2).

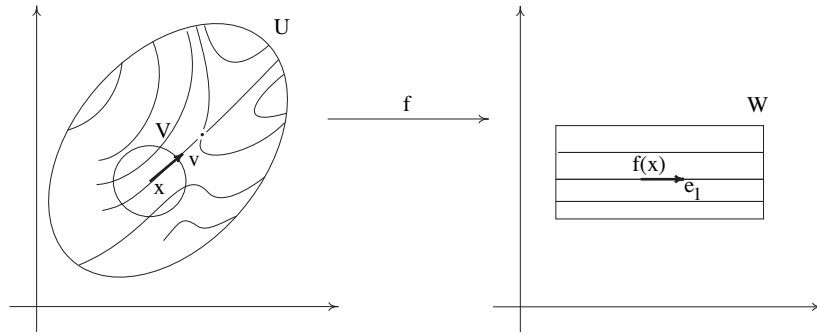


FIGURA 2

O teorema é local, geralmente V não contém todos os pontos não singulares, como se pode ver no exemplo 2.2.

COROLÁRIO 3.1. *A equação $\dot{x} = v(x)$ definida em U admite uma solução verificando a condição inicial (t_0, x_0) com $x_0 \in U$ se v for um campo de vectores C^k com $k \geq 1$.*

Demonstração:

Se $v(x_0) = 0$ então $\varphi \equiv x_0$ é uma solução; se $v(x_0) \neq 0$ e aplicando o teorema anterior, transforma-se a equação diferencial dada numa de integração imediata, associada a $e_1 = f_*v$. A solução procurada será $\varphi(t) = (f^{-1} \circ \varphi_1)(t)$, onde $\varphi_1(t)$ é solução de $\dot{y} = e_1$ satisfazendo $\varphi_1(t_0) = f(x_0)$. $\square$

De maneira perfeitamente análoga, tendo em conta a unicidade de solução da equação $\dot{x} = e_1$, pode-se demonstrar:

COROLÁRIO 3.2. *Dado um campo de vectores $v : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ de classe C^k com $k \geq 1$, tal que $v(x_0) \neq 0$ se $\varphi_i, i = 1, 2$ são soluções de $\dot{x} = v(x)$ satisfazendo $\varphi_i(t_0) = x_0$, com $\varphi_i : I_i \rightarrow V \subset U$ (onde V é a vizinhança de x_0 dada pelo teorema 3.1), então $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ em $I_1 \cap I_2$.*

Em conjunto, os corolários 3.1 e 3.2 afirmam a existência e unicidade numa vizinhança de um ponto não singular x_0 , da solução de $\dot{x} = v(x)$ com a condição inicial (t_0, x_0) . Mais adiante será eliminada a restrição $v(x_0) \neq 0$.

Diremos que $\Phi : I \times V \longrightarrow U$ é o *fluxo local* do campo de vectores C^k ($k \geq 1$) $v : U \longrightarrow TU$ em torno de $x_0 \in U$ se:

- (1) $I =] - \varepsilon, +\varepsilon[$ e V é uma vizinhança de x_0 contida em U .
- (2) Φ é de classe C^k .
- (3) Para cada $t \in I$ a aplicação $x \mapsto \Phi(t, x) = \Phi^t x$ é um difeomorfismo sobre a sua imagem.
- (4) Para cada $x \in V$ a aplicação $t \mapsto \varphi(t) = \Phi^t x$ é uma solução de equação diferencial associado ao campo v , satisfazendo a condição inicial $(0, x)$.
- (5) Existe uma vizinhança $\tilde{V} \subset V$ de x_0 tal que, para todo $x \in \tilde{V}$ e para todo $s, t \in I$ tem-se $\Phi^{s+t}(x) = \Phi^s \circ \Phi^t(x)$.

A definição anterior de fluxo corresponde a $I = \mathbf{R}$ e $V = U = \tilde{V}$.

COROLÁRIO 3.3. *O campo de vectores v de classe C^k , $k \geq 1$ define um fluxo local na vizinhança de qualquer ponto $x_0 \in U$ não singular.*

Demonstração:

Primeiro demonstramos o resultado para o campo de vectores $v = e_1$. Dado qualquer aberto $W \subset \mathbf{R}^n$ para cada $x_0 \in W$ podemos tomar $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ tal que o cubo de aresta 6ε centrado em x_0 esteja contido em W . Definimos V como o interior do cubo de aresta 4ε centrado em x_0 , $I =] - \varepsilon, +\varepsilon[$ e $\Phi(t, x) = x + te_1$. É fácil verificar que $\Phi : I \times V \longrightarrow W$ é um fluxo local em x_0 , em que a vizinhança $\tilde{V}$ referida em 5 é o interior do cubo de aresta 2ε centrado em x_0 .

Seja agora v um campo de vectores em U , $v(x_0) \neq 0$; pelo teorema 3.1 existem uma vizinhança U' de x_0 , um aberto $W \subset \mathbf{R}^n$ e um difeomorfismo $f : U' \longrightarrow W$ tal que $f_* v = e_1$. Se $\Psi : I \times V' \longrightarrow W$ é o fluxo local de e_1 construído acima, então $\Phi(t, x) = f^{-1}(\Psi(t, f(x)))$ define um fluxo local em x_0 com $\Phi : I \times f^{-1}(V') \longrightarrow U$. $\square$

No corolário 3.3 não é possível garantir a existência de um fluxo global, como mostra o exemplo a seguir:

EXEMPLO 3.1. A expressão $v(x) = -x^2$ define um campo de vectores de classe C^∞ em $U = \mathbf{R}$. A solução geral da equação diferencial associada pode ser calculada facilmente:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2 \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbf{R} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{x_0}{(t - t_0)x_0 + 1} = \Phi(t, x_0).$$

A única solução que está definida para todo $t \in \mathbf{R}$ é a solução constante nula, que corresponde às condições iniciais $x(t_0) = 0$.

TEOREMA 3.2. *Seja $\varphi : I \longrightarrow U$ uma solução de $\dot{x} = v(x)$ com condição inicial (t_0, x_0) , definida pelo campo de vectores $v : U \longrightarrow TU$ e seja $A_s : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ a translação $A_s(t) = s + t$, então para todo $s \in \mathbf{R}$, $\varphi \circ A_s : A_{-s}(I) \longrightarrow U$ é ainda solução de $\dot{x} = v(x)$ com condição inicial $(t_0 - s, x_0)$.*

Demonstração:

$$\frac{d}{dt} \varphi \circ A_s(t) = \dot{\varphi}(A_s(t)) = v(\varphi(A_s(t))) = v(\varphi \circ A_s(t)).$$

□

Do corolário anterior resulta imediatamente :

TEOREMA 3.3. *Se v for um campo de vectores C^k com $k \geq 1$ em U e $x_0 \in U$ for não singular, existe uma vizinhança V de x_0 e existe $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ tais que se $x \in V$, existe e está definida em $I =]-\varepsilon, +\varepsilon[$ a solução $\varphi(t, x)$ de $\dot{x} = v(x)$ satisfazendo a condição inicial $(0, x)$; φ é uma aplicação C^k , isto é, a solução depende contínua e derivavelmente, até ordem k , do tempo e da condição inicial.*

Um resultado análogo pode ser obtido para equações diferenciais dependendo de parâmetros, como no exemplo a seguir:

EXEMPLO 3.2. À família de campos de vectores $v_a : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $v_a(x_1, x_2) = (ax_1 - x_2, x_1 + ax_2)$ está associado o fluxo local $\varphi_a(t, x_1, x_2)$ que, para cada a , descreve as soluções de

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= ax_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2. \end{cases}$$

Para ver que F é uma função C^∞ de todas as variáveis, incluindo o parâmetro a , incluímos o parâmetro como nova variável

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= ax_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2 \\ \dot{a} &= 0. \end{cases}$$

e as soluções do novo sistema são dadas pelo fluxo local $\psi(t, x_1, x_2, a) = (\varphi_a(t, x_1, x_2), a)$. Pelo teorema 3.3, em torno de qualquer ponto $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ a solução ψ é C^∞ . Neste exemplo conseguimos calcular explicitamente o fluxo local (que neste caso é global) $\varphi_a(t, x_1, x_2) = e^{at}(x_1 \cos t - x_2 \sin t, x_1 \sin t + x_2 \cos t)$ e observar directamente que φ é uma função C^∞ de a .

Para tratar o caso geral, seja $v : U \times A \longrightarrow TU$ uma aplicação tal que o seguinte diagrama é comutativo, onde p e p_1 são as projecções naturais:

$$\begin{array}{ccc} U \times A & \xrightarrow{v} & TU \\ & p_1 \searrow & \downarrow p \\ & & U \end{array}$$

isto é, v é uma família de campos de vectores em U , parametrizada pelos pontos de A . Vamos supor que $A \subset \mathbf{R}^m$ seja um conjunto aberto e que v seja de classe C^k ($k \geq 1$) em $U \times A$.

TEOREMA 3.4. *Seja $(x_0, \alpha_0) \in U \times A$ tal que $v(x_0, \alpha_0) \neq 0$, se $v(x, \alpha)$ for de classe C^k , $k \geq 1$ em $U \times A$ então existem $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ e vizinhanças V e W de x_0 e α_0 , respectivamente, tais que a solução $\varphi(t, x, \alpha)$ da equação diferencial $\dot{y} = v(y, \alpha)$ verificando a condição inicial $\varphi(0, x, \alpha) = x$ está definida em $I \times V \times W$, com $I =]-\varepsilon, +\varepsilon[$, e é de classe C^k relativamente a (t, x, α) .*

Demonstração:

Consideramos em $U \times A$ o campo de vectores $\bar{v} = (v, 0)$. Como (x_0, α_0) é um ponto não singular de $\bar{v}$, podemos aplicar o teorema anterior. A solução de $\bar{v}$ que passa por (x, α) para $t = 0$ é dada por $(\varphi(t, x, \alpha), \alpha)$, por isso podemos concluir que $\varphi(t, x, \alpha)$ é uma função de classe C^k . □

Adiante veremos que a restrição $v(x_0) \neq 0$ no corolário 3.3, e portanto a restrição análoga nos teoremas 3.3 e 3.4, pode ser evitada.

EXEMPLO 3.3. O campo $v(x, y) = (y, 1)$ é sempre diferente de $(0, 0)$ e por isso pode ser rectificado em torno de qualquer ponto do plano. Para rectificá-lo, procuramos um difeomorfismo $f(x, y) = (z, w)$ tal que $f_*v = (1, 0)$, ou seja, tal que $Df(x, y) \cdot v(x, y) = (1, 0)|_{f(x, y)} = (1, 0)$. Tentamos encontrar as entradas a, b, c, d de uma matriz tal que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Neste caso é fácil adivinhar a solução $a = 0, b = 1, c = 1, d = -y$, que leva a $f(x, y) = (y, x - y^2/2)$. Como $\det Df(x, y) = -1$, então f é um difeomorfismo local.

Podemos verificar que a solução está correcta, fazendo directamente a mudança de coordenadas na equação diferencial associada a v :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} z = y \\ w = x - \frac{y^2}{2} \end{cases} \quad \implies \quad \begin{cases} \dot{z} = \dot{y} = 1 \\ \dot{w} = \dot{x} - \frac{2y\dot{y}}{2} = y - y = 0 \end{cases}$$

Outra maneira de encontrar o difeomorfismo rectificador $f(x, y) = (z(x, y), w(x, y))$ é pensar que para ter $\dot{z} = 1$ é preciso que $z(x(t), y(t)) = t + c$ com c uma constante, e que para ter $\dot{w} = 0$ é preciso que $w(x(t), y(t))$ seja constante. A primeira afirmação é fácil neste caso, basta tomar $z(x, y) = y$. Para a segunda, integramos os dois membros da equação diferencial:

$$\dot{x}(t) = y(t) \implies \int_0^t \dot{x}(s) ds = \int_0^t y(s) ds$$

e usando a equação $\dot{y} = 1$ temos,

$$\int_0^t \dot{x}(s) ds = x(t) - x(0) \quad \int_0^t y(s) ds = \int_0^t y(s) \dot{y}(s) ds = \frac{y^2(t)}{2} - \frac{y^2(0)}{2}$$

logo,

$$x(t) - \frac{y^2(t)}{2} = x(0) - \frac{y^2(0)}{2}.$$

Logo $w(x, y) = x - y^2/2$ é constante sobre as órbitas de v , como queríamos.

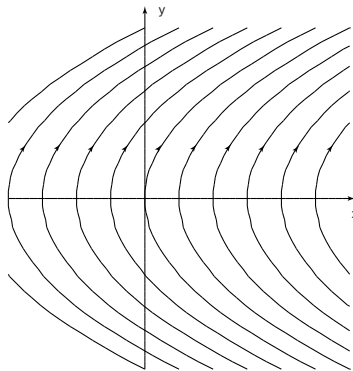


FIGURA 3. As órbitas do campo $v(x, y) = (y, 1)$ do exemplo 3.3 são parábolas que são transformadas por $f(x, y) = (y, x - y^2/2)$ em rectas horizontais.

Pelos cálculos acima concluímos que o fluxo local associado a este campo de vectores é:

$$\varphi(t, x_0, y_0) = \left(\frac{(t + y_0)^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} + x_0, t + y_0 \right)$$

e que as suas órbitas são parábolas (figura 3). Cada uma das trajectórias está definida em $I = \mathbf{R}$.

EXEMPLO 3.4. O campo $v(x, y) = (x + y, 1)$ também é sempre diferente de $(0, 0)$ e por isso pode ser rectificado. Procuramos $f(x, y) = (z(x, y), w(x, y))$ tal que $\frac{d}{dt}z(x(t), y(t)) = 1$, por exemplo, $z(x, y) = y$. Para garantir que $\frac{d}{dt}w(x(t), y(t)) = 0$ ou seja, para garantir que $w(x(t), y(t))$ seja constante, usamos a mesma estratégia do exemplo anterior: reescrevemos $\dot{x} = x + y$ como $\dot{x} - x = y$ e tentamos reconhecer a o primeiro membro como a derivada de uma função. Isto fica mais fácil se multiplicarmos os dois membros pelo factor integrante e^{-t} :

$$\frac{d}{dt}(x(t)e^{-t}) = (\dot{x} - x)e^{-t} = ye^{-t} = \frac{d}{dt}((-y + 1)e^{-t})$$

em que usamos $\dot{y} = 1$ para a última igualdade. Logo

$$x(t)e^{-t} - x(0) = \int_0^t (\dot{x}(s) - x(s))e^{-s}ds = \int_0^t y(s)e^{-s}ds = -(y(t) + 1)e^{-t} + y(0) + 1$$

e, usando $y(t) = t + y(0)$ conclui-se que $x(t)e^{-y(t)} + (y(t) + 1)e^{-y(t)}$ é constante. Podemos tomar $w(x, y) = (x + y + 1)e^{-y}$ como candidato a difeomorfismo rectificador. Resta verificar que $f(x, y) = (y, (x + y + 1)e^{-y})$ define um difeomorfismo local, bastando verificar que $Df(x, y)$ tem determinante igual a $-e^{-y} \neq 0$ em todos os pontos.

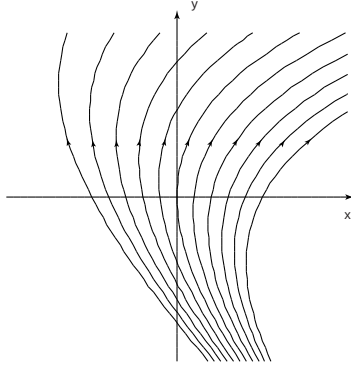


FIGURA 4. As órbitas do campo $v(x, y) = (y, 1)$ do exemplo 3.4 que são transformadas por $f(x, y) = (y, (x + y + 1)e^{-y})$ em rectas horizontais.

Dos cálculos que fizemos para encontrar o difeomorfismo rectificador podemos obter o fluxo local, que é

$$\varphi(t, x_0, y_0) = \left(-(t + y_0 + 1) + (x_0 + y_0 + 1)e^t, t + y_0 \right).$$

Não é uma coincidência que rectificar seja o mesmo que o encontrar o fluxo, como veremos mais adiante.

4. Prolongamento de soluções

Seja v um campo de vectores em $U \subset \mathbf{R}^n$, e $x_0 \in U$ e seja $\varphi(t)$ uma solução de $\dot{x} = v(x)$ satisfazendo $\varphi(t_0) = x_0$ e com domínio I , φ diz-se *prolongável*, ou *prolongável para a frente*, ou *prolongável para trás*, respectivamente, se existir uma solução $\bar{\varphi}$, que coincide com φ em I , definida para todo $t \in \mathbf{R}$ (respectivamente para $t \in I \cup [t_0, +\infty[$, ou para $t \in I \cup]-\infty, t_0]$). Se $\Gamma \subset U$, a solução de $\dot{x} = v(x)$ com condição inicial (t_0, x_0) diz-se *prolongável até Γ para a frente* se existirem $t_1 > t_0$ e uma solução φ definida em $[t_0, t_1]$ tal que $\varphi(t_0) = x_0$ e $\varphi(t_1) \in \Gamma$; a definição de prolongável para trás até Γ é análoga.

EXEMPLO 4.1. As soluções da equação diferencial do exemplo 3.1:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2 \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbf{R} \end{cases} \Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{(t - t_0)x_0 + 1} = \Phi(t, x_0).$$

não podem ser prolongadas além do valor de t em que o denominador se anula. A única solução prolongável para frente e para trás é a que corresponde às condições iniciais $x(t_0) = 0$, que é a solução constante nula, definida para todo $t \in \mathbf{R}$. A solução para a condição inicial $\varphi(0) = 1$, dada por $\varphi(t) = 1/(t+1)$ é prolongável para a frente, mas não para trás. A mesma solução é prolongável para trás até o conjunto $\Gamma = \{2\} \subset \mathbf{R}$ porque $\varphi(t) = 1/(t+1)$ está bem definida em $[t_1, t_0] = [-1/2, 0]$ e $\varphi(-1/2) \in \Gamma$.

TEOREMA 4.1. *Seja $A \subset U \subset \mathbf{R}^n$ um conjunto compacto, não contendo pontos singulares, de fronteira Γ . A solução φ de $\dot{x} = v(x)$ com $\varphi(t_0) = x_0 \in A$ é prolongável para a frente (para trás) ou prolongável até Γ para a frente (trás); o prolongamento é único (i.e. duas soluções verificando a mesma condição inicial coincidem na intersecção dos intervalos de definição).*

Demonstração:

Consideramos o caso de prolongamento para a frente, sendo o outro análogo.

Unicidade:

Seja T o supremo dos $\tau \in \mathbf{R}$ para os quais φ_1 e φ_2 , duas soluções de $\dot{x} = v(x)$ com condição inicial (t_0, x_0) , coincidem em $[t_0, \tau]$ (figura 3) com $\varphi_j : I_j \rightarrow U$.

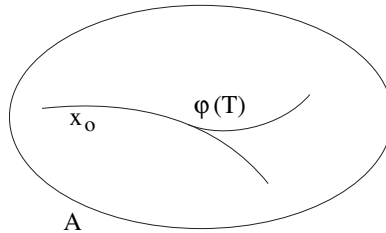


FIGURA 5

Se $T \in I_1 \cap I_2$ então φ_1 e φ_2 coincidem numa vizinhança de T pela unicidade local de solução, o que contradiz a definição de T . Portanto $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ apenas em $[t_0, T[$, e este intervalo tem que ser exactamente o domínio de definição (à direita de t_0) de pelo menos uma das soluções.

Existência:

Seja T o supremo dos τ para os quais existe solução φ em $[t_0, \tau]$ com $\varphi(t_0) = x_0$ e com $\varphi(t) \in A \forall t \in [t_0, \tau]$. Se $T = +\infty$, a solução é prolongável para a frente.

Vamos supor $T < +\infty$; do corolário 3.3 e do facto de A ser compacto, existe $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ tal que a solução φ de $\dot{x} = v(x)$ com $\varphi(t_0) = \tilde{x}$ existe e está definida em $] -\varepsilon, +\varepsilon[$, para

todo $\tilde{x} \in A$: cobrimos A com os abertos $V(\tilde{x})$ da definição de fluxo local, extraímos uma subcobertura finita e tomamos ε como o mínimo dos $\varepsilon(\tilde{x})$ correspondentes.

Tomamos $\tau \in]T - \varepsilon, T[$; então $\varphi(t) \in A$ para $t \in [t_0, \tau]$ e existe uma solução $\tilde{\varphi}$ definida para $|t - \tau| < \varepsilon$ tal que $\tilde{\varphi}(\tau) = \varphi(\tau)$. As soluções $\tilde{\varphi}$ e φ coincidem na intersecção dos seus domínios de definição, conforme vimos. A partir de φ e $\tilde{\varphi}$ podemos construir uma solução ψ definida em $[t_0, \tau + \varepsilon[$ com $\psi(t_0) = x_0$, tomando $\psi = \varphi$ em $[t_0, \tau - \varepsilon[$ e $\psi = \tilde{\varphi}$ em $]\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon[$; note-se que $\tau + \varepsilon > T$.

É claro que $\psi(t) \in A$ se $t \in [t_0, T[$, pela definição de T , e portanto $\psi(T) \in A$; se $\psi(T) \in \text{int } A$ teríamos $\psi(t) \in A$ para $t > T$, contradizendo a definição de T , por isso $\psi(T) \in \Gamma$ e $\psi(t) \notin A$ se $t > T$ (suficientemente próximo de T). $\square$

Note-se que da demonstração resulta que para cada solução só podem acontecer duas situações: ou a solução é prolongável para a frente indefinidamente, ou então atinge a fronteira de A e sai, para um t finito. Em particular, se for possível provar que a solução não sai de A , ela será prolongável indefinidamente.

5. Construção do difeomorfismo rectificador

Já vimos que a partir do teorema da rectificação do fluxo se pode demonstrar a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais. Nesta secção mostraremos que a recíproca é verdadeira, isto é, que conhecendo as soluções $\varphi(t, x)$ de $\dot{x} = v(x)$, $\varphi(0, x) = x$, é fácil determinar um difeomorfismo f rectificador. Se $x_0 \in U$ não for singular, sabemos que, para algum ε positivo, o domínio de φ contém $]-\varepsilon, +\varepsilon[\times V$, sendo V uma vizinhança de x_0 em U . Seja Λ a intersecção com V do hiperplano que passa por x_0 e é perpendicular a $v(x_0)$, indicado a tracejado na figura 4, ou seja $\Lambda = \{x \in V \mid (x - x_0) \cdot v(x_0) = 0\} \cap V$.

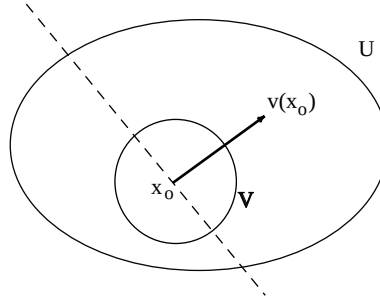


FIGURA 6

Se a primeira coordenada de $v(x_0)$ for $v_1(x_0) \neq 0$ então podemos construir um isomorfismo linear $\lambda : \mathbf{R}^{n-1} \longrightarrow v(x_0)^\perp \subset \mathbf{R}^n$ através de

$$\lambda(y_2, \dots, y_n) = (x_{01} - \sum_{i=2}^n \frac{v_i(x_0)}{v_1(x_0)}(y_i - x_{0i}), y_2, \dots, y_n)$$

que transforma um aberto $W' \subset \mathbf{R}^{n-1}$ em Λ .

Definimos $h :]-\varepsilon, +\varepsilon[\times W' \longrightarrow V$ através de $h(t, y_2, \dots, y_n) = \varphi(t, \lambda(y))$. Por construção h transforma soluções de $\dot{y} = e_1$, $y(0) = (t_0, y_{20}, \dots, y_{n0})$ em soluções de $\dot{x} = v(x)$, $x(t_0) = \lambda(y_0)$. Resta verificar que h é um difeomorfismo local. Seja $y_0 = \lambda^{-1}(x_0)$; então $h(0, y_0) = x_0$,

e por outro lado:

$$Dh(0, y_0) = \begin{pmatrix} v_1(x_0) & -v_2(x_0)/v_1(x_0) & \dots & -v_n(x_0)/v_1(x_0) \\ v_2(x_0) & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ v_n(x_0) & & & \end{pmatrix}$$

É fácil verificar que $\det Dh(0, y_0) = \frac{1}{v_1(x_0)} |v(x_0)|^2$. Como estamos supondo $v_1(x_0) \neq 0$ então $\det Dh(0, y_0) \neq 0$, ou seja $Dh(0, y_0)$ é inversível. Pelo teorema da função inversa existem abertos V_1 e W , vizinhanças de x_0 e $(0, y_0)$ respectivamente, com $V_1 \subset V$ e $W \subset]-\varepsilon, +\varepsilon[\times W'$, e $f : V_1 \rightarrow W$ da mesma ordem de derivabilidade de h (isto é, de φ e de v) tais que $f = h^{-1}|_W$. Por construção, o difeomorfismo f assim determinado transforma v , definido em V_1 , no campo de vectores $e_1 = f_*v$ definido em W .

6. Equações diferenciais não autónomas

Até agora estudamos equações diferenciais *autónomas*, equações em que a expressão para $\dot{x}$ não depende explicitamente da variável t . Passemos ao estudo de equações diferenciais *não autónomas*, isto é, do tipo $\dot{x} = v(t, x)$ com $(t, x) \in W \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, onde $v : W \rightarrow T\mathbf{R}^n$ é uma aplicação C^k , que para cada t é um campo de vectores em $U_t = \{x \in \mathbf{R}^n : (t, x) \in W\}$. Se W for aberto, U_t também o será. Neste caso, é mais fácil estudar as curvas integrais, definidas em $W \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, e cujo vector tangente em cada ponto é dado por $(1, v)$.

De facto deveríamos partir do campo de vectores $\bar{v}(s, x) = (1, v(s, x))$ em W : a primeira componente duma solução da equação diferencial associada é obviamente $s = t$, isto é, $\bar{\varphi}(t) = (t, \varphi(t))$; interpretamos $\bar{\varphi}$ como gráfico da curva φ . Esta será a solução da equação diferencial não autónoma $\dot{x} = v(t, x)$.

EXEMPLO 6.1. A equação $\dot{x} = \frac{x}{t+1} = v(t, x)$ está bem definida em $W =]-1, +\infty[\times \mathbf{R}$ e aqui $U_t = \mathbf{R}$ para todo t . Resolver esta equação com a condição inicial $x(t_0) = x_0$ é equivalente a resolver:

$$\begin{cases} \dot{s} = 1 \\ \dot{x} = \frac{x}{s+1} \end{cases} \quad \text{com a condição} \quad \begin{cases} s(t_0) = t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

que é uma equação autónoma em W .

TEOREMA 6.1. *Dado $(t_0, x_0) \in W \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, existe uma vizinhança V de (t_0, x_0) contida em W e um difeomorfismo C^k $f : V \rightarrow V_1$ com V_1 aberto em $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, com coordenadas $(t, y_1, \dots, y_n)$, tal que a equação $\dot{x} = v(t, x)$, com v de classe C^k em V é equivalente à equação $\dot{y} = 0$ em V_1 .*

Demonstração:

Seja $\bar{v} = (1, v)$ como acima; o ponto (t_0, x_0) é sempre ponto não singular de $\bar{v}$ e podemos aplicar o teorema 3.1. Assim $f_*\bar{v} = e_1 \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ com coordenadas (τ, z) , e portanto $\dot{\tau} = 1$, $\dot{z} = 0$. A única dificuldade está em mostrar que a coordenada t em V é transformada na coordenada τ em V_1 . A partir da solução da última equação, de integração imediata, e procedendo como em 5, construímos um difeomorfismo rectificador em que as novas coordenadas são (t, y) . $\square$

Ao contrário do que acontece nas equações autónomas, não é necessário que v seja diferente de zero em (t_0, x_0) ; por outro lado, neste caso são as curvas integrais que podem ser

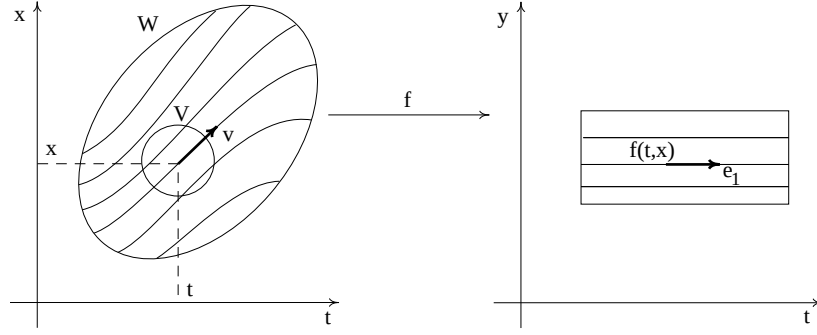


FIGURA 7

rectificadas, e não as soluções. Os resultados apresentados a seguir, bem como as suas demonstrações, são perfeitamente análogos aos já considerados para equações diferenciais autónomas, sem a dificuldade de evitar pontos singulares.

TEOREMA 6.2. *A equação $\dot{x} = v(t, x)$, com v de classe C^k , $k \geq 1$, tem uma solução φ que satisfaz a condição inicial $(t_0, x_0) \in W$ definida em $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ para um certo $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$. Duas quaisquer soluções verificando essa mesma condição inicial coincidem na intersecção dos seus domínios de definição.*

Note-se que agora $v(t_0, x_0) = 0$ é admissível; se interpretarmos $\dot{x} = v(x)$ como caso particular de uma equação não autónoma, vemos que em relação aos corolários 3.1 e 3.2 se pode levantar a restrição $v(x_0) \neq 0$.

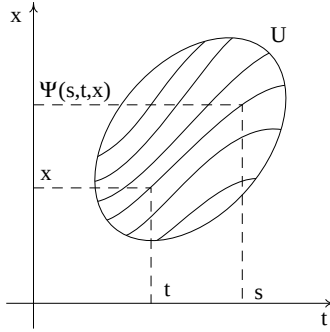


FIGURA 8

Designa-se por família local de transformações, definida por $v(t, x)$ na vizinhança de (t_0, x_0) , a aplicação Ψ onde:

- (1) $\Psi : I \times I \times V \longrightarrow U$ é C^k , $k \geq 1$.
- (2) $I =]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, com $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$, e V é uma vizinhança de x_0 em $U = p_2(W)$.
- (3) cada uma das aplicações $\Psi(s, t, \cdot) = \Psi_t^s$ é um difeomorfismo sobre a sua imagem.
- (4) $\varphi(t) = \Psi(t, t_1, x)$ define uma solução de $\dot{x} = v(t, x)$ satisfazendo a condição inicial $\varphi(t_1) = x$.
- (5) $\Psi_t^s = \Psi_\tau^s \circ \Psi_t^\tau$ numa vizinhança de x_0 para todos $s, t, \tau \in I$.

COROLÁRIO 6.1. *$v(t, x)$ define uma família local de transformações na vizinhança de qualquer $(t_0, x_0) \in W$.*

A família local de transformações Ψ_t^s associada a um campo de vectores autónomo v em U só depende da diferença $s - t$, já que pelo teorema 3.2 as expressões $\Psi_t^s x$ e $\Psi_{t+\tau}^{s+\tau} x$,

como funções de s , são duas soluções da mesma equação diferencial autónoma com condições iniciais (t, x) e $(t + \tau, x)$ respectivamente, e se obtém uma da outra por uma translação de τ (ou $-\tau$) no tempo.

Se definirmos Φ através de $\Phi(t, x) = \Psi(t, 0, x)$, é imediato verificar que Φ é um fluxo local. Isto é, o corolário 3.3 fica demonstrado sem a restrição $v(x_0) \neq 0$.

TEOREMA 6.3. *Seja $v(t, x, \alpha)$ um campo de vectores para (t, α) fixos que é de classe C^k , $k \geq 1$, nas variáveis (t, x, α) ; a equação $\dot{x} = v(t, x, \alpha)$ admite uma solução $\varphi(t, x, \alpha)$ verificando a condição inicial $\varphi(0, x, \alpha) = x$ que é uma função C^k de (t, x, α) .*

Fica assim também demonstrado o teorema 3.4 para o caso singular em que $v(x, \alpha) = 0$. Note-se ainda que é verdadeiro o análogo do teorema 3.3 para equações diferenciais não autónomas:

TEOREMA 6.4. *Seja A um conjunto compacto contido em $W \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, $(t_0, x_0) \in A$, e designemos por Γ a fronteira de A . A solução de $\dot{x} = v(t, x)$, $\varphi(t_0) = x_0$, é prolongável para a frente e para trás até Γ (deixando A). Duas quaisquer soluções coincidem na intersecção dos seus domínios de definição.*

Neste caso não podemos ter soluções indefinidamente prolongáveis em A já que a compacidade de A obriga a valores de t limitados.

Usando este teorema para equações diferenciais autónomas, podemos eliminar a restrição de o compacto A não conter pontos singulares do campo de vectores v no teorema 4.1: de facto, tomando $A' = [-T, T] \times A$ vemos que a solução está definida até T arbitrário, ou atravessa a fronteira Γ de A , já que a fronteira Γ' de A' é dada por $\Gamma' = \{-T\} \times A \cup \{T\} \times A \cup [-T, T] \times \Gamma$.

Toda a teoria até agora discutida é aplicável a equações diferenciais de ordem superior a um, reduzindo-as da maneira habitual a equações de primeira ordem. Seja $F : W \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{nk} \longrightarrow \mathbf{R}^n$ uma função C^k definida no aberto U ; a equação

$$\frac{d^k x}{dt^k} = F \left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} \right)$$

é equivalente, tomando $x_1 = x$, a:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} & i &= 1, \dots, k-1 \\ \dot{x}_{k-1} &= F(t, x_1, \dots, x_{k-1}) \end{aligned}$$

que é a equação diferencial associada a um campo de vectores não autónomo em W .

7. Estrutura das órbitas maximais

Uma solução $\varphi : I \longrightarrow U$ de $\dot{x} = v(x)$ definida no intervalo aberto I é chamada uma *solução maximal* se não for possível encontrar uma solução $\psi : J \longrightarrow U$ com I estritamente contido no intervalo aberto J e tal que $\psi|_I = \varphi$. A imagem $\varphi(I) = \{\varphi(t), t \in I\}$ de uma solução maximal é chamada uma *órbita maximal*. Já vimos na secção 4 que as soluções de uma equação diferencial autónoma $\dot{x} = v(x)$ podem ser prolongadas indefinidamente para a frente ou até a fronteira do domínio de v , ou seja, que cada ponto do domínio de v está contido em uma órbita maximal.

COROLÁRIO 7.1. *Por cada ponto $x_0 \in U$ passa uma e uma só órbita maximal de $\dot{x} = v(x)$, para v um campo de vectores C^k em $U \subset \mathbf{R}^n$, $k \geq 1$.*

Demonstração:

Seja $\varphi : I \longrightarrow U$ uma solução maximal de $\dot{x} = v(x)$ e tal que $\varphi(t_0) = x_0$ para algum $t_0 \in I$, isto é, tal que a órbita $\varphi(I)$ contenha x_0 . Suponha que exista outra solução ψ cuja órbita contenha o mesmo ponto x_0 , ou seja que $\psi : J \longrightarrow U$ seja uma solução tal que, para $t_1 \in J$, se tenha $\psi(t_1) = x_0$. Como antes, denotamos por $A_s(t) = t - s$ a translação de s unidades de tempo. Como φ é maximal tem-se que $t_1 \in A_{t_1-t_0}(I)$. Tomando $\phi = \varphi \circ A_{t_0-t_1} : A_{t_1-t_0}(I) \longrightarrow U$ então teremos $\phi(t_1) = x_0$, e $J \subset A_{t_1-t_0}(I)$ já que φ é maximal.

Portanto se ψ for maximal, então $J = A_{t_1-t_0}(I)$ e $\psi \equiv \phi$; por outro lado também as órbitas de $\varphi(I)$ e $\phi(J)$ são iguais já que $A_{t_0-t_1}$ é uma bijecção. $\square$

TEOREMA 7.1. *As órbitas maximais são pontos, círculos topológicos, ou imagens bijectivas de intervalos de $\mathbf{R}$.*

Demonstração:

Seja $\varphi : I \longrightarrow U$ uma solução de $\dot{x} = v(x)$ com domínio maximal, e suponhamos que φ é injectiva, ou seja

$$(t_1 \neq t_2 \in I) \Rightarrow \varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$$

então $\varphi : I \longrightarrow \varphi(I)$ é bijectiva. Em geral, φ não é um difeomorfismo sobre a sua imagem (a órbita do fluxo irracional no toro $T^2 = S^1 \times S^1$ não é difeomórfica a $\mathbf{R}$, como sub-conjunto de T^2 , por exemplo).

Supondo agora $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ com $t_1 < t_2$ em I , e sendo $T = t_2 - t_1$, cada ponto $t \in \mathbf{R}$ pode ser posto de forma unívoca como $t = nT + \tau$, $\tau \in [0, T[$ e $n \in \mathbf{Z}$. Sendo $\varphi'(t) = \varphi(t_1 + \tau)$, φ' é uma solução periódica de período T : na vizinhança de cada $t \in \mathbf{R}$ é uma translação de φ . Por outro lado $\varphi'(t_1) = \varphi(t_1)$ e portanto $\varphi' : \mathbf{R} \longrightarrow U$ é uma solução maximal de $\dot{x} = v(x)$, $\varphi'|_I \equiv \varphi|_I$.

A seguir mostraremos que o conjunto dos períodos de $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow U$ é um sub-grupo fechado de $(\mathbf{R}, +)$:

Se $\varphi(t + T_1) \equiv \varphi(t)$ e $\varphi(t + T_2) \equiv \varphi(t)$, virá $\varphi(t + T_1 + T_2) \equiv \varphi(t + T_1) \equiv \varphi(t)$, $\varphi(t) \equiv \varphi(t - T_1 + T_1) \equiv \varphi(t - T_1)$; isto prova que o conjunto em causa é um sub-grupo de $(\mathbf{R}, +)$.

Por outro lado, se $T_i \rightarrow T$ virá

$$\varphi(t + T) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(t + T_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(t) = \varphi(t)$$

e T é também um período de φ . Logo os períodos formam um sub-grupo fechado, como afirmámos.

A seguir, mostraremos que os sub-grupos fechados de $(\mathbf{R}, +)$ são: $\mathbf{R}$, $\{0\}$, $\{kT_0, k \in \mathbf{Z}\}$.

Seja G um sub-grupo fechado de $(\mathbf{R}, +)$, $G \neq \{0\}$; se $T_0 = \inf\{t \in G, t > 0\}$, é evidente que $0 \leq T_0 < \infty$.

Se $T_0 > 0$, então $\{kT_0, k \in \mathbf{Z}\} \subset G$; se $t \in G$ tal que $t \notin \{kT_0, k \in \mathbf{Z}\}$, existe $k \in \mathbf{Z}$ tal que $t \in]kT_0, (k+1)T_0[$ e $t - kT_0 \in G$. Como $t - kT_0 \in]0, T_0[$, isso contradiz a definição de T_0 , e portanto $G = \{kT_0, k \in \mathbf{Z}\}$.

Se $T_0 = 0$; então para todo $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ existe $t \in G$ tal que $t \in]0, \varepsilon[$. O conjunto $\{kt, k \in \mathbf{Z}\}$ divide $\mathbf{R}$ em intervalos de amplitude menor que ε ; assim qualquer vizinhança de um ponto em $\mathbf{R}$ tem pontos de G , isto é, G é denso, donde $G = \overline{G} = \mathbf{R}$.

Voltemos às órbitas maximais: o caso $G = \{0\}$ já foi analisado, as órbitas maximais são imagens bijectivas de intervalos abertos de $\mathbf{R}$. Se $G = \mathbf{R}$, $\varphi(t) = x_0$ e a órbita maximal

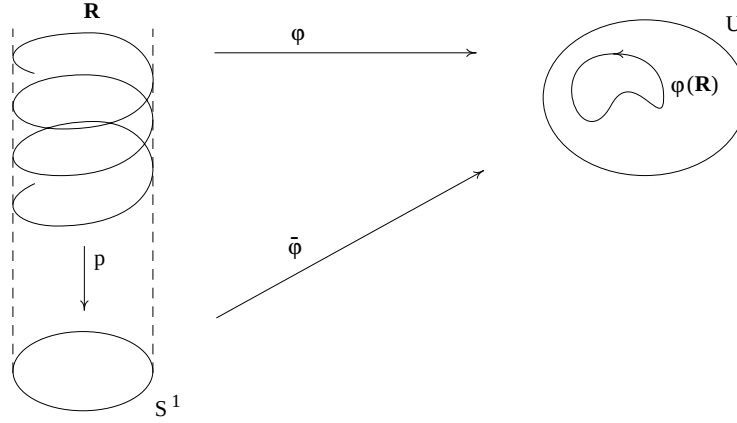


FIGURA 9

correspondente é um ponto. Sendo $G = \{kT_0, k \in \mathbf{Z}\}$ teremos $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow U$ periódica com período T_0 , e definindo $p : \mathbf{R} \longrightarrow S^1$ como a projecção canónica quando se identifica S^1 com $\mathbf{R} \pmod{T_0}$, teremos que a aplicação $\tilde{\varphi} : S^1 \longrightarrow U$ definida por $\varphi = \tilde{\varphi} \circ p$ tem a mesma imagem que φ e é um difeomorfismo sobre a sua imagem, portanto a órbita maximal $\varphi(I)$ é difeomorfa a um círculo. $\square$

CAPÍTULO 2

Estabilidade de pontos de equilíbrio

1. Integrais primeiros

Sejam $v : U \longrightarrow TU$ e $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ um campo de vectores e uma função, ambos C^k com $k \geq 1$, definidos em $U \subset \mathbf{R}^n$, aberto. A *derivada de Lie* de f segundo v é a função $L_v f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por:

$$L_v f(x) = \left. \frac{d}{dt} f \circ \varphi(t) \right|_{t=0}$$

onde φ é a solução de $\dot{x} = v(x)$ verificando $\varphi(0) = x$. Pela regra da derivação em cadeia, é óbvio que podemos escrever $L_v f(x) = Df(x) \cdot v(x)$. As derivadas de Lie tem as propriedades a seguir, cuja demonstração é um cálculo imediato.

TEOREMA 1.1. *A derivada de Lie tem as seguintes propriedades:*

- (1) $L_v(f + g) = L_v f + L_v g$, $L_v(fg) = fL_v g + gL_v f$.
- (2) $L_{u+v} = L_u + L_v$, $L_{f \cdot v} = f \cdot L_v$.

EXEMPLO 1.1. Para os campos de vectores em $\mathbf{R}^2$ dados por $v(x, y) = (2x, 3y)$ e $w(x, y) = (1, 0)$ as derivadas de Lie de $f(x, y) = x + y$ são

$$L_v f(x, y) = (1, 1) \cdot (2x, 3y)^T = 2x + 3y \quad L_w f(x, y) = (1, 1) \cdot (1, 0)^T = 1.$$

Como o resultado do cálculo da derivada de Lie é uma nova função, pode-se calcular a sua derivada de Lie:

$$L_w(L_v f(x, y)) = L_w(2x + 3y) = (2, 3) \cdot (1, 0)^T = 2 \quad L_v(L_w f(x, y)) = L_v 1 = 0$$

e este exemplo mostra que em geral $L_w L_v \neq L_v L_w$.

Seja v um campo de vectores em U , e $f \in C^k(U)$; a função f diz-se um *integral primeiro* de v se $f \circ \varphi(t)$ for constante para qualquer solução φ de $\dot{x} = v(x)$.

Os resultados seguintes são demonstrados por cálculo imediato:

TEOREMA 1.2. *As afirmações seguintes são equivalentes:*

- (1) f é um integral primeiro de v .
- (2) $L_v f \equiv 0$ em U .
- (3) Cada órbita está contida num conjunto de nível de f .

É claro que as funções constantes são sempre integrais primeiros, mas estas não trazem novas informações sobre o campo de vectores. Em geral, não há integrais primeiros não constantes: o campo de vectores $v(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ não admite integrais primeiros não triviais em $\mathbf{R}^2$, por exemplo — se $f(x_1, x_2)$ fosse um integral primeiro, então f teria que ser constante em cada uma das rectas que passa pela origem.

Para o campo de vectores $v(x) = e_1$ em $\mathbf{R}^n$, cada uma das funções $f_i(x) = x_i$, $i = 2, \dots, n$ é um integral primeiro, já que $L_v f_i(x) = e_1 \cdot e_i = 0$. De notar que as derivadas das funções f_i

são, em cada ponto, vetores linearmente independentes. Por outro lado, para que $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ seja um integral primeiro deste campo de vectores, é necessário ter $\frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = 0$ em todos os pontos, ou seja, que $g(x)$ só dependa das variáveis $x_2, \dots, x_n$.

Em torno de um ponto regular de $\mathbf{R}^n$ sempre existem $n - 1$ integrais primeiros essencialmente distintos:

TEOREMA 1.3. *Seja v um campo de vectores C^k , $k > 1$ em $U \subset \mathbf{R}^n$, e x_0 um ponto não singular de v . Existem uma vizinhança V de x_0 , $V \subset U$, e funções C^k $f_i : V \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$ tais que:*

- (1) f_i é um integral primeiro de v .
- (2) As funções $\{f_i \mid i = 1, 2, \dots, n - 1\}$ são funcionalmente independentes, isto é, se $f : V \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ é dada por $f = (f_1, \dots, f_{n-1})$, $Df(x)$ tem característica $n - 1$, $\forall x \in V$.
- (3) Qualquer integral primeiro de v em V é uma função de $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$.

Demonstração:

Para a equação $\dot{y} = e_1$ em $\mathbf{R}^n$, ou num aberto convexo de $\mathbf{R}^n$, o resultado é evidente, como já vimos; para $\dot{x} = v(x)$ basta usar o teorema da rectificação do fluxo em uma vizinhança de x_0 escolhida de maneira que o difeomorfismo rectificador tenha como imagem um aberto convexo em $\mathbf{R}^n$. $\square$

EXEMPLO 1.2. Um integral primeiro para $v(x, y) = (y, 1)$ é a função $f(x, y) = x - y^2/2$ que foi usada na construção da rectificação do fluxo de v no capítulo anterior (Exemplo 3.3). Com efeito, $L_v f(x, y) = (1, -y) \cdot v(x, y) = 0$, logo f é um integral primeiro. As curvas de nível de f foram usadas para desenhar as órbitas de v .

O mesmo se passa para o Exemplo 3.4 em que para rectificar o fluxo de $v(x, y) = (x + y, 1)$ encontramos o integral primeiro $f(x, y) = (x + y + 1)e^{-y}$, cujas curvas de nível foram usadas para desenhar as órbitas.

2. Sistemas conservativos

A seguir estudaremos campos de vectores que são caracterizados por terem automaticamente um integral primeiro globalmente definido, a energia. Um *sistema conservativo com n graus de liberdade* é dado pelas equações de Hamilton, de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

onde $H(x, p)$ é uma função de classe C^k , $k \geq 2$ chamado o *hamiltoniano do sistema*. Quando o hamiltoniano é da forma $H(x, p) = T(p) + V(x)$, com $T(p) = \frac{p^T A p}{2}$ para uma matriz A , simétrica e positiva definida, este sistema é equivalente a uma equação diferencial de segunda ordem, com $p = \dot{x}$: como $\frac{\partial H}{\partial p} = Ap$, as equações de Hamilton são equivalentes a:

$$A\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{ou equivalentemente:} \quad \ddot{x} = -A^{-1}\frac{\partial V}{\partial x}$$

O hamiltoniano H é interpretado como a *energia total* do sistema, $V(x)$ como a *energia potencial* e $T(\dot{x})$ como a *energia cinética*. A energia total é constante ao longo de cada trajectória:

TEOREMA 2.1. *Seja $H : U \subset \mathbf{R}^{2n} \longrightarrow \mathbf{R}$ uma função C^k , $k \geq 1$, com coordenadas (x, p) em U , e seja*

$$v_H(x, p) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right)$$

Então H é um integral primeiro de v_H .

Demonstração:

$$L_{v_H} H(x, p) = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \left(-\frac{\partial H}{\partial x} \right) \equiv 0$$

□

2.1. Sistemas conservativos com um grau de liberdade. Consideramos uma equação da forma:

$$\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$$

onde $V : I \longrightarrow \mathbf{R}$ é uma função C^k , $k \geq 2$ em um intervalo aberto $I \subset \mathbf{R}$. Esta equação de segunda ordem é equivalente a um sistema conservativo com um grau de liberdade, com energia total $E(x, \dot{x}) = \dot{x}^2/2 + V(x)$, um integral primeiro do campo de vectores $v(x, \dot{x}) = (\dot{x}, -dV/dx)$ no plano.

Dado um valor e_0 de E , a trajectória ou trajectórias correspondentes a essa energia estão contidas em $\{(x, \dot{x}) \in \mathbf{R}^2 | E(x, \dot{x}) = e_0\}$, ou seja, $\dot{x} = \pm \sqrt{2(e_0 - V(x))}$.

Os pontos de equilíbrio de $v(x, \dot{x})$ correspondem aos pontos críticos de V , isto é, $(x_0, 0)$ é ponto de equilíbrio de v se x_0 for um zero do gradiente de V . Vamos analisar as trajectórias, começando pela vizinhança dos pontos críticos, que suporemos não degenerados (onde a segunda derivada não se anula).

LEMA 2.1 (Hadamard). *Dada uma função $f : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe C^k numa vizinhança I da origem, com $k \geq 1$, se $f(0) = 0$ então existe uma função g de classe C^{k-1} tal que $f(x) = xg(x)$.*

Demonstração:

Escrevendo:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \int_0^1 \frac{df}{dx}(tx) x dt = x \int_0^1 \frac{df}{dx}(tx) dt$$

basta tomar:

$$g(x) = \int_0^1 \frac{df}{dx}(tx) dt$$

□

Este resultado é um caso particular do seguinte, que tem uma demonstração análoga:

TEOREMA 2.2 (Lema de Hadamard). *Dada uma função $f : U \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe C^k numa vizinhança $U \subset \mathbf{R}^n$ da origem, com $k \geq 1$, se $f(0) = 0$ então existem uma funções $g_1, \dots, g_n$ de classe C^{k-1} tais que $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$.*

A partir do Lema de Hadamard obtemos:

LEMA 2.2 (Morse). *Dada uma função $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^k , com $k \geq 2$, se $f(0) = 0$ e $x = 0$ é um ponto crítico não degenerado de f , então existe numa vizinhança $J \subset I$ da origem um difeomorfismo $y = \varphi(x)$ de classe C^{k-2} , tal que, na variável y , f se escreve $f(y) = Cy^2$, onde $C = \pm 1$ conforme o sinal da segunda derivada de f na origem.*

Demonstração:

Aplicando duas vezes o lema de Hadamard, podemos escrever:

$$f(x) = x^2 g(x), \quad 2g(0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(0) \neq 0$$

e $y = \varphi(x) = x\sqrt{|g(x)|}$ é um difeomorfismo C^{k-2} numa vizinhança da origem. Fazendo a mudança de variável $y = \varphi(x)$, obtemos:

$$f(\varphi^{-1}(y)) = \pm y^2$$

como pretendíamos. $\square$

De novo este é um caso particular de um resultado para funções de n variáveis. Dada uma função $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^k , com $k \geq 2$, definida em um vizinhança $U \subset \mathbf{R}^n$ da origem dizemos que $x = 0$ é um *ponto crítico não degenerado* de f , se $Df(0) = 0$ e se a matriz da derivada segunda de f tiver determinante diferente de zero.

TEOREMA 2.3 (Lema de Morse). *Dada uma função $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^k , com $k \geq 2$, definida em um vizinhança $U \subset \mathbf{R}^n$ da origem, se $f(0) = 0$ e $x = 0$ é um ponto crítico não degenerado de f , então existe numa vizinhança $V \subset U$ da origem um difeomorfismo $y = \varphi(x)$ de classe C^{k-2} , tal que, nas variáveis $y = (y_1, \dots, y_n)$, f se escreve $f(y) = c_1 y_1^2 + \dots + c_n y_n^2$, onde $C = (c_1, \dots, c_n) = (\pm 1, \dots, \pm 1)$ é a assinatura da forma quadrática dada pela segunda derivada de f na origem.*

Pelo lema 2.2, na vizinhança de um ponto crítico os conjuntos de nível da energia são linhas que, no caso de um mínimo do potencial, são difeomorfas a uma família de elipses; no caso de um máximo do potencial os conjuntos de nível são difeomorfos a uma família de hipérbolas (figura 1).

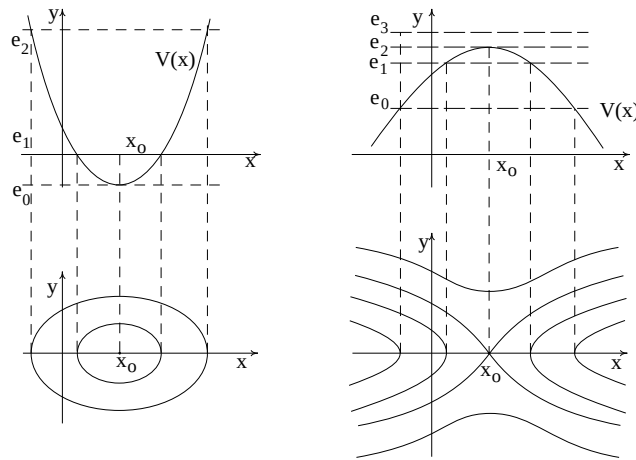


FIGURA 1

As órbitas são periódicas na vizinhança de um mínimo do potencial, e pode-se provar que o limite do período quando a amplitude tende para zero é o período da equação linear que

aproxima a equação inicial. A partir destes exemplos é fácil construir as órbitas de qualquer sistema conservativo, admitindo que o potencial não tenha pontos críticos degenerados.

3. Definição de estabilidade

Regressando agora aos campos de vectores gerais em um aberto U em $\mathbf{R}^n$, seja $v : U \longrightarrow TU$ um campo de vectores, e $\bar{x} \in U$ um ponto de equilíbrio de v . Designamos por $\varphi(t, x_0)$ uma solução de $\dot{x} = v(x)$ tal que $\varphi(0, x_0) = x_0$.

Diremos que $\bar{x}$ é um *ponto de equilíbrio estável* se: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, se $|x - \bar{x}| < \delta$ e $t > 0$ então $\varphi(t, x)$ está bem definido e $|\varphi(t, x) - \bar{x}| < \varepsilon$ (figura 2).

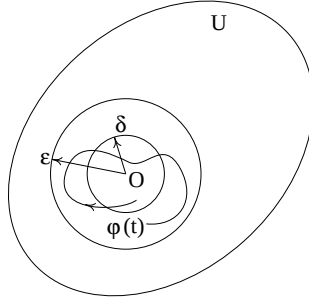


FIGURA 2. Ponto de equilíbrio estável: dada a vizinhança maior de raio ε , encontramos a vizinhança menor, de raio δ . Soluções que começam na vizinhança menor nunca saem da maior, para tempos positivos.

Um ponto de equilíbrio $\bar{x}$ é *atractor* se existir uma vizinhança $V \subset U$ de $\bar{x}$ tal que $\forall x \in V$ $\varphi(t, x)$ está bem definido para todo $t > 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = \bar{x}$. Nota : atractividade não implica estabilidade (figura 3).

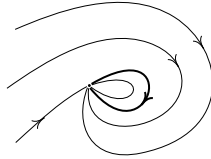


FIGURA 3. Perto de um ponto de equilíbrio atractor as órbitas podem afastar-se a uma distância arbitrariamente grande antes de se aproximarem do ponto.

Um ponto crítico $\bar{x}$ é *assintoticamente estável* se for simultaneamente atractor e estável.

Da definição de estabilidade resulta que, numa vizinhança de um ponto de equilíbrio estável, as soluções de $\dot{x} = v(x)$ são indefinidamente prolongáveis para a frente. A estabilidade de um ponto de equilíbrio se mantém quando se faz uma mudança de coordenadas.

TEOREMA 3.1 (Lagrange-Dirichlet). *Seja $H(x, p) = T(p) + V(x)$ um hamiltoniano com $T(p) = \frac{1}{2}p^T A p$ onde A é uma matriz simétrica positiva definida $n \times n$ e em que $V : U \longrightarrow \mathbf{R}$, é C^2 no aberto $U \subset \mathbf{R}^n$. Os pontos de equilíbrio do campo hamiltoniano v_H correspondem a pontos críticos de V ; se x_0 for um mínimo local estrito de V , então o ponto de equilíbrio $(x_0, 0)$ é estável.*

Demonstração:

Como $v_H(x, p) = \left(A p, -\frac{dV}{dx}(x) \right)$, os seus pontos de equilíbrio (x_0, p_0) satisfazem $\frac{dV}{dx}(x_0) = 0$ e $A p_0 = 0$. Como a matriz A é positiva definida, então ela é inversível e por isso $p_0 = 0$.

Se x_0 for um mínimo local estrito de V , então existe $\eta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \eta$ então $V(x) - V(x_0) > 0$; seja $\varepsilon \in]0, \eta[$ e $\mu = \min\{H(x, p) - V(x_0), |(x, p) - (x_0, 0)| = \varepsilon\}$. É claro que $\mu > 0$.

É fácil verificar que $E(x, \dot{x}) = T(p) + V(x) - V(x_0)$ também é um integral primeiro do sistema e que $(x_0, 0)$ é um mínimo local estrito de E ; como $E(x_0, 0) = 0$, podemos por continuidade escolher $\delta > 0$ tal que se $|(x_1, p_1) - (x_0, 0)| < \delta$ teremos $E(x_1, p_1) < \mu$. Designemos por $\varphi(t)$ a solução com condição inicial (x_1, p_1) para $t = 0$.

Como E é constante ao longo das soluções, será $E(\varphi(t)) \equiv E(x_1, p_1)$ para $t \in \mathbf{R}^+$. Por construção, $E(\varphi(0)) < \varepsilon$ e portanto teremos sempre $|\varphi(t) - (x_0, 0)| < \varepsilon$ para $t \geq 0$: se para algum $t_0 > 0$ tivéssemos $|\varphi(t_0) - (x_0, 0)| = \varepsilon$ então $E(\varphi(t_0)) \geq \mu$ por construção, o que seria um absurdo. $\square$

É fácil verificar que os sistemas conservativos não têm pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis: de facto a sua existência implicaria que a energia total seria constante na sua vizinhança, o que é impossível.

4. Métodos de Liapunov

Podemos generalizar o método usado acima, agora para campos de vectores não necessariamente conservativos, substituindo a energia do sistema conservativo por uma função com propriedades semelhantes. A propriedade que queremos é que $f(0) = 0$ e que $f(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ em uma vizinhança V da origem. Uma função $f : V \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ nestas condições diz-se *positiva definida* em V . Esta definição depende do domínio V , por exemplo, a expressão $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -x^2(x - 1)(x + 1)$ define uma função positiva definida em qualquer intervalo contido em $] -1, 1[= V$, mas não em intervalos que contenham os pontos ± 1 em que f se anula.

TEOREMA 4.1 (Liapunov). *Seja $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ uma função de classe C^1 positiva definida em uma vizinhança V da origem de $\mathbf{R}^n$ e v um campo de vectores de classe C^k , $k \geq 1$ em V com $v(0) = 0$. Então:*

- (1) *Se $L_v f(x) \leq 0$, para todo $x \in V$ então a origem é estável.*
- (2) *Se $L_v f(x) < 0$, para $x \in V$ e $x \neq 0$, a origem é assintoticamente estável.*

Demonstração:

Seja $f : V \rightarrow \mathbf{R}$, e consideremos $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ tal que $\{|x| \leq \varepsilon\} \subset V$; tomando $\mu = \min\{f(x), |x| = \varepsilon\}$, temos $\mu > 0$. Por continuidade, $\exists \delta \in \mathbf{R}^+$ tal que $|x| < \delta \Rightarrow f(x) < \mu$.

Seja $\varphi(t, x_0)$ a solução de $\dot{x} = v(x)$, $x(0) = x_0$ com $|x_0| < \delta$. Como $f(\varphi(t, x_0))$ é decrescente com t e $f(\varphi(0, x_0)) < \mu$, então para todo t positivo $f(\varphi(t, x_0)) < \mu$. A órbita de x_0 não pode sair da bola de raio ε , porque para $|y| = \varepsilon$ temos $f(y) \geq \mu$; portanto a origem é estável e está provada a afirmação 1.

Supondo que $L_v f(x) < 0$ quando $x \neq 0$, a origem será assintoticamente estável se provarmos que $\varphi(t, x_0) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Seja f_∞ o limite de $f(\varphi(t, x_0))$ quando $t \rightarrow \infty$, que existe porque a função $t \mapsto f(\varphi(t, x_0))$ é estritamente decrescente e limitada inferiormente.

É claro que $f_\infty \geq 0$; se $f_\infty = 0$ teremos, pela continuidade de f , que $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x_0)$ existe e é igual a zero.

Suponhamos por absurdo que $f_\infty > 0$; por continuidade de f , existe $\eta > 0$ tal que, se $|x| < \eta$ então $f(x) < f_\infty$. Logo $\varphi(t, x_0)$ nunca entra na bola de raio η , isto é,

$$\varphi(t, x_0) \in \{x \in V : |x| \in [\eta, \delta]\}$$

que é um conjunto compacto.

Nesse conjunto, $L_v f$ tem um máximo $-\nu < 0$, e como

$$f(\varphi(t, x_0)) = f(x_0) + \int_0^t L_v f(\varphi(\tau, x_0)) d\tau \leq f(x_0) - \nu t$$

para t suficientemente grande $f(\varphi(t, x_0))$ será menor que f_∞ , o que é impossível; a contradição prova que $f_\infty = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x_0) = 0$. $\square$

Nota: este e outros resultados e definições desta secção são perfeitamente análogos para pontos de equilíbrio $x_0 \neq 0$, basta uma mudança de coordenadas simples — uma translação — para obtermos a situação anterior.

O conjunto $\mathcal{A}(x_0) = \{x \in U \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x) = x_0\}$ é o *domínio de atracção* ou *bacia de atracção* do ponto de equilíbrio x_0 . Para condições iniciais em $\mathcal{A}(x_0)$ depois de um período de transição o estado observado do sistema será x_0 . Normalmente é muito difícil determinar esse conjunto, mas da demonstração da segunda parte do teorema anterior resulta que $\{|x| < \delta\} \subset \mathcal{A}(0)$. Em particular, se f for globalmente positiva definida (isto é, $V = \mathbf{R}^n$) e se $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, virá $\mathcal{A}(0) = \mathbf{R}^n$.

TEOREMA 4.2 (Cetaev). *Seja $U \subset \mathbf{R}^n$ uma vizinhança da origem, $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ uma função C^1 e v um campo de vectores em U de classe C^k , $k \geq 1$ com $v(0) = 0$. Se existir um aberto $V \subset U$ tal que:*

- (1) *para todo $x \in V$, $f(x) > 0$ e $L_v f(x) > 0$;*
- (2) *$x \in (\partial V) \cap U \Rightarrow f(x) = 0$;*
- (3) *$0 \in \partial V$;*

então a origem é instável.

Demonstração:

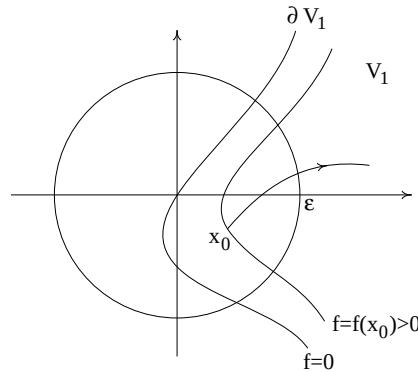


FIGURA 4. Órbita que se afasta da origem no Teorema de Cetaev

Queremos provar que para todo $\varepsilon > 0$ tal que $\{x : |x| \leq \varepsilon\} \subset U$, se $x_0 \in V$ e $|x_0| < \varepsilon$ então existe $t > 0$ tal que $|\varphi(t, x_0)| > \varepsilon$. Isto é natural porque para $x_0 \in V$; como $f(x_0) > 0$ e $L_v f(\varphi(t, x_0)) > 0$ se $\varphi(t, x_0) \in V$ temos que $f(\varphi(t, x_0)) > f(x_0)$. Nessas condições, iremos mostrar que $\varphi(t, x_0)$ só pode sair de V saindo de U .

Sejam então ε e x_0 arbitrários, tais que $\{x : |x| \leq \varepsilon\} \subset U$, $x_0 \in V$ e $|x_0| < \varepsilon$. O conjunto $K = \{x : |x| \leq \varepsilon \text{ e } f(x) \geq f(x_0)\}$ é compacto. Seja $\nu > 0$ o valor mínimo de $L_v f(x)$ em K (figura 4).

Como $\nu > 0$ e

$$f(\varphi(t, x_0)) = f(x_0) + \int_0^t L_v f(\varphi(\tau, x_0)) d\tau \geq f(x_0) + \nu t$$

se t for suficientemente grande $f(\varphi(t, x_0))$ será maior que o máximo de f em $\{|x| \leq \varepsilon\}$ e assim $|\varphi(t, x_0)| > \varepsilon$. Isto é, toda trajectória que comece dentro da bola centrada na origem de raio ε tem que deixar esta bola ao fim de algum tempo (figura 4). Logo a origem é instável. Note-se que $\varphi(t, x_0)$ não tem obrigatoriamente que deixar V se a função f for ilimitada nesse conjunto. $\square$

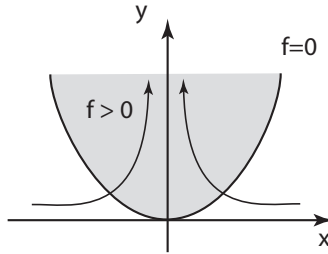


FIGURA 5. Exemplo 4.1 - aplicação do Teorema de Cetaev

EXEMPLO 4.1. O campo de vectores $v(x, y) = (-2x, 3y)$ tem um ponto de equilíbrio na origem. Para $f(x, y) = y - x^2$ temos que $L_v f(x, y) = 4x^2 + 3y$ e se $y > x^2$ então $f(x, y) > 0$ (figura 5). Logo, se $y > x^2$ então $L_v f(x, y) > 7x^2 > 0$ e podemos concluir que a origem é instável.

5. Equações lineares

Para estudar a estabilidade da origem em campos de vectores lineares utilizamos o seguinte resultado de álgebra linear:

LEMA 5.1. *Seja $A \in L(\mathbf{R}^n)$ tal que todos os valores próprios de A têm parte real pertencente a $]\alpha, \beta[\subset \mathbf{R}$; então existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathbf{R}^n$, tal que na norma correspondente $\alpha\|x\|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \leq \beta\|x\|^2$.*

EXEMPLO 5.1. A transformação linear $A : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ representada por

$$\begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$$

tem valores próprios $2 \pm 3i$ e vectores próprios $(3, 3 \pm i)$. Uma base de $\mathbf{R}^2$ é formada pela parte real e a parte imaginária dos vectores próprios $b_1 = (3, 3)$, $b_2 = (0, 1)$. Nesta base a transformação linear é representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{porque} \quad \begin{aligned} Ab_1 &= (6, 3) = 2b_1 - 3b_2 \\ Ab_2 &= (9, 11) = 3b_1 + 2b_2 \end{aligned}$$

Se escrevermos as coordenadas nessa base como $X = (x_1, x_2)$ e $Y = (y_1, y_2)$ e escolhermos o produto interno $\langle X, Y \rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ (a fórmula usual de produto interno escrita para coordenadas nessa base) então teremos

$$\langle AX, X \rangle = \langle (2x_1 - 3x_2, 3x_1 + 2x_2), (x_1, x_2) \rangle = 2x_1^2 + 2x_2^2 = 2\|X\|^2$$

EXEMPLO 5.2. A hipótese do lema 5.1 de que a parte real dos autovalores é estritamente menor que β é essencial. A transformação linear representada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

tem dois valores próprios iguais a 2. É claro que não é possível encontrar um produto interno em $\mathbf{R}^2$ tal que $\langle AX, X \rangle \leq 2\|X\|^2$, dado que, para qualquer produto interno, tem-se $\langle AX, X \rangle = \langle 2X, X \rangle + \langle NX, X \rangle = 2\|X\|^2 + \langle NX, X \rangle$ onde $N = A - 2I$.

A seguir veremos como uma boa escolha de produto interno (ou seja, a escolha de outras coordenadas em $\mathbf{R}^2$), e para $X \neq (0, 0)$ o termo

$$\frac{\langle NX, X \rangle}{\|X\|^2} = \frac{\langle AX, X \rangle}{\|X\|^2} - 2$$

pode ser feito tão pequeno quanto se queira, mas nunca igual a zero.

Os vectores $b_1 = (1, 0)$ e $b_2 = \frac{1}{\varepsilon}(0, 1)$ formam uma base de $\mathbf{R}^2$. Nessa base a transformação linear do exemplo é representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \varepsilon & 2 \end{pmatrix} \quad \text{porque} \quad \begin{aligned} Ab_1 &= (2, 1) = b_1 + \varepsilon b_2 \\ Ab_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Se (x, y) forem as coordenadas de X nessa base então

$$\frac{\langle AX, X \rangle}{\|X\|^2} = \frac{\langle NX, X \rangle}{\|X\|^2} + 2 = 2 + \varepsilon \frac{xy}{\|X\|^2} \leq \varepsilon M$$

onde M é o máximo da função $f(x, y) = xy$ na circunferência $\|X\| = 1$.

A demonstração do Lema 5.1 consiste em encontrar uma base de $\mathbf{R}^n$ em que A é representada por uma matriz triangular por blocos, em que cada bloco tem a forma adequada de um dos exemplos acima. Esta matriz se chama *forma canónica de Jordan* de A .

TEOREMA 5.1. *Seja $A \in L(\mathbf{R}^n)$ tal que todos os valores próprios de A têm parte real menor que $-\alpha < 0$ e seja $\varphi_A(t, x)$ o fluxo associado à equação diferencial $\dot{x} = Ax$. Então origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de $\dot{x} = Ax$ e sua bacia de atracção é $\mathbf{R}^n$. Mais precisamente:*

- (1) *Existe uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbf{R}^n$ tal que para todo $t > 0$ e para todo $x_0 \in \mathbf{R}^n$ $\|\varphi_A(t, x_0)\| \leq e^{-\alpha t} \|x_0\|$.*
- (2) *Existe um $M > 0$ tal que para todo $t > 0$ e para todo $x_0 \in \mathbf{R}^n$ $|\varphi_A(t, x_0)|M \leq e^{-\alpha t} \|x_0\|$.*
- (3) *Existe um homeomorfismo $h : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ que transforma as soluções de $\dot{x} = Ax$ com $x(0) = x_0$ nas soluções de $\dot{y} = -y$ com $y(0) = h(x_0)$.*

Demonstração:

Pelo Lema 5.1, existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para o qual se verifica a desigualdade $\langle Ax, x \rangle \leq -\alpha \|x\|^2$. Seja $\mathcal{L}(x) = \|x\|^2/2$, que é uma função positiva definida, com

$$L_A \mathcal{L}(x) = \langle A(x), x \rangle \leq -\alpha \|x\|^2 < 0 \quad \text{para } x \neq 0$$

Conclui-se pelo teorema 4.1 que a origem é assintoticamente estável. Esta estimativa quer dizer que a solução $\varphi_A(t, x_0)$ de $\dot{x} = Ax$ satisfazendo a condição inicial $\varphi_A(0, x_0) = x_0 \neq 0 \in \mathbf{R}^n$ verifica

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\varphi_A(t, x_0)\|^2 = \langle A\varphi_A(t, x_0), \varphi_A(t, x_0) \rangle \leq -\alpha \|\varphi_A(t, x_0)\|^2$$

logo para todo $t > 0$ tem-se que $\|\varphi_A(t, x_0)\|^2$ é menor que a solução da equação diferencial $\dot{y} = -\alpha y$, o que prova a afirmação (1). Como todas as normas em $\mathbf{R}^n$ definem métricas equivalentes, a afirmação (2) segue de (1).

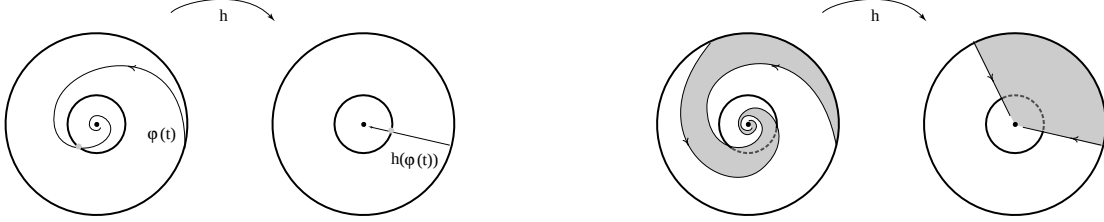


FIGURA 6

O homeomorfismo de (3) é construído da seguinte maneira: para $x \in \mathbf{R}^n$ com $|x| = 1$ tomamos $h(x) = x$. Para x com $|x| > 1$, por (2), existe um $\bar{t} > 0$ tal que $\varphi(\bar{t}, x) = x_1$ com $|x_1| = 1$ e tomamos $h(x) = e^{-\bar{t}}x_1$. Do mesmo modo, para $0 < |x| < 1$, tomamos $h(x) = e^{-\bar{t}}x_1$ onde $\bar{t} < 0$ é tal que $\varphi(\bar{t}, x) = x_1$ com $|x_1| = 1$. Temos assim um difeomorfismo $h : \mathbf{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}^n - \{0\}$ que transforma as soluções de $\dot{x} = Ax$ com $x(0) = x_0 \neq 0$ nas soluções de $\dot{y} = -y$ com $y(0) = h(x_0) \neq 0$. Para ver que h é um homeomorfismo basta verificar que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ e que $\lim_{x \rightarrow 0} h^{-1}(x) = 0$. $\square$

6. Equações não lineares

Podemos também estudar a estabilidade de um ponto de equilíbrio de um campo de vectores não linear a partir da estabilidade da sua linearização. Dado $\dot{x} = v(x)$ em $U \subset \mathbf{R}^n$ aberto com $x_0 \in U$ um ponto de equilíbrio, a sua *linearização* é

$$\dot{x} = Ax, \quad A = Dv(x_0).$$

TEOREMA 6.1. *Seja v um campo de vectores C^k , $k \geq 2$ em $U \subset \mathbf{R}^n$ aberto, $0 \in U$, e a origem um ponto de equilíbrio de v ; se os valores próprios de $A = Dv(0)$ tiverem parte real negativa, então a origem é assintoticamente estável.*

Demonstração:

Vamos adaptar a prova do Teorema 5.1: escolhemos $b, c \in \mathbf{R}^+$ tal que $\text{Re } \lambda_i < -b < -c$, para todos os valores próprios λ_i , $i = 1, \dots, n$. Então pelo Lema 5.1, existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ com norma associada $\|\cdot\|$ para o qual se verifica a desigualdade $\langle Ax, x \rangle \leq -b\|x\|^2$. Como $A = Dv(0)$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|v(x) - Ax\|}{\|x\|} = 0 \quad \text{logo} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\langle v(x) - Ax, x \rangle}{\|x\|^2} = 0$$

Portanto existe $\delta \in \mathbf{R}^+$ tal que se x estiver em $V = \{x \in \mathbf{R}^n, \|x\| < \delta\}$ então

$$|\langle v(x), x \rangle - \langle Ax, x \rangle| \leq (b - c)\|x\|^2$$

ou seja :

$$x \in V \Rightarrow \langle v(x), x \rangle \leq -c\|x\|^2$$

Sendo $\varphi(t, x_0)$ a solução de $\dot{x} = v(x)$ que satisfaz a condição inicial $\varphi(0, x_0) = x_0 \in V$, virá para todos os pontos $\varphi(t, x_0) \in V$:

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\varphi(t, x_0)\|^2 = \langle v(\varphi(t, x_0)), \varphi(t, x_0) \rangle \leq -c \|\varphi(t, x_0)\|^2 < 0$$

isto é, a solução $\varphi(t, x_0)$ com $x_0 \in V$ continuará em V em todos os pontos $t \in \mathbf{R}^+$ em que estiver definida e pelo teorema 4.1 conclui-se que a origem é assintoticamente estável. $\square$

A estabilidade assintótica de um ponto de equilíbrio x_0 não implica que os valores próprios de $A = Dv(x_0)$ tenham parte real negativa:

EXEMPLO 6.1. Seja $v(x, y) = (y - x^3, -x - y^3)$; a origem é um ponto de equilíbrio de v . Se considerarmos $f(x, y) = x^2 + y^2$ virá que $L_v f = -2(x^4 + y^4) < 0$ se $(x, y) \neq 0$, e a origem é assintoticamente estável; no entanto os valores próprios de $A = Dv(0, 0)$ são $\pm i$. Análogamente $v(x, y) = (y + x^3, -x + y^3)$ é instável, e os valores próprios correspondentes são os mesmos.

Dado um operador linear $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ definimos o seu *espectro* $\sigma(A)$ como o conjunto dos seus valores próprios.

TEOREMA 6.2. *Seja v um campo de vectores C^k com $k \geq 2$ definido em U , tal que $v(0) = 0$, e $A = Dv(0)$; se existir λ no espectro $\sigma(A)$ com $\text{Re } \lambda > 0$, a origem é instável.*

Demonstração:

A idéia é usar o teorema de Cetaev. Para construir a função f , podemos decompor $\mathbf{R}^n$ na soma directa de dois subespaços $\mathbf{R}^n = V_1 \oplus V_2$ invariantes para A e tais que, sendo $A_1 = A|_{V_1}$ e $A_2 = A|_{V_2}$, $\lambda \in \sigma(A_1) \Rightarrow \text{Re } \lambda > 0$ e $\lambda \in \sigma(A_2) \Rightarrow \text{Re } \lambda \leq 0$.

Escolhemos $a \in \mathbf{R}^+$ tal que $\lambda \in \sigma(A_1) \Rightarrow \text{Re } \lambda > a$; então existe um produto interno em V_1 tal que $\langle A_1 x, x \rangle_1 \geq a \|x\|^2$. Análogamente existe $\langle, \rangle_2$ em V_2 tal que $\langle A_2 x, x \rangle_2 \leq b \|x\|^2$ com $b \in \mathbf{R}^+$, e $b < a$.

A partir de $\langle, \rangle_1$ e $\langle, \rangle_2$ definimos um produto interno em $V_1 \oplus V_2 = \mathbf{R}^n$, através de $\langle x, y \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle_1 + \langle x_2, y_2 \rangle_2$, onde x_1, y_1 e x_2, y_2 são as componentes de x, y em V_1 e V_2 respectivamente.

Assim, tomando $v : U \subset V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1 \oplus V_2$ podemos escrever

$$v(x_1, x_2) = (v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2)) = (A_1 x_1 + R_1(x_1, x_2), A_2 x_2 + R_2(x_1, x_2))$$

onde $R(x_1, x_2) = (R_1(x_1, x_2), R_2(x_1, x_2))$ verifica

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^+ \exists \delta \in \mathbf{R}^+ \quad \|x\| < \delta \Rightarrow \|R(x)\| \leq \varepsilon \|x\|$$

Definimos o cone $K = \{(x_1, x_2) \in V_1 \oplus V_2 \mid \|x_1\| \geq \|x_2\|\}$, e $f : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow \mathbf{R}$ por $f(x_1, x_2) = 1/2(\|x_1\|^2 - \|x_2\|^2)$: f é C^1 , $f^{-1}(]0, +\infty[) = K$ e $\partial K = f^{-1}(0)$.

A derivada de Lie de f segundo v é dada por:

$$\begin{aligned} L_v f(x_1, x_2) &= \langle x_1, v_1(x_1, x_2) \rangle - \langle x_2, v_2(x_1, x_2) \rangle \\ &= \langle A_1 x_1, x_1 \rangle - \langle A_2 x_2, x_2 \rangle + \\ &\quad + \langle x_1, R_1(x_1, x_2) \rangle - \langle x_2, R_2(x_1, x_2) \rangle \end{aligned}$$

Para $\delta \in \mathbf{R}^+$ suficientemente pequeno, e se $x \in K$ e $\|x\| < \delta$ vem $L_v f(x) \geq 0$: como $| < x_1, R_1(x_1, x_2) > | + | < x_2, R_2(x_1, x_2) > | \leq 2\|x\| \|R(x)\|$ escolhemos $\delta \in \mathbf{R}^+$ tal que $\|x\| < \delta \Rightarrow \|R(x)\| \leq (a-b)\|x\|/4$ e nessa altura

$$L_v f(x_1, x_2) \geq a\|x_1\|^2 - b\|x_2\|^2 - \frac{(a-b)}{2}\|x\|^2$$

Como em K temos $\|x_1\|^2 \geq 1/2(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2) \geq 1/2\|x\|^2$ e $-\|x_2\|^2 \geq -\|x_1\|^2$ vem $L_v f(x) \geq \alpha\|x\|^2$ com $\alpha = (ab)/4 \in \mathbf{R}^+$.

Pelo teorema 4.2 a origem é então instável. $\square$

7. Comportamento assintótico

Consideremos, agora um campo de vectores v em um aberto $U \subset \mathbf{R}^n$; um conjunto $V \subset U$ é *v-invariante* se para todo $x \in V$ a trajectória $\varphi(t, x)$ está definida e pertence a V para $t \in \mathbf{R}$. O conjunto é *positivamente (negativamente) v-invariante* se isso se verifica para $t \in \mathbf{R}^+$ ($t \in \mathbf{R}^-$).

Dado um conjunto negativamente *v*-invariante $V \subset \mathbf{R}^n$ e $x_0 \in \mathbf{R}^n$, um ponto $y \in V$ é *α -limite* de $x_0 \in V$, ou $y \in \alpha(x_0)$, se existir uma sucessão de tempos $t_i \leq 0$ com $\{t_i\} \rightarrow -\infty$ quando $i \rightarrow \infty$, tal que $y = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(t_i, x_0)$. Analogamente, V é um conjunto positivamente *v*-invariante e se $x_0 \in V$, define-se *conjunto ω -limite* de x_0 , ou $\omega(x_0)$, como o conjunto dos pontos $y = \lim_{i \rightarrow +\infty} \varphi(t_i, x_0)$ para alguma sucessão de tempos $t_i \geq 0$ tais que $t_i \rightarrow +\infty$ quando $i \rightarrow \infty$.

TEOREMA 7.1. *Sejam $U \subset \mathbf{R}^n$ um aberto e um campo de vectores C^k em U , $k \geq 1$. Seja $V \subset U$ um conjunto positivamente *v*-invariante. Dado $x_0 \in V$, seja $\varphi^+(x_0)$ a imagem de $\varphi(t, x_0)$ para $t \in [0, +\infty[$. Então, em V , teremos:*

- (1) $\overline{\varphi^+(x_0)} = \varphi^+(x_0) \cup \omega(x_0)$
- (2) Se $\varphi^+(x_0)$ for limitado, então $\omega(x_0)$ é compacto e não vazio.
- (3) $\omega(x_0)$ é *v*-invariante.

Demonstração:

Como $\varphi^+(x_0) \subset \overline{\varphi^+(x_0)}$ e pela definição $\omega(x_0) \subset \overline{\varphi^+(x_0)}$, vem $\varphi^+(x_0) \cup \omega(x_0) \subset \overline{\varphi^+(x_0)}$.

Para completar a prova de (1) é preciso verificar que todo ponto de $\overline{\varphi^+(x_0)}$ pertence a $\varphi^+(x_0) \cup \omega(x_0)$.

Se $x \in \overline{\varphi^+(x_0)}$ então existe uma sucessão $\{t_i\}$, $t_i \in \mathbf{R}^+$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(t_i, x_0) = x$. Se $t_i \rightarrow \infty$ (ou se alguma subsucessão tender para ∞) então $x \in \omega(x_0)$; caso contrário, iremos mostrar que $x \in \varphi^+(x_0)$. Se nenhuma subsucessão de (t_i) tendesse para ∞ então existiria $\bar{t}$ e uma subsequência $\{t_j\}$ tal que $t_j < \bar{t}$, com $\varphi(t_j, x_0) \rightarrow x$. Como $\{t_j\}$ é uma sucessão limitada, existe uma subsucessão $\{t_k\}$ tal que $t_k \rightarrow t^* \in [0, \bar{t}]$; por continuidade $\varphi(t_k, x_0) \rightarrow \varphi(t^*, x_0)$, e $x \in \varphi^+(x_0)$ o que completa a demonstração de (1).

Seja $\{t_i\}$ uma sucessão com $t_0 = 0$ e $t_i \rightarrow +\infty$; é claro que $\omega(x_0) = \omega(\varphi(t_i, x_0))$. Por outro lado:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi^+(\varphi(t_i, x_0))} &= \varphi^+(\varphi(t_i, x_0)) \cup \omega(\varphi(t_i, x_0)) = \varphi^+(\varphi(t_i, x_0)) \cup \omega(x_0) \\ \cap_{i=0}^{\infty} \overline{\varphi^+(\varphi(t_i, x_0))} &= [\cap_{i=0}^{\infty} \varphi^+(\varphi(t_i, x_0))] \cup \omega(x_0) \end{aligned}$$

O termo dentro de parêntesis é $\omega(x_0)$ se $\varphi(t, x_0)$ é periódico, vazio caso contrário; de qualquer maneira

$$\omega(x_0) = \cap_{i=0}^{\infty} \overline{\varphi^+(\varphi(t_i, x_0))}$$

Se $\varphi^+(x_0)$ é limitado, $\omega(x_0)$ é a intersecção duma sucessão decrescente de conjuntos compactos não vazios, e portanto não vazio e compacto como na afirmação (2).

Para mostrar que $\omega(x_0)$ é v -invariante, seja $x \in \omega(x_0)$; pela definição de ω -limite, existe uma sucessão $\{t_i\} \rightarrow +\infty$ tal que $x = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(t_i, x_0)$. Se $t \in \mathbf{R}$, existe i_0 tal que $i > i_0 \Rightarrow t_i > |t|$ e portanto $\varphi(t + t_i, x_0)$ está bem definido (isto é, $t + t_i > 0$). Por outro lado:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(t + t_i, x_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(t, \varphi(t_i, x_0)), \quad i > i_0$$

e por continuidade:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(t + t_i, x_0) = \varphi(t, x)$$

isto é, $\varphi(t, x) \in \omega(x_0)$. □

Resultados análogos podem ser provados para $\alpha(x_0)$.

TEOREMA 7.2 (LaSalle). *Sejam $V \subset \mathbf{R}^n$ um aberto limitado, v um campo de vectores C^k em V , $k \geq 1$. Seja uma função C^1 , definida em um conjunto compacto que contenha V e tal que $L_v f \leq 0$ em V . Seja $E = \{x \in V : L_v f(x) = 0\}$, se M é o maior subconjunto invariante de E , então todas as soluções em V que são limitadas para $t \in \mathbf{R}^+$ convergem para M . Se em vez disto, $V = \mathbf{R}^n$ e $f(x) \rightarrow +\infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$, e $L_v f \leq 0$ então todas as soluções são limitadas para $t \in \mathbf{R}^+$ e convergem para M .*

Demonstração:

Seja $x_0 \in V$ tal que $t \rightarrow \varphi(t, x_0)$ é uma função limitada em $[0, +\infty[$. Como f está definida em um conjunto compacto de $\mathbf{R}^n$, então tem neste conjunto um valor mínimo, logo a função $t \rightarrow f(\varphi(t, x_0))$ é decrescente e limitada inferiormente, portanto existe $f_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(\varphi(t, x_0))$.

É claro que, por continuidade, $x \in \omega(x_0) \Rightarrow f(x) = f_\infty$. Caso haja mais que um ponto em $\omega(x_0)$ conclui-se que f é constante e igual a f_∞ em $\omega(x_0)$. Por outro lado, dado que $\omega(x_0)$ é invariante e f é constante em $\omega(x_0)$, então $L_v f \equiv 0$ em $\omega(x_0) \subset E$. Se $\omega(x_0)$ só contiver um ponto y , então y é um ponto de equilíbrio de v e por isso $L_v f(y) = 0$.

Pela definição de M e pela invariância do conjunto limite, $\omega(x_0) \subset M$.

Finalmente, se $V = \mathbf{R}^n$ e $f(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$, isto quer dizer que dado $k \in \mathbf{R}^+$ existe $\delta \in \mathbf{R}^+$ tal que $\|x\| > \delta \Rightarrow f(x) > k$. Escolhendo $k = f(x_0)$ vemos que para todo $t \geq 0$ tem-se $\varphi(t, x_0) \in \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leq \delta\}$, e portanto a solução $\varphi(t, x_0)$ é limitada para $t \geq 0$. □

Observe que o facto de V ser limitado e f estar definida em um conjunto compacto só foi usado para mostrar que f é limitada inferiormente em V . Assim, o resultado vale em um conjunto V qualquer desde que se possa garantir que f é limitada inferiormente em V .

8. Comparação de um campo de vectores com a sua linearização

Já vimos que o conhecimento da derivada de um campo de vectores em um ponto de equilíbrio permite tirar conclusões sobre a sua estabilidade, desde que a derivada não tenha valores próprios com parte real nula. Esta propriedade da derivada é suficientemente importante para merecer uma definição: um operador linear $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ diz-se *hiperbólico* se o seu espectro, $\sigma(A)$ não intersectar o eixo imaginário. Para sistemas lineares $\dot{x} = Ax$ sabemos que, se para todos os valores próprios $\lambda_i \in \mathbf{C}$ de A se verificar $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, então a origem é assintoticamente estável, e se para algum i se tiver $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ então origem

não é estável. Para os sistemas lineares hiperbólicos estes resultados definem claramente a situação e os sistemas lineares nessas condições são genéricos.

Um ponto de equilíbrio x_0 de $\dot{x} = v(x)$ é dito *hiperbólico* se todos os valores próprios de $Dv(x_0)$ tiverem parte real não nula, ou seja, se o sistema linearizado for hiperbólico. Neste caso é possível concluir bastante mais sobre o comportamento local das soluções:

TEOREMA 8.1 (Grobman-Hartman). *Seja $U \subset \mathbf{R}^n$ um conjunto aberto contendo a origem, v um campo de vectores C^k , $k \geq 1$ em U tal que $v(0) = 0$. Se $A = Dv(0)$ for hiperbólico, então existe uma vizinhança da origem $V \subset U$ e um homeomorfismo $h : V \rightarrow \mathbf{R}^n$ sobre uma vizinhança da origem, tal que h transforma as órbitas de $\dot{x} = v(x)$ em órbitas de $\dot{x} = Ax$.*

Observe que o resultado é local, e que não se garante a diferenciabilidade de h .

É possível decompor o espectro de qualquer operador linear $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ em uma união disjunta $\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_u(A) \cup \sigma_c(A)$ onde $\sigma_s(A)$ é o conjunto dos valores próprios de A com parte real negativa, $\sigma_u(A)$ é o conjunto dos valores próprios de A com parte real positiva e $\sigma_c(A)$ é o conjunto dos valores próprios de A com parte real igual a zero. A esta decomposição corresponde uma decomposição do espaço $\mathbf{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$, tal que $A(E^j) \subset E^j$ e $\sigma(A|_{E^j}) = \sigma_j(A)$, para $j = s, u, c$. Note-se que alguns destes subespaços podem ser triviais, se A não tiver valores próprios em alguma das componentes σ_j .

A equação diferencial $\dot{x} = Ax$ quando restringida a E^s , isto é a equação $\dot{y} = A|_{E^s} y$, tem a origem de E^s como ponto de equilíbrio assintoticamente estável; a origem de E^u é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de $\dot{z} = -A|_{E^u} z$. Estas propriedades são herdadas por uma equação diferencial não linear:

TEOREMA 8.2 (Variedade estável). *Seja $U \subset \mathbf{R}^n$ um conjunto aberto contendo a origem, v um campo de vectores C^k , $k \geq 1$ em U tal que $v(0) = 0$ e $A = Dv(0)$ com $\sigma_s(A) \neq \emptyset$. Então existe uma vizinhança da origem $V \subset U$ e uma aplicação $f : E^s \cap V \rightarrow (E^u \oplus E^c) \cap V$ de classe C^k tal que $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$, o gráfico de f é v -invariante e 0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável da restrição de $\dot{x} = v(x)$ ao gráfico de f .*

O gráfico da função f é chamado a *variedade estável local* do ponto de equilíbrio 0 . Considerando o campo de vectores $-v(x)$ segue-se a existência da *variedade instável local*, que também é v -invariante e tal que 0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável da restrição de $\dot{x} = -v(x)$ a este conjunto; a variedade instável local será o gráfico de uma função $g : E^u \cap W \rightarrow (E^s \oplus E^c) \cap W$ de classe C^k tal que $g(0) = 0$, $Dg(0) = 0$.

CAPÍTULO 3

Órbitas periódicas

1. Secções locais

Seja v um campo de vectores C^k , definido em um aberto $U \subset \mathbf{R}^n$; uma secção local S de v em $x_0 \in U$ é um aberto S num hiperplano H contendo x_0 e transverso a v , isto é, tal que se $x \in S$ então $v(x)$ não é paralelo a H (figura 1).

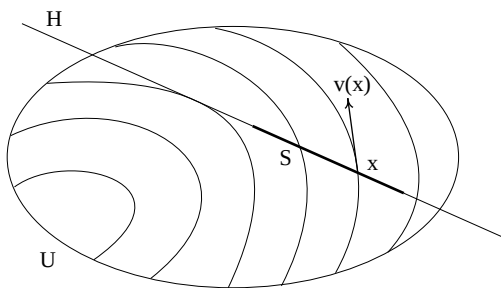


FIGURA 1

Pelo teorema da rectificação do fluxo, todos os pontos não singulares pertencem a uma secção local; já vimos como, a partir de uma secção local e do fluxo de v , podemos construir um difeomorfismo rectificador.

EXEMPLO 1.1. Para o campo de vectores em $\mathbf{R}^2$ dado por $v(x, y) = (-y, x - xy^2)$ e para $x_0 = (1, 0)$, seja H a recta $x = 1$; o vector $v(1, y) = (-y, 1 - y^2)$ só é paralelo a H para $y = \pm 1$ e por isso o segmento $S = \{(1, y) : -1 < y < 1\}$ é uma secção local de v no ponto $(1, 0)$.

TEOREMA 1.1. *Seja v um campo de vectores de classe C^k em $U \subset \mathbf{R}^n$ aberto. Se S for uma secção local de v em $x_0 \in U$, e $\varphi_v(t_0, x_0) = x_1 \in S$; então existem uma vizinhança U_0 de x_0 e uma aplicação C^k $\tau : U_0 \longrightarrow \mathbf{R}$ tais que:*

- (1) $\tau(x_0) = t_0$.
- (2) $\varphi(\tau(x), x) \in S$.
- (3) τ é única (com U_0 fixo).

Demonstração:

Queremos obter uma função $G(t, x)$ que se anule exactamente quando $\varphi(t, x) \in H$ e aplicar o teorema da função implícita. A função G será a composta de uma aplicação f com o fluxo φ , em que $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ se anula exactamente em H .

Se h for um vector ortogonal ao hiperplano H e se o ponto x_1 estiver em H então podemos escrever H como $H = \{y \in \mathbf{R}^n : y = x_1 + x \text{ com } h \cdot x = 0\}$, onde $\cdot$ denota o produto escalar, ou seja, podemos escrever $H = \{y \in \mathbf{R}^n : h \cdot (y - x_1) = 0\}$. Com esta notação, $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(y) = h \cdot y$ é uma aplicação linear cujo núcleo é $h^\perp$, o espaço vectorial

paralelo ao hiperplano H . A transversalidade significa que $h \cdot v(x_1) \neq 0$. Consideremos a função $G(t, y) = h \cdot (\varphi(t, y) - x_1)$; G é C^k e

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t_0, x_0) = h \cdot v(x_1) \neq 0$$

Pelo teorema da função implícita, existe uma vizinhança V de x_0 e uma única função C^k nesta vizinhança $\tau_V : V \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $\tau_V(x_0) = t_0$ e $G(\tau_V(x), x) = 0$ (ou equivalentemente $\varphi(\tau_V(x), x) \in H$). Por continuidade, tomamos $U_0 \subset V$ e $\tau = \tau_V|_{U_0}$ de modo que $\tau(U_0) \subset S$ $\square$

2. Campos de Vectores no Plano

Considerando campos de vectores em $\mathbf{R}^2$ (como faremos a partir de agora) é fácil ver que a intersecção de uma recta com uma trajectória dá origem a uma sucessão de pontos, possivelmente finita, que pode ser interpretada como uma sucessão sobre a trajectória ou sobre a recta.

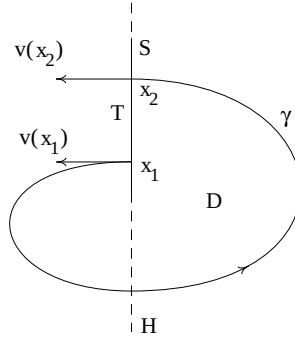


FIGURA 2

Seja $\{x_i\}$ uma sucessão de pontos na órbita de $x \in U$; a sucessão é monótona ao longo da trajectória se $x_i = \varphi(t_i, x)$ com $\{t_i\}$ uma sucessão monótona. Seja $\{y_i\}$ uma sucessão de pontos sobre uma recta H ; a sucessão é monótona ao longo da recta se $y_i - y_1 = \lambda_i(y_2 - y_1)$ com $1 = \lambda_2$ e $\{\lambda_i\}$ uma sucessão monótona crescente.

Em geral, monotonicidade sobre uma trajectória não implica monotonicidade sobre uma recta, mas para uma secção local de um campo de vectores em $\mathbf{R}^2$ podemos obter:

TEOREMA 2.1. *Seja S uma secção local do campo de vectores v , definido em $U \subset \mathbf{R}^2$, e $\{x_i\} = \gamma \cap S$, onde γ é uma trajectória de v . Se $\{x_i\}$ é monótona sobre γ , é também monótona sobre S .*

Demonstração:

Seja Γ a curva fechada simples constituída por: a parte de γ entre x_1 e x_2 e o segmento $T \subset S$, entre x_1 e x_2 (ver figura 2). Pelo teorema da curva de Jordan, Γ limita um subconjunto compacto D de $\mathbf{R}^2$. Vamos supor que v aponte para o exterior de D em x_2 ; é óbvio, a partir da transversalidade, que v aponta para o exterior de D em qualquer ponto da intersecção com T , excepto em x_1 e x_2 , onde v é tangente à fronteira de D (figura 2); caso contrário, v seria tangente a S em algum ponto entre x_1 e x_2 .

O complementar de D , $\mathbf{R}^2 - D$, é positivamente invariante; em particular $\varphi(t, x_2) \in \mathbf{R}^2 - D$ para $t \in \mathbf{R}^+$ e portanto $x_3 \in \mathbf{R}^2 - D$. Isto mostra que x_3 não pode estar entre x_1 e x_2 , e se estivesse para o lado oposto de x_1 em relação a x_2 estaria em D o que é impossível.

Os mesmos argumentos podem ser aplicados quando v aponta para o interior de D . $\square$

Usando este teorema é fácil mostrar que, em $U \subset \mathbf{R}^2$, uma trajectória não periódica é a imagem difeomórfica de um intervalo aberto de $\mathbf{R}$.

TEOREMA 2.2. *Seja v um campo de vectores em um aberto de $\mathbf{R}^2$, se $y \in \alpha(x_0) \cup \omega(x_0)$ então a trajectória de y intersecta qualquer secção local em não mais que um ponto.*

Demonstração:

Já vimos que $x \in \alpha(x_0) \Rightarrow \varphi(t, x) \in \alpha(x_0)$, para todo $t \in \mathbf{R}$, e analogamente para $x \in \omega(x_0)$. Se $x \in \alpha(x_0)$ e se S é uma secção local de v em x então podemos encontrar uma sucessão $\{t_i\}$ com $t_i \rightarrow -\infty$ tal que $\varphi(t_i, x_0) \rightarrow x$. Como $t_i \rightarrow -\infty$ podemos supor (se necessário passando a uma subsucessão) que $\{t_i\}$ é monótona decrescente.

Suponhamos que exista uma secção local, S , tal que $\{y_1, y_2\} \in \gamma(y) \cap S$ com y_1 e y_2 distintos e que $y \in \alpha(x_0)$ (a demonstração para $\omega(x_0)$ é análoga). Como y_1 e y_2 pertencem a $\alpha(x_0)$ existem duas sucessões $\{t'_i\}$ e $\{t''_i\}$ com $t'_i \rightarrow -\infty$ e $t''_i \rightarrow -\infty$ tais que $\varphi(t'_i, x_0) \rightarrow y_1$ e $\varphi(t''_i, x_0) \rightarrow y_2$, com $\varphi(t'_i, x_0)$ e $\varphi(t''_i, x_0)$ em S .

É possível formar, a partir de $\{t'_i\}$ e $\{t''_i\}$, uma sucessão monótona decrescente, eliminando as eventuais repetições, contendo uma infinidade de termos de $\{t'_i\}$ e $\{t''_i\}$; seja $\{\bar{t}_i\}$ essa sucessão. Então $\{\varphi(\bar{t}_i, x)\}$ é uma sucessão monótona sobre a trajectória de x , e pelo teorema anterior deverá também ser uma sucessão monótona sobre S . Isto contradiz o facto de ter dois pontos de acumulação y_1 e y_2 distintos. $\square$

Consideraremos órbita fechada como a imagem de uma solução periódica, e conjunto limite L será um conjunto verificando $L = \alpha(x_0)$ ou $L = \omega(x_0)$ para algum $x_0 \in U$.

TEOREMA 2.3 (Poincaré-Bendixson). *Um conjunto limite compacto que não contenha pontos singulares é uma órbita fechada.*

Demonstração:

Seja $L = \omega(x_0)$ e $y \in L$; vamos provar que a trajectória $\gamma(y)$ é fechada. É claro que $\omega(y) \subset L$; seja $x \in \omega(y)$ e S uma secção local de v em x . Do teorema anterior resulta que $\gamma(y) \cap S = \{\bar{x}\}$, e como $x \in \omega(y)$, vem $x = \bar{x}$ (figura 3): se $\bar{x} \neq x$, x não pode pertencer a $\omega(y)$.

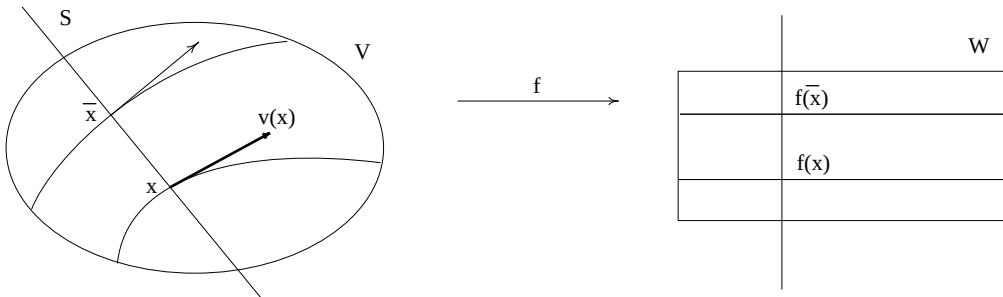


FIGURA 3

Também de $x \in \omega(y)$ vem que existem $\bar{t}_1$ e $\bar{t}_2$ distintos com $\varphi(\bar{t}_1, y) = \varphi(\bar{t}_2, y) = x$; que existe uma sucessão $\{t_i\}$, $t_i \rightarrow +\infty$ tal que $\varphi(t_i, y) \rightarrow x$. Dada uma vizinhança W de x , a partir de $i_0 \in \mathbf{N}$, $\varphi(t_i, y)$ pertence a W . Se tomarmos $S_0 \subset S$ e $W =]-\varepsilon, +\varepsilon[\times S_0$

de tal modo que o fluxo esteja rectificado em W , podemos escolher i_1 e $i_2 > i_0$, tais que $|t_{i_1} - t_{i_2}| > 2\varepsilon$. Da rectificação do fluxo, é óbvio que existem δ_1 e δ_2 em $] - \varepsilon, +\varepsilon[$ tais que

$$\varphi(t_{i_1} + \delta_1, y) = \varphi(t_{i_2} + \delta_2, y) = x, \quad \bar{t}_1 = t_{i_1} + \delta_1 \neq t_{i_2} + \delta_2 = \bar{t}_2$$

Daqui resulta que $\varphi(\bar{t}_2 - \bar{t}_1, y) = y$ e portanto $\gamma(y)$ é uma órbita fechada.

Falta agora provar que $\gamma(y) = L$; para isso é suficiente mostrar que, quando $t \rightarrow +\infty$, $d(\varphi(t, x_0), \gamma) \rightarrow 0$.

Seja S uma secção local de v em y ; é óbvio que $S \cap \gamma(y) = \{y\}$. Usando o teorema da rectificação de fluxo, como atrás, existe uma sucessão $\{t_i\}$ com $t_1 < t_2 < \dots$ tal que $x_i = \varphi(t_i, x_0) \in S$ e $x_i \rightarrow y$ monotonamente em S , com $\varphi(t, x_0) \notin S$ quando $t \in]t_i, t_{i+1}[$.

Existe um supremo finito para o conjunto $\{t_{i+1} - t_i\}$: se $\varphi(T, y) = y$, e x_i está suficientemente próximo de y , virá $\varphi(T + t, x_i) \in S$ com $t \in] - \varepsilon, +\varepsilon[$; isto é, $t_{i+1} - t_i \leq T + \varepsilon$ para $i > i_0$. Seja $\bar{\varepsilon} \in \mathbf{R}^+$; pela continuidade do fluxo, existe $\delta \in \mathbf{R}^+$ tal que

$$|x_i - y| < \delta, \quad |t| \leq T + \varepsilon \Rightarrow |\varphi(t, x_i) - \varphi(t, y)| < \bar{\varepsilon}$$

Tomamos i^* tal que $i > i^* \Rightarrow |x_i - y| < \delta$.

Seja $t > t_{i^*}$ e $i > i^*$ tais que $t \in [t_i, t_{i+1}]$; então $d(\varphi(t, x_0), \gamma) \leq |\varphi(t, x_0) - \varphi(t - t_i, y)| = |\varphi(t - t_i, x_i) - \varphi(t - t_i, y)| < \bar{\varepsilon}$, isto é, $d(\varphi(t, x_0), \gamma) \rightarrow 0$. $\square$

Um ciclo limite é uma órbita fechada γ , tal que $\gamma \in \alpha(x)$ ou $\gamma \in \omega(x)$ para algum $x \in U - \gamma$. Um ciclo ω -limite tem estabilidade lateral (figura 4).

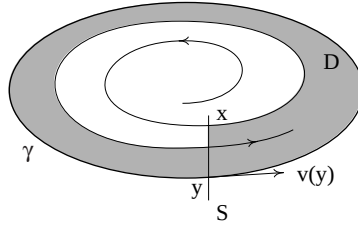


FIGURA 4. As trajectórias dos pontos na área cinzenta D tendem para γ .

Tomando uma secção local S em $y \in \gamma$, e $x \in S$ tal que $\omega(x) = \gamma$, então os pontos de S que estão entre x e y também têm trajectórias que tendem para γ que, para $t > 0$, estão na área cinzenta D da figura 4 e além disso:

TEOREMA 2.4. *O conjunto $A = \{x \in U - \gamma, \mid \omega(x) = \gamma\}$ é aberto.*

Demonstração:

Seja $x \in A$; para $t \in \mathbf{R}^+$ suficientemente grande, $\varphi(t, x) \in \text{int } D$. Tomando $V = \varphi(-t, \text{int } D)$, e como $y \mapsto \varphi(-t, y)$ é um difeomorfismo, V é aberto e $x \in V = \text{int } V \subset A$. $\square$

TEOREMA 2.5. *Seja K um conjunto compacto, positiva ou negativamente invariante; então K contém ou uma órbita fechada ou um ponto singular.*

TEOREMA 2.6. *Seja γ uma órbita fechada contida em U , e V o aberto limitado por γ em $\mathbf{R}^2$: se $V \subset U$, v tem um ponto de equilíbrio em V .*

Demonstração:

Vamos supor que V não contenha pontos de equilíbrio nem órbitas fechadas. Aplicando o teorema de Poincaré-Bendixson a $D = V \cup \gamma$, virá $\gamma = \alpha(x) = \omega(x)$ para $x \in V$. A área cinzenta na figura anterior é positivamente invariante; por outro lado como $\gamma = \alpha(x)$, existe $t \in \mathbf{R}^-$ tal que $\varphi(t, x)$ está nesta região. Como $\varphi(-t, \varphi(t, x)) = x$ e $-t \in \mathbf{R}^+$ há contradição; conclui-se portanto que v contém pontos de equilíbrio ou órbitas fechadas.

Supondo que não contenha pontos de equilíbrio, seja A o ínfimo das áreas limitadas por órbitas fechadas em V . Existe uma sucessão γ_n de órbitas fechadas definindo áreas A_n , com $A_n \rightarrow A$; tomamos $x_n \in \gamma_n$. Como D é compacto, existe uma subsucessão de $\{x_n\}$, que denotaremos ainda pelo mesmo símbolo, convergente para $x \in D$.

A órbita β de x é fechada, senão deveria aproximar-se de um ciclo limite, e do teorema anterior resulta que o mesmo se passaria para as trajectórias correspondentes a x_n , com x_n suficientemente próximo de x .

A área limitada por β é igual a A , já que quando $n \rightarrow \infty$, γ_n se aproxima arbitrariamente de β e portanto a área compreendida entre as duas curvas tende para zero. Assim no aberto limitado por β não haveria pontos de equilíbrio nem órbitas fechadas, o que contradiz a primeira parte da demonstração. $\square$

O critério a seguir é uma técnica especialmente útil para localizar as órbitas periódicas de uma forma indirecta, provando a sua não existência nos domínios a que é aplicado:

TEOREMA 2.7 (Critério de Bendixson). *Seja $V \subset \mathbf{R}^2$ um aberto simplesmente conexo, contido no domínio do campo de vectores v ; se:*

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \operatorname{Tr} \frac{\partial v}{\partial x}$$

tiver sinal constante em V e não for identicamente zero, não há órbitas fechadas contidas em V .

Demonstração:

Suponhamos que exista uma órbita fechada $\gamma \subset V$; pelo teorema de Green temos:

$$\int_{\gamma} (v_2, -v_1) = \iint_D \operatorname{div} v \, dx_1 \, dx_2$$

onde D é a área limitada por γ . Por outro lado $v \cdot (v_2, -v_1) \equiv 0$ e portanto o integral acima é zero, que é impossível se $\operatorname{div} v \geq 0$ (ou $\operatorname{div} v \leq 0$) em D , com desigualdade estrita num aberto não vazio. $\square$

Note-se que este critério nada permite concluir de positivo sobre a existência de órbitas periódicas, simplesmente fornece um critério de não existência.

CAPÍTULO 4

Exemplos

1. Equações de Liénard e van der Pol

Passamos agora ao estudo de alguns tipos de equações diferenciais, onde as técnicas apresentadas anteriormente podem ser usadas.

EXEMPLO 1.1 (Equação de Liénard). A equação de Liénard é uma equação diferencial de segunda ordem do tipo:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

onde suporemos:

- (1) $f, g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ são funções C^1 .
- (2) f é par, e $f(0) < 0$.
- (3) g é ímpar, $x \neq 0 \Rightarrow xg(x) > 0$.
- (4) $F(x) = \int_0^x f(u) du \rightarrow \pm\infty$ quando $x \rightarrow \pm\infty$.
- (5) F tem um único zero positivo $x = \alpha$, e é monótonamente crescente para $x \geq \alpha$.

TEOREMA 1.1 (Liénard). *Nas condições acima, a equação de Liénard tem uma única solução periódica não trivial, que é um ciclo limite estável.*

Demonstração:

Se fizermos $y = \dot{x} + F(x)$, e passando das variáveis $(x, \dot{x})$ para (x, y) , obtemos o campo de vectores $v(x, y) = (y - F(x), -g(x))$. É fácil verificar que a origem é o único ponto singular, e portanto qualquer órbita fechada rodeia a origem. Por outro lado, se $\varphi(t)$ é uma solução, $-\varphi(t)$ também é solução e uma qualquer órbita fechada será simétrica em relação à origem. Para um esboço do retrato de fase, é conveniente considerar a curva Γ correspondente ao gráfico de F ; teremos, lembrando que $g(0) = 0$, a figura 1.

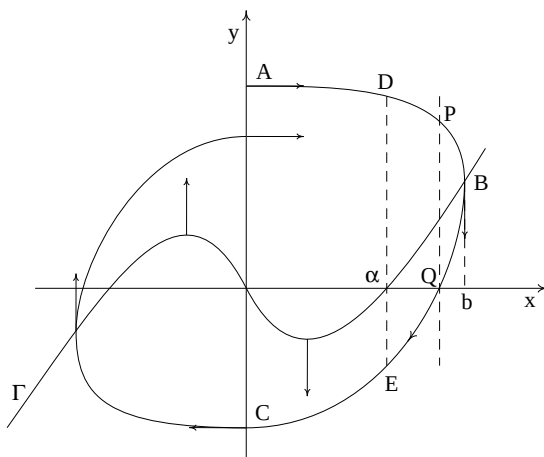


FIGURA 1

Note-se que só pode haver um ponto de intersecção, com abcissa positiva, de Γ com uma órbita, que fica abaixo de Γ desde B até ao cruzamento de C com o eixo dos x . Assim, cada órbita é caracterizada por b , e designá-la-emos por γ_b .

Se a órbita é fechada, deverá ser $OA = -OC$: se tal não se verificar a simétrica dela em relação à origem será também uma órbita do campo de vectores, e obviamente as duas intersectam-se. Por outro lado se $OA = -OC$ a órbita correspondente é fechada: basta completar ABC com a simétrica em relação à origem.

Consideremos $\Psi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ dado por $\Psi(x, y) = y^2/2 + G(x)$, onde $G(x) = \int_0^x g(u) du$; a condição $OA = -OC$ pode escrever-se $\Psi(A) = \Psi(C)$. Por outro lado $L_v \Psi = (g, y) \cdot (y - F, -g) = -Fg$ e portanto:

$$\Psi(C) - \Psi(A) = \int_{t_A}^{t_C} L_v \Psi(\gamma_b(t)) dt = - \int_{t_A}^{t_C} F(x(t))g(x(t)) dt$$

com $\gamma_b(t) = (x(t), y(t))$ e $\gamma_b(t_A) = A$, $\gamma_b(t_C) = C$. Podemos mudar de variável, de t para y , obtendo então:

$$\Psi(C) - \Psi(A) = \int_A^C F(x(y)) dy \quad \left(\frac{dy}{dt} = -g \right)$$

e se considerarmos a função $b \mapsto \eta(b) = \Psi(C) - \Psi(A)$ concluímos que, se $0 \leq b \leq \alpha$, $F(x(y)) < 0$ excepto em A , C e eventualmente num outro ponto quando $b = \alpha$, e portanto $\eta(b) > 0$.

Vamos ver que no intervalo $[\alpha, +\infty[$ a função η é monótona decrescente e tende para $-\infty$ quando $b \rightarrow +\infty$; escrevendo $\eta(b) = \eta_1(b) + \eta_2(b)$ com:

$$\eta_1(b) = \int_A^D F dy + \int_E^C F dy, \quad \eta_2(b) = \int_D^E F dy$$

é claro que $\eta_1(b) > 0$ e $\eta_2(b) < 0$ para $b > \alpha$; para calcular η_1 podemos considerar x como a variável de integração, e virá:

$$\eta_1(b) = \int_A^D -\frac{Fg}{y-F} dx + \int_E^C -\frac{Fg}{y-F} dx$$

Quando b aumenta, o arco AD sobe, y correspondente aumenta, e a função a integrar no primeiro termo diminui, já que é positiva; o segundo termo pode escrever-se:

$$\int_C^E \frac{Fg}{y-F} dx$$

e como quando b aumenta, o arco baixa e a função a integrar diminui, já que é positiva e o denominador aumenta em valor absoluto. Conclui-se que η_1 é monótona decrescente em $[\alpha, +\infty[$.

A transformação $(x, y) \rightarrow (F(x), y)$ leva o arco DE no arco $D'E'$ e η_2 é a área limitada por esse arco e pelo eixo dos y , em grandeza, e negativo. Quando b aumenta, a área aumenta e η_2 diminui. Seja $c > 0$; a recta $F = c$ intersecta o arco $D'E'$ nos pontos P' e Q' , cujos originais são P e Q ; $\eta_2(b) < -c|P'Q'|$ e como $|PQ|$ é arbitrariamente grande (dependendo de b) $\eta_2(b) \rightarrow -\infty$ quando $b \rightarrow +\infty$ (figura 2).

Podemos concluir que existe um único $b^* \in]\alpha, +\infty[$ tal que $\eta(b^*) = 0$; como já vimos que $\eta(b) = 0 \Leftrightarrow \Psi(C) = \Psi(A) \Leftrightarrow \gamma_b$ fechada, existe uma única órbita fechada correspondente a b^* .

Se $b < b^*$ (dentro de γ_b^*) $\eta(b) > 0$, isto é, $|C^*C| < |A^*A|$; por simetria, o ponto de cruzamento seguinte de γ_b com $x = 0$ está mais próximo de A^* que C de C^* . Daí conclui-se que γ_b se vai aproximando de γ_b^* , e resultado análogo se obtém para $b > b^*$. Isto é, γ_b^* é estável. $\square$

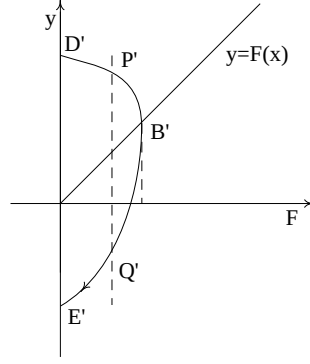


FIGURA 2

A hipótese 5 garante a unicidade do ciclo limite; sem ela tudo o resto é absolutamente análogo, com ciclos limites estáveis se $d\eta/db > 0$ para os valores correspondentes de b .

EXEMPLO 1.2 (Equação de van der Pol). A equação de van der Pol, com parâmetro $\mu \in \mathbf{R}$, é dada por:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

É óbvio que para $\mu \in \mathbf{R}^+$ a equação de van der Pol é um caso particular de equação de Liénard, e tem portanto um único limite estável. Para além disso podemos provar:

TEOREMA 1.2. *Todas as órbitas não triviais tendem para o ciclo limite.*

Demonstração:

Da demonstração do teorema anterior resulta que todas as órbitas não triviais no interior do ciclo limite tendem para o ciclo limite, assim como aquelas que começam fora do ciclo limite, mas suficientemente próximo. É fácil ver que todas as órbitas cruzando a parte positiva do eixo dos y tendem para o ciclo limite γ (figura 3).

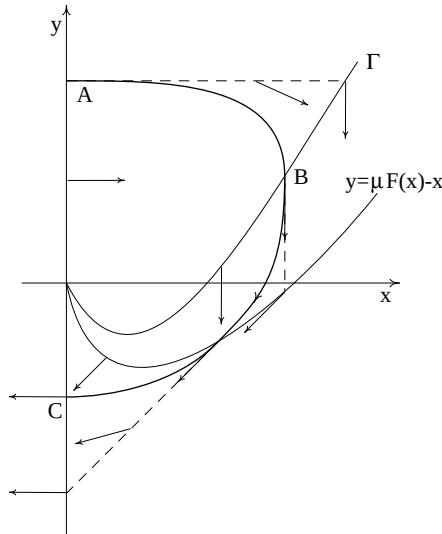


FIGURA 3

Da figura 3 é fácil concluir que existe D (o ponto C é o cruzamento da órbita iniciada em A com a curva $y = \mu F(x) - x$ sobre a qual $dy/dx = 1$). Por simetria conclui-se que a órbita depois de passar em D cruza o eixo dos y na parte positiva enrolando para dentro se $b > b^*$ e para fora se $b < b^*$. É fácil ver que o argumento se aplica a qualquer ponto entre o gráfico de $y = \mu F(x) - x$ e a parte positiva do eixo dos y .

Seja agora A fora desse domínio, com abcissa positiva; se $A = (x_0, y_0)$, existe k positivo tal que $y_0 > \mu F(x_0) - kx_0$ e então a figura 3 pode repetir-se, substituindo o gráfico de $y = \mu F(x) - x$ pelo gráfico de $y = \mu F(x) - kx$ e a recta de declive 1 por uma recta de declive $1/k$. Por simetria, ficam consideradas todas as situações possíveis, todas as órbitas são espirais em torno da origem. Da análise do sinal de $\eta(b)$ conclui-se que todas as órbitas tendem para γ . $\square$

Nota: embora a demonstração correspondente seja um pouco mais delicada, este resultado também é válido para as equações de Liénard.

Quando $\mu \in [0, 1[$ é muito pequeno, podemos determinar o ciclo limite aproximadamente: Consideremos o campo de vectores $v(x, y) = (y + \mu v_1(x, y), -x + \mu v_2(x, y))$ como perturbação de $v_0(x, y) = (y, -x)$; sabemos que dado $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ é possível determinar $\mu_0 \in [0, 2\pi]$ se $\mu \in [0, \mu_0[$, que podemos escrever $\varphi_\mu(t, (x_0, y_0)) + O(\varepsilon)$ em $[0, 2\pi]$.

Seja $A = (0, A)$, $A > 0$ e γ_μ a órbita correspondente até ao reencontro com a parte positiva do eixo dos y ; procedendo como para a equação de Liénard, se $\Psi(x, y) = x^2/2 + y^2/2$ a análise de

$$\eta(A) = \int_{\gamma_\mu} L_v \Psi$$

dirá se γ_μ é ou não fechada. Para a determinação aproximada de η substituímos γ_μ pela circunferência que passa por A , órbita de v_0 . Virá:

$$\eta(A) = \mu \int_0^{2\pi} (xv_1(x, y) + yv_2(x, y)) dt + O(\mu^2)$$

e se A_0 é um zero simples de $\eta_0(A) = \int_0^{2\pi} (xv_1(x, y) + yv_2(x, y)) dt$ existe próximo de A_0 um zero A^* de η , tanto mais próximo quanto menor for μ . Então a órbita de $A^* = (0, A^*)$ é um ciclo limite, estável se $d\eta/dA(A^*) > 0$.

Aplicando o precedente à equação de van der Pol, teremos:

$$\eta_0(A) = \mu \int_0^{2\pi} A \sin t \left(\frac{A^3}{3} \sin^3 t - A \sin t \right) dt = -\pi \mu A^2 \left(\frac{A^2}{4} - 1 \right)$$

portanto $A_0 = 2$: o ciclo limite da equação de van der Pol, para μ pequeno, passa por $A^* \approx (0, 2)$ e mantém-se próximo da circunferência de raio 2.

Vamos agora ver o que acontece quando $\mu \rightarrow +\infty$. Fazendo $\varepsilon = 1/\mu$ obtemos

$$v_\varepsilon(x, y) = \left(\frac{1}{\varepsilon} \left(y - \frac{x^3}{3} - x \right), -\varepsilon x \right)$$

Construímos um conjunto D_{ε_0} que contém o ciclo limite de v_ε (figura 4) para $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ e achamos o ‘limite’ de D_{ε_0} quando $\varepsilon_0 \rightarrow 0$: note-se que a amplitude do ciclo limite é 2, tal como para $\mu = 0$.

Dado $h \in \mathbf{R}^+$, existe $\varepsilon_0 \in \mathbf{R}^+$ tal que o domínio tracejado é positivamente invariante e portanto contém o ciclo limite. Quando $h \rightarrow 0$, e portanto $\varepsilon_0 \rightarrow 0$, o domínio tracejado tende para a órbita marcada a cheio. Como $\dot{x} = (y - (x^3/3 - x))/\varepsilon$ quando $(x, y) \notin \Gamma$, virá que $\dot{x} \rightarrow +\infty$; por outro lado se $(x, y) \in \Gamma$ a velocidade de processo é pequena. Aproximadamente podemos representar o campo como na figura 5.

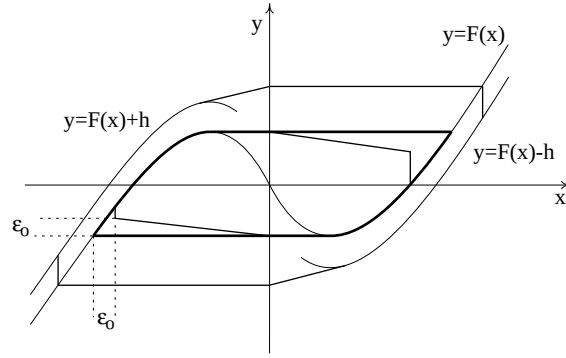


FIGURA 4

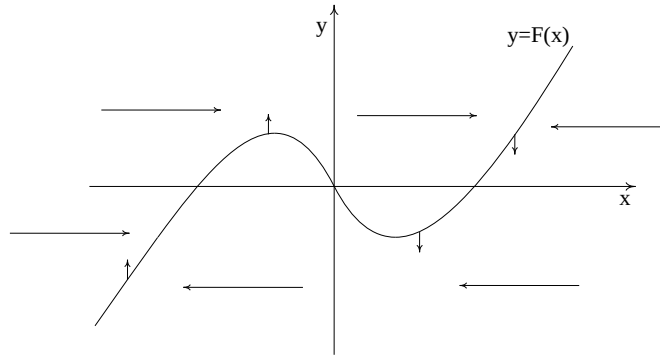


FIGURA 5

O movimento é rápido na horizontal, e lento sobre Γ . Ao ciclo limite corresponde uma oscilação com duas fases, uma rápida (na parte horizontal) e a outra lenta (sobre Γ). A este tipo de oscilações dá-se o nome de oscilações de relaxação. Para fenómenos oscilatórios apresentando uma fase rápida e uma fase lenta, é natural procurar modelos baseados na equação de van der Pol (por ser a mais simples equação em que se verificam oscilações de relaxação) ou em variantes dessa equação. Se observarmos x como função de t , o ciclo limite correspondente a $\varepsilon = 0$ virá como na figura 6.

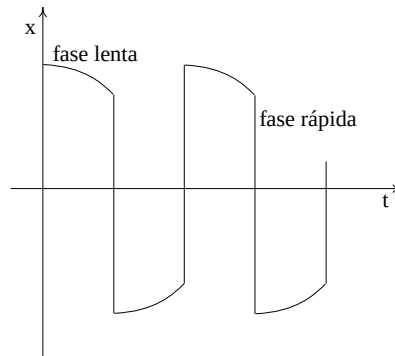


FIGURA 6

2. Modelos predador-presa

O modelo mais simples de crescimento de uma população é dado por $\dot{x} = \alpha x$, com $\alpha \in \mathbf{R}$: se $\alpha \in \mathbf{R}^+$ então $x(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow +\infty$, se $\alpha = 0$ vem $x(t) = x(0)$ e $x(t) \rightarrow 0$ se $\alpha \in \mathbf{R}^-$.

Podemos supôr que $\alpha = k(\beta - \beta_0)$, com $k \in \mathbf{R}^+$: por exemplo, sendo β a comida per capita, se $\beta < \beta_0$ a população decresce, $\beta = \beta_0$ significa que a população se mantém constante, e se β é maior que as necessidades mínimas representadas por β_0 , $x(t) \rightarrow +\infty$.

Na prática, espera-se que as populações não cresçam sem limite; num caso simples α será, não uma constante relativamente a x , mas $\alpha = k(\xi - x)$, isto é, o crescimento é positivo se a população é menor que ξ , mas negativo no caso contrário, $k \in \mathbf{R}^+$ (figura 7).

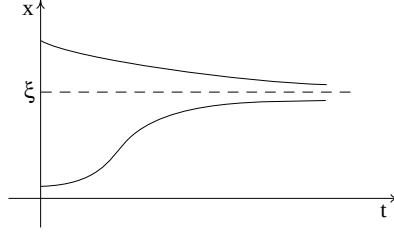


FIGURA 7

O campo de vectores $v(x) = k(\xi - x)x$ tem dois pontos singulares, a origem e ξ ; a partir da linearização de v é fácil ver que a origem é instável e ξ é assintoticamente estável: de facto, se $x_0 \in \mathbf{R}^+$, $\varphi(t, x_0) \rightarrow \xi$ quando $t \rightarrow +\infty$.

EXEMPLO 2.1 (Modelo de Volterra-Lotka). Este modelo, para duas espécies x e y , sendo x a presa e y o predador, baseia-se nas seguintes equações:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y)x \\ \dot{y} &= \beta(x)y\end{aligned}$$

onde

- $\alpha(y) = a - by$, a presença de predadores diminui o ritmo de crescimento das presas de modo linear, que é positivo na sua ausência ($a, b \in \mathbf{R}^+$).
- $\beta(y) = cx - d$, a presença de presas aumenta o ritmo de crescimento dos predadores de modo linear, que é negativo na sua ausência ($c, d \in \mathbf{R}^+$).

Consideremos o campo de vectores $v(x, y) = ((a - by)x, (cx - d)y)$ e estudemos os pontos singulares e a sua estabilidade: na região $x \geq 0, y \geq 0$ há dois pontos singulares, a origem e $(d/c, a/b)$.

Linearizando em relação à origem vem $v_l(x, y) = (ax, -dy)$ sendo portanto a origem instável. Linearizando em relação ao ponto $(d/c, a/b)$ virá $v_l(x, y) = (-ay, dx)$ cujos valores próprios são $\pm i\sqrt{ad}$; nada se pode concluir quanto à estabilidade por este método.

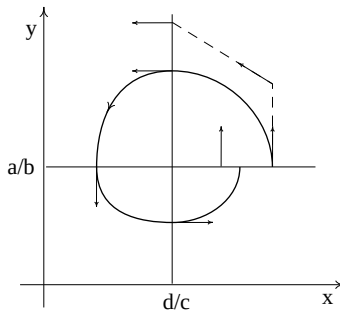


FIGURA 8

Completando a análise indicada pela figura 8, demonstra-se que todas as órbitas não triviais em $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ são espirais (eventualmente fechadas) em torno de $(d/c, a/b)$. A função $f : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x, y) = cx - d \log x + by - a \log y$ é um integral do sistema, e portanto as órbitas não triviais são as curvas de nível da função f .

Assim, $(d/c, a/b)$ é estável, e todas as órbitas não triviais em $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ são fechadas, contendo $(d/c, a/b)$ no seu interior. De facto, tomando $h(x, y) = \exp(f(x, y))$ vemos que $h(x, y) = g_1(x)g_2(y)$, onde $g_1(x) = e^{cx}x^{-d}$ e $g_2(y) = e^{by}y^{-a}$; estas duas funções são do mesmo tipo, e o gráfico de g_1 será como na figura 9.

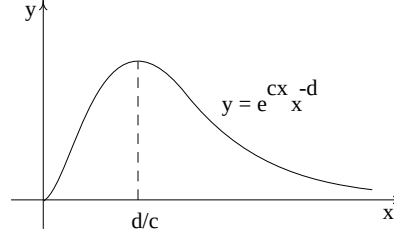


FIGURA 9

Daqui conclui-se que h tem máximo em $(d/c, a/b)$ e portanto as suas curvas de nível, ou de f , são fechadas rodeando esse ponto.

Definindo os valores médios $\bar{x}$ e $\bar{y}$ como:

$$\bar{x} = \int_0^T x(t) dt, \quad \bar{y} = \int_0^T y(t) dt$$

onde T é o menor período positivo, é fácil verificar que são iguais a d/c e a/b , respectivamente.

Vamos agora ver o efeito de caça de predadores e presas; foi o estudo deste fenómeno que levou Volterra ao estabelecimento do seu modelo, para análise dos resultados de pesca no Mediterrâneo de 1914 a 1932:

Ano	% peixe pouco utilizável (predador)
1914	11.9
1915	21.4
1916	22.1
1917	22.2
1918	36.4
1919	27.3
1920	16.0
1921	15.9
1922	14.8
1923	10.7

A caça (ou pesca) diminui a população de peixes de εx e εy por unidade de tempo, isto é, tendo em conta a pesca, as equações para a evolução das duas populações serão:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (a - by)x - \varepsilon x = [(a - \varepsilon) - by]x \\ \dot{y} &= (cx - d)y - \varepsilon y = [cx - (d + \varepsilon)]y \end{aligned}$$

e os novos valores médios serão $((d + \varepsilon)/c, (a - \varepsilon)/b)$, isto é, aumenta o número de presas e diminui o de predadores; a falta de caça (ou de pesca, no caso acima) tem efeito oposto.

EXEMPLO 2.2 (Modelo com crescimento limitado). $v(x, y) = ((a - by)x - \lambda x^2, (cx - d)y - \mu y^2)$ Se λ e μ são suficientemente pequenos, o diagrama de fase será do tipo representado na figura 10.

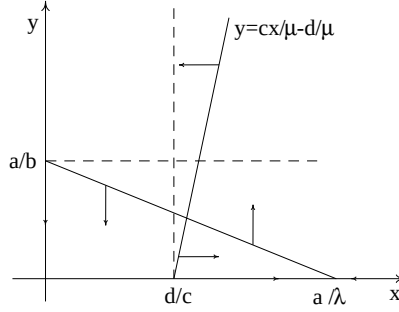


FIGURA 10

É fácil verificar que o ponto crítico em $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ é assintoticamente estável; por outro lado, qualquer rectângulo com lados sobre os eixos e vértice sobre $y = cx/\lambda - d/\mu$, contendo os pontos $(0, a/b)$ e $(a/\lambda, 0)$ é positivamente invariante, portanto todas as órbitas que se iniciam no interior tendem para o ponto crítico em causa ou para algum ciclo limite.

Podemos provar que não existem ciclos limites usando um corolário simples do critério de Bendixson :

TEOREMA 2.1 (Teste de Dulac). *Seja $D \subset \mathbf{R}^2$ um aberto simplesmente conexo, contido no domínio do campo de vectores v , e $f : D \rightarrow \mathbf{R}^+$ uma função C^1 e positiva em D ; se $\text{div}(fv)$ tem sinal constante em D , não sendo identicamente zero, não há órbitas fechadas contidas em D .*

Demonstração:

Basta verificar que as órbitas periódicas de v e fv são exactamente as mesmas, e aplicar o critério de Bendixson ao campo de vectores fv . $\square$

No caso presente tomamos $D = \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ e $f(x, y) = 1/xy$, vindo então $fv(x, y) = (a/y - b - \lambda x/y, c - d/x - \mu y/x)$ cuja divergência é $-(\lambda/y + \mu/x) < 0$, para provar a não existência de ciclos limites em $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$. Poderá, para valores bastante diferentes de zero (de λ ou μ), verificar-se a situação da figura 11.

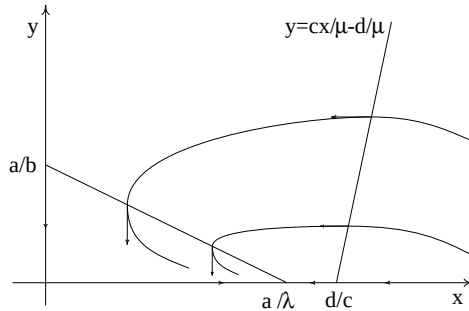


FIGURA 11

Como a figura 11 indica, $(a/\lambda, 0)$ é um ponto singular assintoticamente estável, e o seu domínio de atracção é $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}_0^+$, onde $\mathbf{R}_0^+ = 0 \cup \mathbf{R}^+$.

EXEMPLO 2.3 (Modelo de Holling-Tanner). As equações diferenciais serão agora:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left[r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \omega \frac{y}{D+x} \right] x \\ \dot{y} &= s \left[1 - J \frac{y}{x} \right] y\end{aligned}$$

Fácilmente se vê que K é o valor limite da população x , quando $y \equiv 0$, e o número de presas destruído pelo predador por unidade de tempo é proporcional ao número de predadores, mas não ao número de presas, tendendo monotonamente para ω (figura 12).

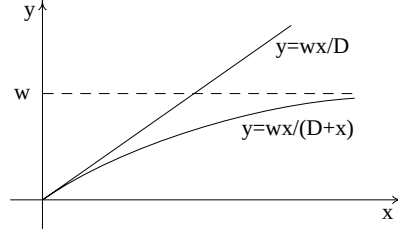


FIGURA 12

O valor limite da população y , considerando x constante, seria x/J , e J é interpretado como o número de presas necessário à sobrevivência de um predador.

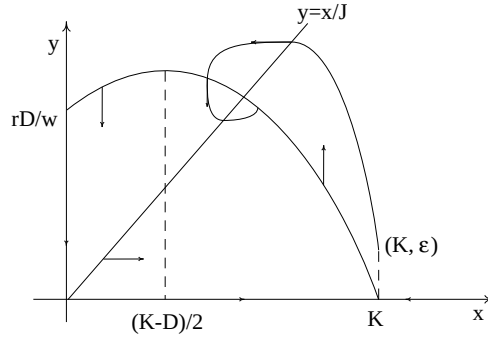


FIGURA 13

A área tracejada na figura 13 é positivamente invariante; por facilidade de cálculo, fazemos a mudança de variáveis $(\xi, \eta) = (x/x^*, y/y^*)$, onde (x^*, y^*) são as coordenadas do ponto crítico em $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$. O campo de vectores nas novas coordenadas escreve-se:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \left[r \left(1 - \frac{\xi}{k} \right) - \omega \frac{\eta}{d + \xi} \right] \xi \\ \dot{\eta} &= s \left[1 - J \frac{\eta}{\xi} \right] \eta, \quad k = \frac{K}{x^*}, \quad d = \frac{D}{y^*}\end{aligned}$$

e linearizando o sistema em relação ao ponto crítico em $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, que nas novas variáveis será $(1, 1/J)$, vem:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \left(-\frac{r}{k} + \frac{\omega d}{D(d+1)^2} \right) \xi - \frac{\omega}{d+1} \eta \\ \dot{\eta} &= \frac{s}{J} \xi - s \eta\end{aligned}$$

Calculando o determinante e o traço da matriz do sistema linearizado, verifica-se que são dados por:

$$rs \left(\frac{1}{k} + \frac{\omega d}{rJ(d+1)^2} \right) > 0$$

$$-s + \frac{r(k-d-2)}{k(d+1)}$$

e portanto os valores próprios são do mesmo sinal ou complexos conjugados. A soma de valores próprios da matriz é dada pelo traço, podendo ser positiva ou negativa:

- se é positiva o ponto crítico é instável, e portanto na zona positivamente invariante atrás considerada deve existir pelo menos um ciclo limite (que se for único será estável); como s é positivo e $r(k-d-2)[k(d+1)]^{-1} > s$, devemos ter $k-d-2 > 0$ ou seja $x^* < (K-D)/2$.
- Por outro lado, se $x^* > (K-D)/2$, então $k-d-2 < 0$ e portanto o traço é negativo; o ponto crítico é assintoticamente estável, e $x^* > (K-D)/2$.

Assim, se $k-d-2 > 0$ e fazendo variar só o parâmetro s , vemos que se $s > r(k-d-2)[k(d+1)]^{-1}$ o ponto crítico é assintoticamente estável tornando-se instável com o aparecimento simultâneo de uma órbita fechada para $s < r(k-d-2)[k(d+1)]^{-1}$.

CAPÍTULO 5

Métodos perturbativos

Há uma série de métodos para encontrar soluções de equações diferenciais e para provar que existem soluções de certos tipos, que se baseiam no teorema da dependência diferenciável das soluções de equações diferenciais em relação às condições iniciais e aos parâmetros. Neste capítulo descrevemos resultados deste tipo.

1. Aplicação do teorema da derivabilidade em ordem aos parâmetros

Seja $\dot{x} = v(x)$ uma equação diferencial ‘próxima’ da equação $\dot{x} = v_0(x)$ cuja solução φ_0 é conhecida; pretende-se calcular a solução φ da primeira à custa de φ_0 . Diremos que v é próximo de v_0 se pudermos escrevê-lo como $v(x, a) = v_0(x) + av_1(x) + O(a^2)$, sendo $v(x, a)$ uma função C^k ($k \geq 2$) em (x, a) , $a \ll 1$. Assim, $v_0(x) = v(x, 0)$ e $v_1(x) = \frac{\partial v}{\partial a}(x, 0)$.

Seja $\varphi(t, x_0, a)$ a solução de $\dot{x} = v(x, a)$ satisfazendo a condição inicial $\varphi(t_0, x_0, 0) = x_0$; pelo teorema da derivabilidade em ordem ao parâmetro, vem:

$$\varphi(t, x_0, a) = \varphi(t, x_0, 0) + a \frac{\partial \varphi}{\partial a}(t, x_0, 0) + O(a^2)$$

É claro que $\varphi(t, x_0, 0) = \varphi_0(t, x_0)$, e que $\frac{\partial \varphi}{\partial a}(t, x_0, 0) = \psi(t, x_0)$ não depende de a ; logo

$$\begin{aligned} \varphi(t, x_0, a) &= \varphi_0(t, x_0) + a\psi(t, x_0) + O(a^2) \\ v(\varphi(t, x_0, a), a) &= v_0(\varphi(t, x_0, a)) + av_1(\varphi(t, x_0, a)) + O(a^2) \\ &= v_0(\varphi_0(t, x_0)) + a \frac{\partial v_0}{\partial x}(\varphi_0(t, x_0))\psi(t, x_0) + av_1(\varphi_0(t, x_0)) + O(a^2) \end{aligned}$$

Como para todo a a segunda expressão é a derivada em ordem a t da primeira, podemos escrever:

$$\begin{aligned} v_0(\varphi_0(t, x_0)) + a\dot{\psi}(t, x_0) + O(a^2) &= v_0(\varphi_0(t, x_0)) + a \frac{\partial v_0}{\partial x}(\varphi_0(t, x_0))\psi(t, x_0) + \\ &\quad av_1(\varphi_0(t, x_0)) + O(a^2) \end{aligned}$$

Derivando em ordem a a e fazendo $a = 0$, obtemos:

$$\dot{\psi}(t, x_0) = \frac{\partial v_0}{\partial x}(\varphi_0(t, x_0))\psi(t, x_0) + v_1(\varphi_0(t, x_0))$$

Portanto $\psi(t, x_0)$ é solução da equação diferencial

$$\dot{\xi} = \frac{\partial v_0}{\partial x}(\varphi_0(t, x_0))\xi + v_1(\varphi_0(t, x_0))$$

satisfazendo a condição inicial $\psi(t_0, x_0) = 0$. Esta equação designa-se por equação às variações ou equação variacional de $\dot{x} = v(x, a)$ em φ_0 . Como é uma equação diferencial afim em ξ , embora não autónoma, pode sempre ser resolvida explicitamente.

A aproximação $\varphi(t, x_0, a) \cong \varphi_0(t, x_0) + a\psi(t, x_0)$ só é válida, é claro, se $|t - t_0|$ for suficientemente pequeno; não se pode permutar os limites $t \rightarrow \infty$ e $a \rightarrow 0$.

1.1. Um exemplo simples. Queremos usar este método para calcular aproximadamente a solução $\varphi(t, x_0, a)$ de $\dot{x} = (1 + \sin a)x$ com $\varphi(0, x_0, a) = x_0$, sabendo que a solução para $a = 0$ é $\varphi_0(t, x_0) = e^t x_0$. Escrevemos a expansão de Taylor em a da equação e da solução como:

$$\dot{x} = (1 + a + O(a^3))x \quad \varphi(t, x_0, a) = \varphi_0(t, x_0) + a\psi(t, x_0) + O(a^2) = e^t x_0 + a\psi(t, x_0) + O(a^2)$$

e substituindo, obtemos:

$$e^t x_0 + a\dot{\psi}(t, x_0) + O(a^2) = (1 + a) (e^t x_0 + a\psi(t, x_0)) + O(a^2)$$

$$x_0 = \varphi(0, x_0, a) = \varphi_0(0, x_0) + a\psi(0, x_0) + O(a^2) = x_0 + a\psi(0, x_0) + O(a^2).$$

Logo

$$\dot{\psi}(t, x_0) = \psi(t, x_0) + e^t x_0 \quad \text{com} \quad \psi(0, x_0) = 0$$

cuja solução é $\psi(t, x_0) = te^t x_0$. A solução da primeira equação diferencial é então $\varphi(t, x_0, a) = (1 + at)e^t x_0 + O(a^2)$.

Este exemplo é tão simples que podemos encontrar a solução exacta $\varphi(t, x_0, a) = e^{t(1+\sin a)} x_0$ e calcular a sua expansão de Taylor para comparar com a solução aproximada:

$$\varphi(t, x_0, a) = e^{t \sin a} e^t x_0 = e^{t(a+O(a^3))} e^t x_0 = \left(1 + at + \frac{a^2 t^2}{2} + O(a^3)\right) e^t x_0.$$

Note que embora a expansão de $v(x, a)$ não contenha termos em a^2 , eles aparecem na expansão da solução. Estes termos poderiam ser calculados pelo mesmo processo, resolvendo a uma nova equação diferencial afim, não autónoma.

1.2. Exemplo: pêndulo linearizado com atrito. A equação do pêndulo é $\ddot{x} + A\dot{x} + \sin x$, onde $A \geq 0$ representa o atrito. Para valores pequenos de x esta equação pode ser aproximada pela sua linearização, dada pelo campo de vectores $v(x, y, A) = (y, -x - Ay)$. A partir do caso sem atrito, queremos calcular a solução aproximada que satisfaz a condição inicial $(x(0), y(0)) = (x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, 0)$. Escrevemos a solução como $(\varphi, \dot{\varphi})$ onde

$$\varphi(t, x_0, 0, A) = \varphi_0(t, x_0, 0) + A\varphi_1(t, x_0, 0) + O(A^2)$$

que satisfazem $(\dot{\varphi}_0, \ddot{\varphi}_0) = v(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$, isto é $\ddot{\varphi}_0 = -\varphi_0$ e

$$(\dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1)^T = \frac{\partial v}{\partial(x, y)}(\varphi_0, \dot{\varphi}_0, 0)(\varphi_1, \dot{\varphi}_1)^T + \frac{\partial v}{\partial A}(\varphi_0, \dot{\varphi}_0, 0).$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial(x, y)}(x, y, A) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -A \end{pmatrix} & \frac{\partial v}{\partial(x, y)}(\varphi_0, \dot{\varphi}_0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial v}{\partial A}(x, y, A) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -y \end{pmatrix} & \frac{\partial v}{\partial A}(\varphi_0, \dot{\varphi}_0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\varphi}_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Usando $\varphi_0(t, x_0, 0) = x_0 \cos t$ obtemos a equação variacional $\ddot{\varphi}_1 = -\varphi_1 - \dot{\varphi}_0 = -\varphi_1 + x_0 \sin t$ com a condição inicial $\varphi_1(0) = 0$, cuja solução é $\varphi_1(t) = \frac{x_0}{2} \sin t - \frac{x_0}{2} t \cos t$. logo, a solução aproximada da equação do pêndulo com atrito é:

$$\varphi(t, x_0, 0, A) = x_0 \cos t + A \frac{x_0}{2} (\sin t - t \cos t) + O(A^2).$$

Podemos calcular a solução exacta e compará-la com a aproximação. A matriz que representa o campo de vectores v tem valores próprios

$$-\frac{A}{2} \pm i\omega \quad \text{onde} \quad \omega = \sqrt{1 - \left(\frac{A}{2}\right)^2}$$

e a solução com as condições iniciais $(x_0, 0)$ é

$$\psi(t, x_0, 0, A) = e^{-At/2} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{Ax_0}{2\omega} \sin \omega t \right).$$

Para comparar com a solução aproximada usamos $\omega t = t + O(A^2) = t + A^2 r(A, t)$ e

$$\cos \omega t = \cos(t + A^2 r) = \cos t \cos A^2 r - \sin t \sin A^2 r = \cos t(1 + O(A^2)) - \sin t O(A^2) = \cos t + O(A^2)$$

e analogamente $\sin \omega t = \sin t + O(A^2)$, logo

$$\psi(t, x_0, 0, A) = e^{-At/2} \left(x_0 \cos t + \frac{Ax_0}{2} \sin t + O(A^2) \right).$$

Como $e^{-At/2} = 1 - \frac{At}{2} + O(A^2)$, obtemos a expressão aproximada para a solução que tínhamos calculado.

2. Perturbação singular

Definimos um *problema de perturbação singular* em um aberto $U \subset \mathbf{R}^n$, com $n = r + l$, pela equação

$$(1) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{x} &= f(x, y) & \text{equação rápida} & f : U \longrightarrow \mathbf{R}^r \\ \dot{y} &= g(x, y) & \text{equação lenta} & g : U \longrightarrow \mathbf{R}^l \end{cases}$$

onde f e g são funções de classe C^k , $k \geq 2$. Definimos a *variedade lenta* como

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n : f(x, y) = 0\}$$

a *equação reduzida* como

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{y} &= g(x, y) \\ 0 &= f(x, y) \end{cases}$$

e a *equação de camada*

$$(3) \quad \dot{x} = f(x, y)$$

que é uma equação diferencial em x , dependendo do parâmetro y . Para cada $y \in \mathbf{R}^l$ fixado, os pontos da variedade lenta que têm segunda coordenada igual a y são pontos de equilíbrio da equação de camada.

Esperamos que as órbitas de (1) se aproximem dos pontos da variedade lenta que forem pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis da equação de camada. Como a equação de camada é identicamente zero na variedade lenta, esperamos que quando nos aproximarmos da variedade lenta permaneceremos perto dela, com um comportamento descrito pela equação lenta.

3. Exemplos

EXEMPLO 3.1. Para $\varepsilon > 0$ pequeno seja:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = -x - y & \text{equação rápida} \\ \dot{y} = -x^2 y & \text{equação lenta} \end{cases}$$

Para $\varepsilon > 0$ a equação rápida pode ser reescrita como $\dot{x} = -\frac{1}{\varepsilon}(x + y)$ e para ε pequeno temos que $|\dot{x}| \gg |\dot{y}|$, o que justifica os nomes de equação rápida e lenta. O comportamento vai ser dominado pela equação rápida, excepto quando estivermos sobre a *variedade lenta* $\Gamma = \{(x, -x) : x \in \mathbf{R}\}$ onde $\dot{x} = 0$ (figura 1). Em Γ o comportamento segue a *equação reduzida à variedade lenta*

$$\begin{cases} \dot{y} = -x^2 y \\ x = -y \end{cases} \quad \text{isto é} \quad \dot{y} = -y^3$$

Todas as soluções da equação reduzida tendem para a origem quando $t \rightarrow \infty$. Observe que a variedade lenta não é invariante pelo fluxo (figura 1), apenas é seguida aproximadamente pelas órbitas quando ε é pequeno. Neste exemplo a origem é um ponto de equilíbrio assimp-toticamente estável, mas a derivada do campo de vectores na origem não é hiperbólica. As órbitas se aproximam da origem e na direcção horizontal o decaimento é muito mais rápido do que na direcção $y = -x$.

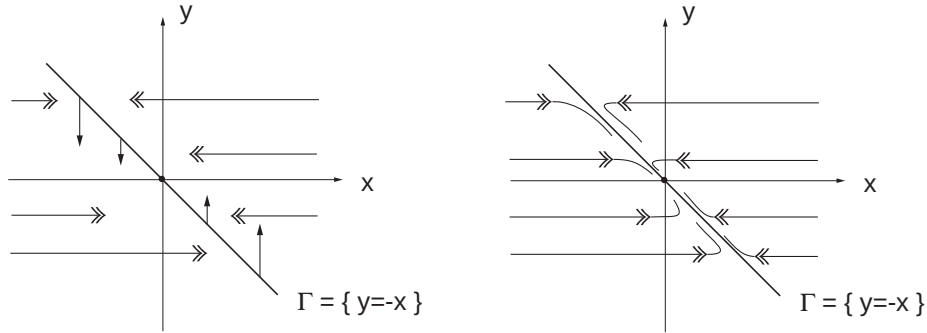


FIGURA 1. Variedade lenta e equação rápida para o exemplo 3.1 e comportamento das soluções perto da variedade lenta

EXEMPLO 3.2. De novo para $\varepsilon > 0$ pequeno seja:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = x + y - x^3 & \text{equação rápida} \\ \dot{y} = -x & \text{equação lenta} \end{cases}$$

A variedade lenta é a curva $\Gamma\{(x, y) : \dot{x} = 0\}$, gráfico de $y = x^3 - x = \varphi(x)$ (figura 2) que de novo não é um conjunto invariante pelo fluxo. A função $\varphi(x)$ tem dois pontos críticos em $x = \pm 1/\sqrt{3}$, $\varphi(x) = \pm 2/\sqrt{3}$.

As órbitas se aproximam rapidamente de pontos da variedade lenta, os pontos $(x, y) \in \Gamma$ tais que $|x| > 1/\sqrt{3}$, isto é, pontos com coordenada x fora do intervalo entre os dois pontos críticos de φ . Depois disto as órbitas seguem aproximadamente a variedade lenta de acordo com a equação reduzida

$$\begin{cases} \dot{y} = -x \\ y = x^3 - x \end{cases}$$

até que se aproximam de um ponto crítico de φ , onde o campo de vectores é perpendicular à variedade lenta e onde o comportamento volta a ser dominado pela equação rápida. A partir daí as órbitas deslocam-se rapidamente para outro ramo da variedade lenta, que passam a

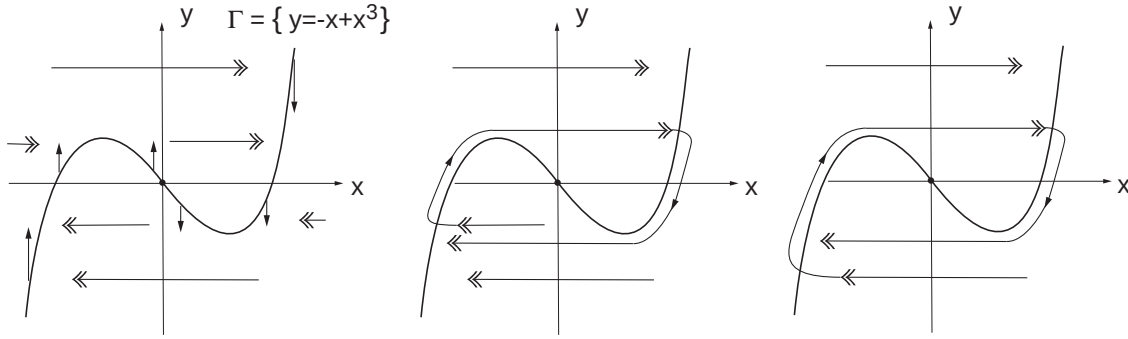


FIGURA 2. Variedade lenta e equação rápida para o exemplo 3.2 e comportamento das soluções perto da variedade lenta

seguir até encontrar outro ponto crítico. Note que os pontos críticos da variedade lenta não são pontos de equilíbrio da equação reduzida.

A figura sugere que exista uma órbita fechada atractora passando perto dos dois pontos críticos de φ .

4. Equação rápida

Nesta secção iremos estudar a equação de camada e seus pontos de equilíbrio.

LEMA 4.1. *Considere um problema de perturbação singular (1), com f uma função de classe C^k , $k > 1$. Dado $y_0 \in \mathbf{R}^l$ se $x_0 \in \mathbf{R}^r$ for ponto de equilíbrio hiperbólico da equação de camada (3) para $y = y_0$, então existem abertos $U \subset \mathbf{R}^l$ e $V \subset \mathbf{R}^r$ com $y_0 \in U$ e $x_0 \in V$ e uma única aplicação C^k , $\Phi : U \rightarrow V$ com $\Phi(y_0) = x_0$ tal que*

$$\Gamma \cap (V \times U) = \{(x, y) : y \in U \quad x = \Phi(y)\}$$

ou seja, a intersecção da variedade lenta com $V \times U$ é o gráfico de Φ .

Demonstração:

Por hipótese, zero não é um valor próprio de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, que por isso é uma transformação linear inversível de $\mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^r$. Pelo teorema da função implícita existem vizinhanças U e V dos pontos em causa, como no enunciado e existe uma única aplicação $\Phi(y)$ de classe C^k tal que, se $(x, y) \in V \times U$ então, $f(x, y) = 0$ se e somente se $x = \Phi(y)$. $\square$

Em particular, se x_0 for um ponto de equilíbrio assintoticamente estável da equação de camada para um dado y_0 , então em torno deste ponto a variedade lenta será o gráfico de uma aplicação. Pela unicidade do teorema da função implícita, esta aplicação pode ser estendida a todos os y para os quais o ponto de equilíbrio da equação de camada for assintoticamente estável e hiperbólico. Os pontos (x, y) em que a estabilidade é perdida são exactamente aqueles em que a transformação linear $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ tem um valor próprio igual a zero. Nestes pontos a derivada parcial deixa de ser inversível e a variedade lenta Γ deixa de ser o gráfico de uma função derivável, como nos pontos críticos da curva da Figura 2.

A equação de camada é uma família de equações diferenciais parametrizada por $y \in \mathbf{R}^l$, uma equação diferente para cada y . Em cada ponto de equilíbrio hiperbólico da equação de camada os valores próprios da linearização dependem de y , por isso serão diferentes, se

forem assintoticamente estáveis, em princípio terão taxa de atracção e bacia de atracção diferentes. Dizemos que os pontos de equilíbrio $x = \Phi(y)$ com $y \in A \subset \mathbf{R}^l$ da equação de camada (3) são *uniformemente assintoticamente estáveis*, se para todo $\mu > 0$ existir $\delta(\mu) > 0$ tal que para todo $y_0 \in A$, se $|x_0 - \Phi(y_0)| < \delta(\mu)$ então, para todo $t > 0$, a solução $x(t)$ de $\dot{x} = f(x, y_0)$ com $x(0) = x_0$ satisfaz $|x(t) - \Phi(y_0)| < \mu$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - \Phi(y_0)| = 0$.

LEMA 4.2. *Sejam $U \subset \mathbf{R}^l$ e $V \subset \mathbf{R}^r$ abertos e $f : V \times U \rightarrow \mathbf{R}^r$ uma função de classe C^k , $k > 1$, tais que para o problema de perturbação singular (1), a equação de camada (3) tenha um único ponto de equilíbrio $x = \Phi(y)$ em V para cada $y \in U$. Suponha que todos estes pontos de equilíbrio sejam hiperbólicos e assintoticamente estáveis. Então para qualquer conjunto compacto $K \subset U$ os pontos de equilíbrio da equação de camada (3) com $y \in K$ são uniformemente assintoticamente estáveis.*

Demonstração:

Seja $A_y = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \Phi(y))$, por compacidade podemos encontrar um número $b > 0$ tal que em todos os pontos de equilíbrio $x = \Phi(y)$, com $y \in K$, os valores próprios de A_y tenham parte real menor que $-b < 0$, logo para todo $x \in \mathbf{R}^r$

$$\langle A_y x, x \rangle \leq -b \|x\|^2.$$

Também por compacidade, podemos encontrar $\eta > 0$ tal que, para todo $y \in K$

$$\|x - \Phi(y)\| < \eta \quad \Rightarrow \quad |\langle f(x, y), x \rangle - \langle A_y x, x \rangle| \leq \frac{b}{2} \|x\|^2.$$

Temos então todas as estimativas da demonstração do Teorema de Liapunov independentemente do valor de y e o resultado segue repetindo o resto da demonstração do Teorema. $\square$

No estudo da equação de camada será útil usar uma escala mais lenta de tempo:

LEMA 4.3. *Se $\varphi_\varepsilon(t)$ for uma solução de (1) para $\varepsilon > 0$ definida para $t \in [0, A]$ e com $\varphi_\varepsilon(0) = (x_0, y_0)$ então $\psi_\varepsilon(s) = \varphi_\varepsilon(\varepsilon s) = (u_\varepsilon(s), v_\varepsilon(s))$ é solução de*

$$\begin{cases} u' &= f(u, v) & u(0) &= x_0 \\ v' &= \varepsilon g(u, v) & v(0) &= y_0 \end{cases}$$

onde $\xi' = \frac{d\xi}{ds}$ e a solução ψ_ε está definida para $s \in [0, A/\varepsilon]$. Além disto, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon(s) = (\bar{\psi}(s), y_0)$ onde $\bar{\psi}(s) = u(s)$ é solução da equação de camada:

$$u' = f(u, y_0) \quad u(0) = x_0.$$

Demonstração:

Basta fazer a mudança de variável $t = \varepsilon s$ para a qual $\xi' = \frac{d\xi}{ds} = \frac{d\xi}{dt} \frac{dt}{ds} = \varepsilon \frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \dot{\xi}$ e usar a equação (1). $\square$

O lema 4.3 mostra como a equação de camada aparece como limite das soluções de (1) vistas em uma escala de tempo muito lenta. Pode-se obter um resultado tecnicamente mais forte:

LEMA 4.4. *Sejam $\varphi_\varepsilon(t)$ soluções de (1) para $\varepsilon > 0$ definidas para $t \in [0, A]$ e com $\varphi_\varepsilon(0) = (x_0, y_0)$. Dados $\varepsilon_n > 0$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ e $t_n \in [0, A]$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0 \in [0, A]$ seja $\psi_{\varepsilon_n}(s) = \varphi_{\varepsilon_n}(\varepsilon_n s + t_n)$. Seja $B > 0$ tal que para $s \in [0, B]$, as funções $\varphi_{\varepsilon_n}(t)$*

são limitadas no intervalo correspondente. Então uma subsucessão de $\psi_{\varepsilon_n}(s)$ converge para $(\bar{\psi}(s), y_0)$ uniformemente no intervalo $[0, B]$.

Demonstração:

A idéia é usar o teorema de Ascoli-Arzelà. Como por hipótese as funções $\psi_{\varepsilon_n}(s)$ são equi-limitadas, basta verificar que são também equicontínuas, o que se obtém usando o teorema da rectificação do fluxo, depois de ter acrescentado a (1) a equação diferencial $\dot{\varepsilon} = 0$. $\square$

5. Teoria de Tikhonov

Nesta secção mostraremos que as órbitas de um problema como os dos exemplos acima realmente seguem a variedade lenta segundo a equação reduzida (2).

A partir daqui estudaremos o caso $l = 1$ embora o mesmo tipo de resultado valha para dimensões mais altas. Neste caso, pelo lema 4.3, a variedade lenta Γ é uma curva, o gráfico de uma função derivável $x = \Phi(y)$ em torno de quase todos os seus pontos. A curva Γ deixa de ser o gráfico $x = \Phi(y)$ exactamente nos pontos (x, y) em que o equilíbrio da equação de camada (3) perde a estabilidade. Nestes pontos o campo de vectores (1) é perpendicular à variedade lenta, como na Figura 2.

Iremos estudar o comportamento das órbitas de (1) em torno de um ponto de equilíbrio hiperbólico assintoticamente estável da equação de camada. Resumindo as conclusões da secção 4 consideramos um aberto $U \subset \mathbf{R}^n$ com as seguintes propriedades:

- P1) Supondo que $l = 1$, existe um intervalo aberto I e uma função $\Phi : I \rightarrow \mathbf{R}^r$ de classe C^k tal que as únicas soluções da equação $f(x, y) = 0$ com $(x, y) \in U$ são da forma $x = \Phi(y)$, isto é, a equação de camada (3) tem um único ponto de equilíbrio $x = \Phi(y)$ em cada camada $(\mathbf{R}^r \times \{y\}) \cap U$ com $y \in I$.
- P2) Existe um intervalo fechado não trivial $K \subset I$ tal que para $y \in K$ o ponto de equilíbrio $\Phi(y)$ da equação de camada (3) é uniformemente assintoticamente estável.

Pretendemos mostrar que nestas condições toda órbita de (1) que se aproxime da variedade lenta seguirá a equação reduzida ao longo desta variedade. Para isto, definimos o *tubo* de raio $\mu > 0$ em torno da variedade lenta,

$$T_\mu = \{(x, y) : |x - \Phi(y)| < \mu, y \in K\}$$

cujos interior denotamos por $\overset{\circ}{T}_\mu$ e o *tubo fechado*

$$\overline{T}_\mu = \{(x, y) : |x - \Phi(y)| \leq \mu, y \in K\}$$

cuja *parede lateral* é

$$P_\mu = \{(x, y) : |x - \Phi(y)| = \mu, y \in K\}.$$

A propriedade P2 implica que toda solução da equação de camada com condição inicial no tubo $T_{\delta(\mu)}$ permanece no tubo T_μ para $t > 0$. A dificuldade está em provar que as soluções de (1) também permanecem no tubo. Começamos por provar que uma órbita de (1) que comece em um tubo suficientemente pequeno não pode sair pela parede lateral. Isto quer dizer que a órbita permanece sempre dentro do tubo enquanto a sua coordenada y satisfizer $y \in K$.

LEMA 5.1. *Suponha que a equação (1) para $(x, y) \in U$ satisfaça P1 e P2 e seja $\mu > 0$ tal que $\overline{T}_\mu \subset U$. Então para ε suficientemente pequeno, toda solução $\varphi_\varepsilon(t) = (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$ de (1) com condição inicial dentro de um tubo de raio suficientemente pequeno permanece em um tubo em torno da variedade lenta enquanto $y_\varepsilon(t) \in K$.*

Mais precisamente, dado $t_1 > 0$ existem $\varepsilon(\mu) > 0$, $\gamma(\mu) > 0$ tais que para a solução $\varphi_\varepsilon(t) = (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$ de (1) com condição inicial $\varphi_\varepsilon(0)$ no interior de $T_{\gamma(\mu)}$, se para $t \leq t_1$ tivermos $y_\varepsilon(t) \in K$ então para $\varepsilon < \varepsilon(\mu)$ e para todo $t \leq t_1$ tem-se $\varphi_\varepsilon(t) \in T_\mu$.

Demonstração:

A idéia da prova é supor por absurdo que $\varphi_\varepsilon(t)$ saia do tubo, fazer uma mudança de escala no tempo, como no lema 4.3, e passar ao limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ para obter uma solução da equação de camada que não se aproxime do seu ponto de equilíbrio quando $s \rightarrow \infty$.

Provaremos o resultado para $\gamma(\mu) = \delta(\mu/2)$ que é menor ou igual a $\mu/2$ por hipótese. Suponhamos que não seja verdade que para todo ε suficientemente pequeno e para todo $t \leq t_1$ a solução $\varphi_\varepsilon(t)$ esteja no tubo, isto é, que exista uma sucessão ε_n com $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ para a qual $\varphi_{\varepsilon_n}(0)$ está no interior de $T_{\gamma(\mu)}$ e que existam $\hat{t}_n \in [0, t_1]$ tais que $\varphi_{\varepsilon_n}(\hat{t}_n) \in P_\mu$.

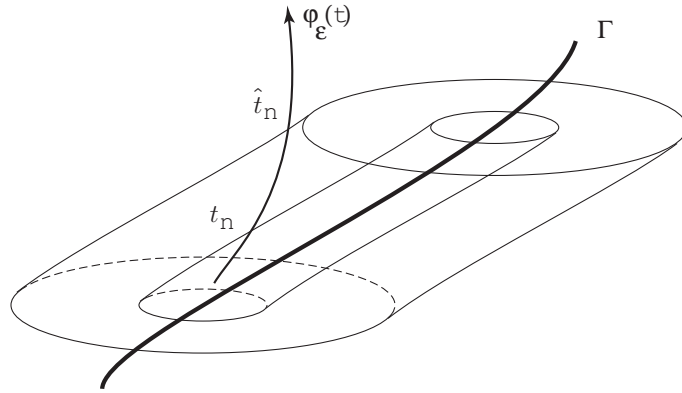


FIGURA 3. Tubos no lema 5.1

Como $\varphi_{\varepsilon_n}(t)$ sai do interior de $T_{\gamma(\mu)}$ para a parede P_μ , em algum instante passa pela parede do tubo menor, $P_{\gamma(\mu)}$. Logo existem $t_n \in]0, \hat{t}_n[$ tais que $\varphi_{\varepsilon_n}(t_n) \in P_{\gamma(\mu)}$ e podemos escolher t_n e $\hat{t}_n$ de maneira que para $t \in [t_n, \hat{t}_n]$ tenhamos $\varphi_{\varepsilon_n}(t) \in \overline{T_\mu} - \dot{T}_{\gamma(\mu)}$ (figura 3).

Como $(\varphi_{\varepsilon_n}(t_n), t_n) \in P_{\gamma(\mu)} \times [0, t_1]$ e este conjunto é compacto, então existe uma sub-sucessão convergente. Podemos supor que já tínhamos começado com esta sucessão e denotamos o seu limite por $(x_0, y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\varepsilon_n}(t_n)$ e $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$, que satisfaz $(x_0, y_0) \in P_{\gamma(\mu)}$, $\tau \in [0, t_1]$.

Reparametrizando o tempo por $s = (t - t_n)/\varepsilon_n$ como nos lemas 4.3 e 4.4 obtemos $\psi_{\varepsilon_n}(s) = \varphi_{\varepsilon_n}(\varepsilon_n s + t_n)$ que para $s \in [0, (T - t_n)/\varepsilon_n]$ converge uniformemente para $(\bar{\psi}(s), y_0)$. Como $\psi_{\varepsilon_n}(s) \in \overline{T_\mu} - \dot{T}_{\gamma(\mu)}$, que é um conjunto fechado, então $(\bar{\psi}(s), y_0) \in \overline{T_\mu} - \dot{T}_{\gamma(\mu)}$ para $s \in [0, \infty[$. Pelo lema 4.3, $\bar{\psi}(s)$ é solução de

$$u' = f(u, y_0) \quad u(0) = x_0.$$

Como $(x_0, y_0) \in P_{\gamma(\mu)} \subset T_{\delta(\mu/2)}$ então por hipótese $\lim_{s \rightarrow \infty} \bar{\psi}(s) = \Phi(y_0)$ o que contradiz $\bar{\psi}(s) \notin \dot{T}_{\gamma(\mu)}$. $\square$

Para o resultado a seguir, é conveniente reescrever o lema 5.1 com condição inicial $t = t_0$ dentro do tubo, o que pode ser feito facilmente usando a propriedade de grupo do fluxo:

COROLÁRIO 5.1. *Suponha que a equação (1) para $(x, y) \in U$ satisfaça P1 e P2 e seja $\mu > 0$ tal que $\overline{T_\mu} \subset U$. Então dados t_0 e t_1 com $0 < t_0 < t_1$, existem $\varepsilon(\mu) > 0$, $\gamma(\mu) > 0$ tais que, se para $t = t_0$ e para $\varepsilon < \varepsilon(\mu)$ a solução $\varphi_\varepsilon(t) = (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$ de (1) estiver no interior de $T_{\gamma(\mu)}$, e se para $t \in [t_0, t_1]$ tivermos $y_\varepsilon(t) \in K$ então $\varphi_\varepsilon(t) \in T_\mu$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.*

TEOREMA 5.1 (Tikhonov). *Suponha que a equação (1) para $(x, y) \in U$ satisfaça P1 e P2 e seja $(x_0, y_0) \in U$ tal que a solução $\bar{\psi}(t)$ da equação de camada*

$$\dot{u} = f(u, y_0) \quad u(0) = x_0$$

satisfaça $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\psi}(t) = \Phi(y_0)$. Seja $\varphi_\varepsilon(t) = (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$ a solução de (1) com $\varphi_\varepsilon(0) = (x_0, y_0)$. Se para todo $t \in [0, \tau]$ o ponto $\Phi(y_\varepsilon(t))$ for um equilíbrio assintoticamente estável da equação de camada (3) então para todo $t \in [0, \tau]$ tem-se que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\varepsilon(t) = \varphi_0(t)$ onde $\varphi_0(t)$ é solução da equação reduzida (2)

$$\dot{y} = g(y) \quad x = \Phi(y).$$

Dado qualquer $t_1 > 0$ o limite acima é uniforme para $t \in [t_1, \tau]$ para a primeira coordenada, e para a segunda o limite é uniforme para $t \in [0, \tau]$.

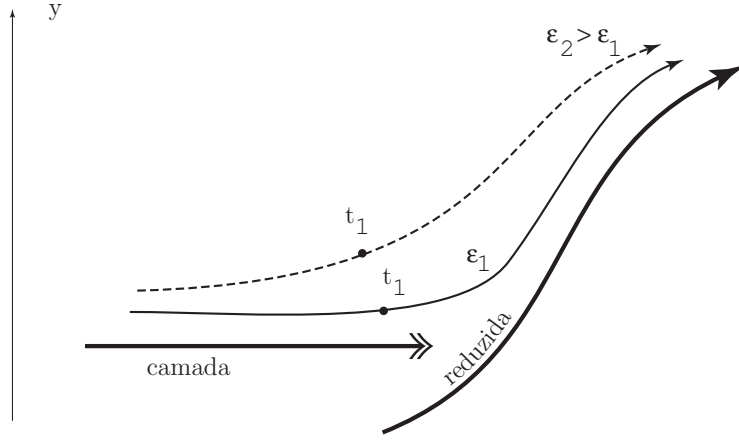


FIGURA 4. Órbitas no teorema 5.1

Demonstração:

Para $t \in [0, \tau]$ fazemos a mudança de escala $t = \varepsilon s$ como nos lemas 4.3 e 4.4 para obter $\psi_\varepsilon(s) = \varphi_\varepsilon(\varepsilon s)$ com $s \in [0, \varepsilon\tau]$ e $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon(s) = (\bar{\psi}(s), y_0)$ uniformemente em s , onde $\bar{\psi}(s)$ é solução da equação de camada

$$u' = f(u, y_0) \quad u(0) = x_0$$

isto é, para todo $\mu > 0$ e $s_0 > 0$ existe $\varepsilon_0(\mu) > 0$ tal que se $\varepsilon < \varepsilon_0(\mu)$ e $s \in [0, s_0]$ então

$$(4) \quad |\psi_\varepsilon(s) - (\bar{\psi}(s), y_0)| < \gamma(\mu)/2$$

para o $\gamma(\mu)$ do lema 5.1.

Por hipótese $\lim_{s \rightarrow \infty} \bar{\psi}(s) = \Phi(y_0)$, logo existe $s_0 > 0$ tal que se $s \geq s_0$ então

$$(5) \quad |\bar{\psi}(s) - \Phi(y_0)| < \gamma(\mu)/2.$$

De (4) e (5) conclui-se que se $\varepsilon < \varepsilon_0(\mu)$ para $s = s_0$ temos

$$|\psi_\varepsilon(s_0) - (\Phi(y_0), y_0)| < \gamma(\mu)$$

e portanto que $\varphi_\varepsilon(\varepsilon s_0) \in \overset{\circ}{T}_{\gamma(\mu)}$. Pelo corolário 5.1 conclui-se que para $t \in [\varepsilon s_0, \tau]$ tem-se que $\varphi_\varepsilon(t) \in T_\mu$, já que por hipótese $y_\varepsilon(t) \in K$ para estes valores de t . Com isto mostramos que $\varphi_\varepsilon(t)$ se aproxima da variedade lenta, uniformemente para $t \in [\varepsilon s_0, \tau]$.

Para mostrar que $y_\varepsilon(t)$ se aproxima da solução da equação reduzida (2) consideramos $w_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t) - \Phi(y_\varepsilon(t))$ e sabemos que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w_\varepsilon(t) = 0$ uniformemente para $t \in [\varepsilon s_0, \tau]$. Também já mostramos que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(\varepsilon s_0) = y_0$ e como

$$\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt} = g(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) = g(\Phi(y_\varepsilon(t)) + w_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$$

então quando $\varepsilon \rightarrow 0$ a função $y_\varepsilon(t)$ vai se aproximar da equação diferencial limite, com as condições iniciais limite, isto é $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(t) = y_0(t)$ uniformemente para $t \in [\varepsilon s_0, \tau]$ onde $y_0(t)$ é solução de

$$\dot{y} = g((\Phi(y), y) \quad y(0) = y_0$$

que é equivalente à equação reduzida. Para $t \in [0, \varepsilon s_0]$ já vimos em (4) que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(t) = y_0$ uniformemente, logo este intervalo não estraga a convergência uniforme.

Finalmente escrevemos $x_\varepsilon(t) = \Phi(y_\varepsilon(t)) + w_\varepsilon(t)$, o que permite ver que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(t) = \Phi(y_0)$ uniformemente para $t \in [\varepsilon s_0, \tau]$. $\square$

CAPÍTULO 6

Órbitas periódicas, bifurcação e estabilidade

1. Bifurcação de Hopf

A perda de estabilidade de um ponto crítico acompanhada da criação de uma órbita fechada estável é um fenómeno verificado em famílias a um parâmetro de campos de vectores, sempre que certas condições são satisfeitas.

EXEMPLO 1.1. Variante da equação de van der Pol:

$$\ddot{x} + (x^2 - \mu)\dot{x} + x = 0$$

Para $\mu \in \mathbf{R}^-$, a origem, único ponto singular, é assintoticamente estável, para $\mu = 0$ é ainda assintoticamente estável (como se pode mostrar usando o teorema de LaSalle), mas para $\mu \in \mathbf{R}^+$ é instável; usando o teorema de Liénard, verifica-se que existe um único ciclo limite assintoticamente estável. Em coordenadas $(x, \dot{x}, \mu)$ teremos a figura 1.

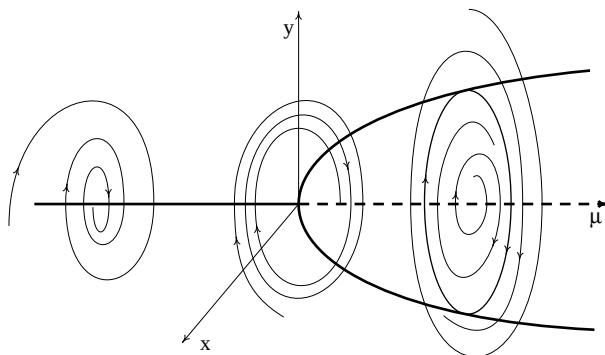


FIGURA 1

Para a equação linear $\ddot{x} - \mu\dot{x} + x = 0$ a situação seria como na figura 2.

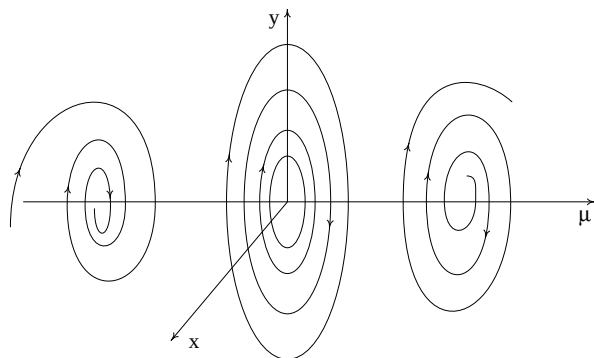


FIGURA 2

A primeira figura pode interpretar-se como uma deformação da segunda, com o plano $\mu = 0$ das órbitas fechadas a transformar-se numa superfície próxima de um parabolóide.

Ao fenómeno de aparecimento de um ciclo limite assintoticamente estável e um ponto singular instável a partir de um ponto crítico assintoticamente estável, dá-se o nome de bifurcação de Hopf.

TEOREMA 1.1 (Hopf). *Seja $v(x, \mu)$ um campo de vectores em $\mathbf{R}^2$, $\mu_0 \in \mathbf{R}$ tal que:*

- (1) *Para $\mu < \mu_0$ a origem é assintoticamente estável;*
- (2) *Se $\alpha(\mu)$ é a parte real dos valores próprios, temos:*

$$\alpha(\mu_0) = 0 \quad \frac{d\alpha}{d\mu}(\mu_0) > 0$$

- (3) *Para $\mu = \mu_0$ a origem é assintoticamente estável,*

Então existe $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ tal que se $\mu \in]\mu_0, \mu_0 + \varepsilon[$, o campo de vectores tem um ciclo limite assintoticamente estável.

Se o teorema acima é aplicável ao campo de vectores $-v$, obtemos um outro tipo de bifurcação de Hopf, a que corresponde a figura 3: a origem é instável quando $\mu \leq \mu_0$ (de facto assintoticamente estável para o campo de vectores $-v$) e quando $\mu > \mu_0$ é assintoticamente estável; existe $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ tal que se $\mu \in]\mu_0, \mu_0 + \varepsilon[$, o campo de vectores tem um ciclo limite instável (assintoticamente estável para $-v$).

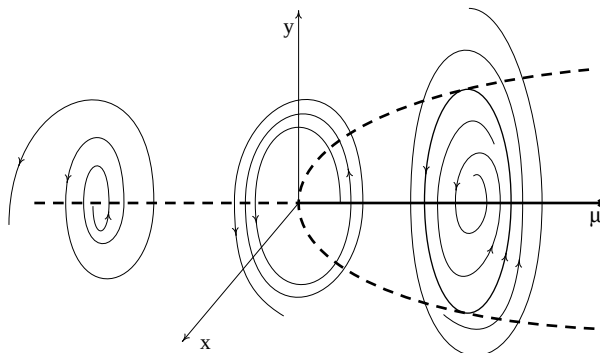


FIGURA 3

Desenhando só os pontos singulares assintoticamente estáveis, e o lugar geométrico das órbitas fechadas, com traço contínuo representando estabilidade e tracejado instabilidade, teremos os esquemas da figura 4.

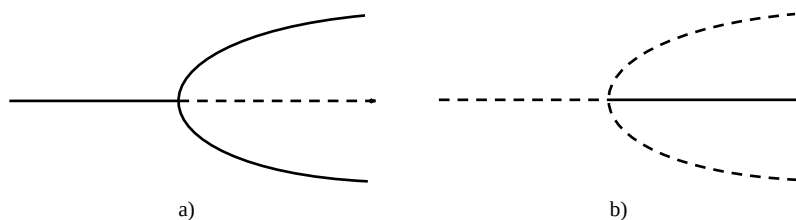


FIGURA 4

A determinação da estabilidade assintótica de v ou $-v$ quando $\mu = \mu_0$ é um problema complicado se não é possível uma aplicação natural do método directo de Liapunov. Nesses casos é útil o seguinte resultado:

TEOREMA 1.2. *Supondo que:*

- (1) *Para $\mu < \mu_0$ a origem é assintoticamente estável;*
- (2) *Se $\alpha(\mu)$ é a parte real dos valores próprios, temos:*

$$\alpha(\mu_0) = 0 \quad \frac{d\alpha}{d\mu}(\mu_0) > 0$$

- (3) *A parte linear de v está na forma canónica de Jordan, e:*

$$I = |\beta(\mu_0)| (v_{111}^1 + v_{122}^1 + v_{112}^2 + v_{222}^2) + (v_{11}^1 v_{11}^2 - v_{22}^1 v_{22}^2 - v_{11}^1 v_{12}^1 + v_{22}^2 v_{12}^2 - v_{12}^1 v_{22}^1 + v_{22}^2 v_{12}^2) \neq 0$$

onde $\beta(\mu_0)$ é a parte imaginária do valor próprio e:

$$v_{jkl}^i = \frac{\partial^3 v_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}(0, \mu_0), \quad v_{jk}^i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k}(0, \mu_0)$$

Então se $I < 0$ e $\mu \in]\mu_0, \mu_0 + \varepsilon[$, o campo de vectores tem um ciclo limite assintoticamente estável, e se $I > 0$ e $\mu \in]\mu_0 - \varepsilon, \mu_0[$, o campo de vectores tem um ciclo limite instável.

Note-se em particular que $I < 0$ prova que o ponto crítico é assintoticamente estável para $\mu = \mu_0$. A outra situação, $I > 0$, corresponde à figura 3.

Na aplicação do teorema de Hopf podemos considerar a dimensão maior que 2, desde que todos os valores próprios, à excepção dos dois complexos conjugados com parte real zero em causa, tenham parte real negativa. Existe ainda um índice I cujo sinal determina o tipo de bifurcação, tal como para $n = 2$ embora as fórmulas correspondentes sejam bastante mais complexas.

EXEMPLO 1.2 (Regulador de Watt). As equações:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \psi \\ \dot{\psi} &= n^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - g \sin \varphi - \frac{b}{m} \psi \\ \dot{\omega} &= \frac{k}{J} \cos \varphi - \frac{F}{J} \end{aligned}$$

podem transformar-se, usando:

$$\varphi = x_1, \quad \psi = \sqrt{g} x_2, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{n}} x_3 \quad t = \sqrt{g} \tau$$

e:

$$\gamma = \frac{b}{m}, \quad \chi = \frac{nk}{Jg}, \quad \rho = \frac{F}{k}$$

em:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (\sin x_1 \cos x_1) x_3^2 - \sin x_1 - \gamma x_2 \\ \dot{x}_3 &= \chi (\cos x_1 - \rho) \end{aligned}$$

cujo ponto crítico é $(\arccos \rho, 0, 1/\sqrt{\rho})$. A condição de estabilidade pode agora escrever-se como:

$$\gamma > \gamma_c = 2\chi\rho^{3/2}$$

Vejamos agora o que acontece quando γ passa abaixo de γ_c ; no ponto γ_c os valores próprios são dados por:

$$\lambda_{1,2}(\gamma_c) = \pm i\omega_0 = \pm i\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right)^{1/2}, \quad \lambda_3(\gamma_c) = -\gamma_c$$

como se pode ver comparando $\lambda^3 + \gamma\lambda^2 + (1/\rho - \rho)\lambda + 2\chi\sqrt{\rho}(1 - \rho^2) = 0$ com a equação de raízes $\pm i\omega_0$ e $-\gamma_c$, ou seja, $\lambda^3 + \gamma_c\lambda^2 + \omega_0^2\lambda + \gamma_c\omega_0^2 = 0$.

Derivando a equação característica em ordem a γ , obtemos:

$$\frac{d\lambda}{d\gamma} = -\left(3 + \frac{2\gamma}{\lambda} + \left(\frac{\omega_0}{\lambda}\right)^2\right)^{-1}$$

e portanto:

$$\frac{d\lambda}{d\gamma}(\gamma_c) = -\frac{1 + i\gamma_c/\omega_0}{2(1 + (\gamma_c/\omega_0)^2)}, \quad \text{Re} \frac{d\lambda}{d\gamma}(\gamma_c) < 0$$

Calculando $I(\chi, \rho)$ verifica-se que existe $\rho_0(\chi)$ tal que $I(\chi, \rho_0(\chi)) \equiv 0$ e $\rho < \rho_0(\chi) \implies I < 0$, $\rho > \rho_0(\chi) \implies I > 0$.

Como no ponto crítico está envolvido $\arccos \rho$, por razões físicas só interessa $\rho \in]0, 1[$, e o gráfico de ρ_0 é o representado na figura 5.

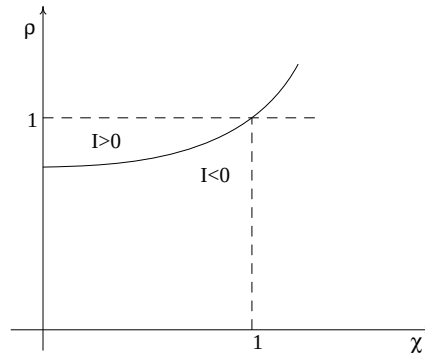


FIGURA 5

Concluimos que se se verificar $\chi > 1$, ou se o ângulo de equilíbrio φ^* fôr maior do que $\arccos \rho_0(0) \cong 39.3$, a perda de estabilidade do ponto crítico é uma bifurcação de Hopf para uma órbita periódica estável, correspondendo à figura 4 b), caso contrário a situação será a da figura 6, em que a órbita periódica é instável. A bifurcação ocorre quando $\gamma = \gamma_c$.

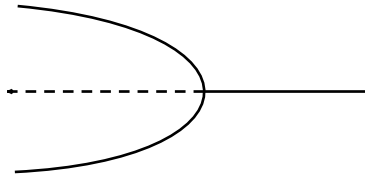


FIGURA 6

No caso da figura 6, ainda haverá estabilidade (num sentido prático) para valores de γ menores que γ_c , já que a órbita periódica é estável e de pequena amplitude; no outro caso, ainda para valores acima de γ_c , haverá perda de estabilidade, quando a órbita periódica instável está muito perto da origem e o domínio de atracção do ponto crítico é demasiado pequeno para as possíveis perturbações.

2. Estabilidade de órbitas periódicas

Seja γ uma órbita fechada do campo de vectores $v : U \longrightarrow TU$; γ é assintoticamente estável se, dado um aberto $V_1 \subset U$ com $\gamma \subset V_1$, existir $V_2 \subset V_1$ aberto, tal que:

- (1) $\gamma \subset V_2$
- (2) $\varphi(t, V_2) \subset V_1$, para todo $t \in \mathbf{R}^+$
- (3) $d(\varphi(t, x), \gamma) \rightarrow 0 \quad \forall x \in V_2$, isto é: para todo $x \in V_2$, $\omega(x) = \gamma$.

Esta definição vem precisar melhor a noção de estabilidade referida a propósito de ciclos limites. Em particular, o ciclo limite da equação de Liénard é assintoticamente estável.

O ponto $x \in U$ tem período assintótico $T \in \mathbf{R}^+$ se $|\varphi(t+T, x) - \varphi(t, x)| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Isto é, o ponto x comporta-se, para t suficientemente grande, como se tivesse um período igual a T .

TEOREMA 2.1. *Seja γ uma órbita fechada periódica de período T e assintoticamente estável; existe uma vizinhança V de γ contida em U tal que todos os pontos de V têm período assintótico T .*

Demonstração:

Seja $V = V_2$ referido na definição de estabilidade assintótica, sendo $V_1 = U$. Fixemos $x_0 \in V$ e $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$. Pela continuidade de $\varphi(t, x)$ em (t, x) , existe $\delta \in]0, \varepsilon/2[$ tal que, se $y \in \gamma$ e $|x - y| < \delta$ então $|\varphi(T, x) - \varphi(T, y)| = |\varphi(T, x) - y| < \varepsilon/2$. Como $d(\varphi(t, x_0), \gamma) \rightarrow 0$, existe $t_0 \in \mathbf{R}^+$ tal que para cada $t > t_0$ existe $z \in \gamma$ tal que $|\varphi(t, x_0) - z| < \delta$ e nesse caso

$$|\varphi(t+T, x_0) - \varphi(t, x_0)| \leq |\varphi(T, \varphi(t, x_0)) - z| + |z - \varphi(t, x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \delta < \varepsilon$$

ou seja $d(\varphi(t+T, x_0), \varphi(t, x_0)) \rightarrow 0$. □

Seja agora γ uma curva fechada e $0 \in \gamma$; construímos em 0 uma secção local S . Existe uma vizinhança de V de 0 e uma única função $\tau : V \longrightarrow \mathbf{R}$, de classe C^k , tal que $\varphi(\tau(x), x) \in S$ para todo $x \in V$ e $\tau(0) = T$, onde T é o período de γ . Podemos definir $g : S \cap V = S_0 \longrightarrow S$ como função C^k por $g(x) = \varphi(\tau(x), x)$; a função g é a aplicação de Poincaré. O comportamento das soluções próximas de γ pode ser estudado observando as imagens sucessivas $g(x_0), g(g(x_0)), \dots, g^n(x_0), \dots$ de pontos x_0 próximos de 0.

TEOREMA 2.2. *Seja $x_0 \in S_0$ tal que $g^n(x_0)$ está definida para todo $n > 0$ e que $g^n(x_0) \rightarrow 0$; então $d(\varphi(t, x_0), \gamma) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow +\infty$.*

Demonstração:

Seja $x_n = g^n(x_0)$; como x_{n+1} está definido, $x_n \in S_0$. Pela continuidade de τ , $x_n \rightarrow 0 \Rightarrow \tau(x_n) \rightarrow \tau(0) = T$, e portanto existe $r = \sup\{|\tau(x_n)|, n \in \mathbf{N}\}$. Por continuidade $|\varphi(t, x_n) - \varphi(t, 0)| \rightarrow 0$ uniformemente para t no intervalo compacto $[0, r]$; dado $t \in \mathbf{R}^+$ podemos sempre escrever $\varphi(t, x_0) = \varphi(s, x_k)$ com $s \in [0, r]$, onde s e k dependem de t . Por outro lado

$$d(\varphi(t, x_0), \gamma) \leq |\varphi(t, x_0) - \varphi(s, 0)| = |\varphi(s, x_k) - \varphi(s, 0)|$$

e como $k \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$ e s se mantém em $[0, r]$, $d(\varphi(t, x_0), \gamma)$ tende para zero. □

Para podermos tirar mais resultados do estudo da aplicação de Poincaré, é natural estudarmos, para cada $x \in S_0$, o conjunto $\{g^n(x), n \in \mathbf{N}\}$.

Um sistema dinâmico discreto é uma função $\Psi : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$, onde U é um aberto de $\mathbf{R}^n$; quando $U \neq \mathbf{R}^n$ é possível que Ψ^2 não esteja definida para todos os pontos de U .

Se considerarmos como órbita de $x \in U$ o conjunto $\{\Psi^n(x), n \in \mathbf{N}_0 \text{ (quando definido)}\}$, vemos que o análogo de posição de equilíbrio para um fluxo é um ponto fixo $x = \Psi(x)$. Um ponto fixo x_0 de Ψ diz-se (assimptoticamente) estável se qualquer vizinhança V_1 de x_0 contém uma outra vizinhança V_2 de x_0 tal que $\Psi^n(V_2) \subset V_1, \forall n \in \mathbf{N}_0$ (e $\Psi^n(x) \rightarrow x_0, \forall x \in V_2$).

Começaremos estudando o caso em que Ψ é linear o que implica que a origem é sempre um ponto fixo. Recordamos que o espectro de um operador linear $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$, denotado por $\sigma(A)$ é o conjunto dos seus valores próprios, ou seja, das raízes reais ou complexas do polinómio característico de A .

TEOREMA 2.3. *Seja $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ um operador linear; então as três proposições seguintes são equivalentes:*

- (1) *A é uma contracção, isto é, existe uma norma $\| \cdot \|$ em $\mathbf{R}^n$ tal que $\|Ax\| \leq \mu\|x\|$, com $\mu \in [0, 1[$*
- (2) *$\sigma(A) \subset B(0, 1) \subset \mathbf{C}$, isto é, os valores próprios de A têm módulo menor que 1.*
- (3) *$A^n x \rightarrow 0$.*

TEOREMA 2.4. *Seja x_0 um ponto fixo do sistema dinâmico discreto Ψ definido em U ; se os valores próprios de $\partial\Psi/\partial x(x_0)$ são menores que 1, em valor absoluto, x_0 é assimptoticamente estável.*

Demonstração:

Podemos tomar x_0 como a origem em $\mathbf{R}^n$, e construir uma norma $\| \cdot \|$ tal que:

$$\left\| \frac{\partial\Psi}{\partial x}(0)x \right\| \leq \mu\|x\|, \quad 0 \leq \mu < 1$$

Par cada $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança V de 0 onde:

$$\left\| \Psi(x) - \frac{\partial\Psi}{\partial x}(0)x \right\| \leq \varepsilon\|x\|$$

portanto

$$\|\Psi(x)\| \leq \left\| \frac{\partial\Psi}{\partial x}(0)x \right\| + \varepsilon\|x\| \leq \mu\|x\| + \varepsilon\|x\|$$

e se escolhermos ε de modo que $\nu = \mu + \varepsilon < 1$, temos $\|\Psi(x)\| \leq \nu\|x\|$. Seja V_1 uma vizinhança de 0, $V_1 \subset U$; tomamos $\delta \in \mathbf{R}^+$ suficientemente pequeno para que $V_2 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| < \delta\} \subset V \cap V_1$. É claro que $\|\Psi^n(x)\| \leq \nu^n\|x\|$ e portanto $x \in V_2 \Rightarrow \Psi^n(x) \in V_2 \subset V_1$ para $n \in \mathbf{N}_0$; para além disso $\|\Psi^n(x)\| \rightarrow 0$, ou equivalentemente $\Psi^n(x) \rightarrow 0$. $\square$

TEOREMA 2.5 (Andronov-Witt). *Seja g a aplicação de Poincaré de um campo de vectores v de classe C^k , $k \geq 1$, para uma secção local S por uma curva integral fechada γ . Se $\sigma(\partial g/\partial x(0)) \subset B(0, 1) \subset \mathbf{C}$, então γ é assimptoticamente estável.*

Demonstração:

Seja V_1 uma qualquer vizinhança de γ , e $N \subset V_1$ uma vizinhança de γ tal que se $x \in N$ e $t \in]-2T, 2T[$ então $\varphi(t, x) \in V_1$. Se H é um hiperplano contendo a secção local S , existe em H uma norma $\| \cdot \|$ e uma vizinhança $W \subset S$ de 0 tal que:

$$\|g(x)\| \leq \mu\|x\|, \quad \mu \in [0, 1[, \quad x \in W$$

Tomamos $\delta \in \mathbf{R}^+$ suficientemente pequeno para que a bola B_δ em H esteja contida em $N \cap W$ e $\tau(x) < 2T$ se $x \in B_\delta$.

Definimos $V_2 = \{\varphi(t, x) | t \in \mathbf{R}^+, x \in B_\delta\}$; V_2 é positivamente invariante e $V_2 \subset V_1$:

Se $y \in V_2$, existe $\bar{t} \in \mathbf{R}^+$ e $x \in B_\delta$ tais que $\varphi(\bar{t}, x) = y$; $\bar{t}$ pode ser escolhido sempre em $[0, 2T[$, bastará substituir x por $g^n(x)$ com $n > 0$ conveniente (figura 7).

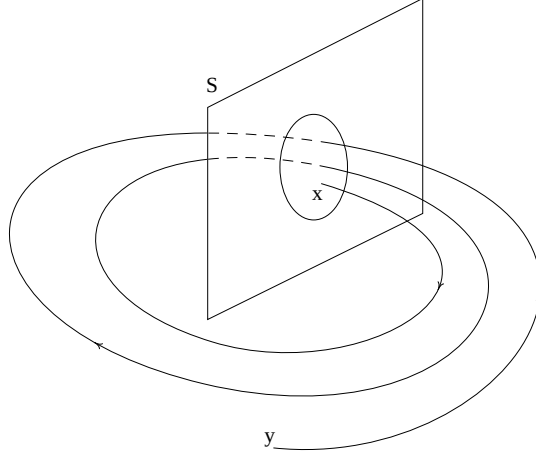


FIGURA 7

Como nesse caso $x \in B_\delta$ e $\tau(x) < 2T$, virá $y = \varphi(\bar{t}, x) \in V_1$, pela definição de δ e N ; isto é, $V_2 \subset V_1$.

Por outro lado, $d(\varphi(t, y), \gamma) \rightarrow 0$ já que $\varphi(t, y) = \varphi(t + \bar{t}, x)$, e podemos aplicar o teorema 2.2. $\square$

TEOREMA 2.6. *Com a mesma notação do teorema 2.5, seja H o hiperplano correspondente à secção local S ; se H é invariante para $\partial\varphi/\partial x(T, 0)$, então $\partial g/\partial x(0) = \partial\varphi/\partial x(T, 0)|_H$.*

Demonstração:

Pela definição de g , temos $g(x) = \varphi(\tau(x), x)$ com $x \in S_0$, um aberto de S contendo a origem. Seja h ortogonal a H e $G(t, x) = h \cdot \varphi(t, x)$; sabemos que τ é definido a partir de $G(\tau(x), x) = 0$, $\tau(0) = T$, usando o teorema da função implícita, e portanto:

$$\frac{\partial\tau}{\partial x}(0) = -\frac{\partial G}{\partial t}(T, 0)^{-1} \frac{\partial G}{\partial x}(T, 0) = -\frac{\partial G}{\partial t}(T, 0)^{-1} h \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x}(T, 0)$$

Como H é invariante, $\partial\varphi/\partial x(T, 0)H = H$ e então:

$$h \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x}(T, 0)|_H = 0$$

isto é, $\partial\tau/\partial x(0) = 0$ quando $x \in S \subset H$. Por outro lado,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(T, 0)|_H + \frac{\partial\varphi}{\partial t}(T, 0) \frac{\partial\tau}{\partial x}(0) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(T, 0)|_H$$

$\square$

Se consideramos a aplicação $\partial\varphi/\partial x(T, 0)$, vemos que tem sempre um valor próprio $\lambda = 1$, já que:

$$\varphi(T, \varphi(t, x)) = \varphi(t, x), \quad x \in \gamma \implies \frac{\partial\varphi}{\partial x}(T, 0)v(0) = v(0)$$

Por outro lado, os valores próprios são independentes do ponto $x \in \gamma$: se $x = \varphi(t, 0)$ com $t \in [0, T]$, então:

$$\varphi(T, 0) = \varphi(-t, \varphi(T, \varphi(t, 0)))$$

e portanto

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(T, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, 0)^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(T, x) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, 0)$$

É fácil verificar que a matriz de $\partial g / \partial x(0)$ é semelhante à da derivada de qualquer outra aplicação de Poincaré correspondendo à mesma órbita.

Uma órbita fechada γ é um atrator periódico se, para $x \in U$ tal que $d(\varphi(t, x), \gamma) \rightarrow 0$, existe um único ponto $z \in \gamma$ para o qual $d(\varphi(t, x), \varphi(t, z)) \rightarrow 0$. Cada ponto próximo de γ tem nesse caso a mesma evolução no limite que um certo ponto de γ .

TEOREMA 2.7. *Nas condições do teorema 2.5, γ é um atrator periódico.*

Demonstração:

Tomando $x \in S$ suficientemente próximo de 0, $x_n = \varphi(nT, x)$ está definido para todo $n \in \mathbf{N}_0$ e temos $\varphi(nT, x) = \varphi(t_n, g^n(x))$ com $t_n = t_{n-1} + \tau(g^{n-1}(x)) - T$ e $t_0 = 0$. Procedendo como na demonstração do teorema 2.5, temos $\|g(x)\| \leq \nu \|x\|$ com $\nu < 1$, e como τ tem derivada nula na origem, vem $|t_n - t_{n-1}| \leq \varepsilon \|g^{n-1}(x)\| \leq \varepsilon \nu^{n-1} \|x\|$ para qualquer ε positivo desde que $\|x\|$ seja suficientemente pequeno.

Então, como $t_0 = 0$, temos:

$$t_n = \sum_{i=1}^n t_i - t_{i-1}$$

e a sucessão t_n converge para algum $s \in \mathbf{R}$, porque a série $\sum_{i=1}^n |t_i - t_{i-1}|$ é dominada por uma série geométrica de razão positiva $\nu < 1$. Resulta que $x_n \rightarrow \gamma(s, 0)$ e portanto γ é um atrator periódico. $\square$

CAPÍTULO 7

Persistência de pontos de equilíbrio e órbitas periódicas

Iremos retomar e aprofundar aqui alguns resultados discutidos no final do Capítulo 2.

Dois campos de vectores v_1 e v_2 de classe C^k , definidos respectivamente em U_1 e U_2 , abertos de $\mathbf{R}^n$, são C^r conjugados, com $r \leq k$, se existir um difeomorfismo $h : U_1 \rightarrow U_2$, de classe C^r , tal que $\varphi_2(t, h(x)) = h(\varphi_1(t, x))$. Se $r = 0$, h será um homeomorfismo, e a conjugação diz-se topológica.

Seja x_0 um ponto de equilíbrio de v , definido em U ; x_0 diz-se hiperbólico se todos os valores próprios de $\partial v / \partial x(x_0)$ têm parte real não nula, e o índice de estabilidade de x_0 é o número de valores próprios com parte real negativa.

Designamos por $W^s(x_0)$ o conjunto dos pontos $x \in U$ tais que $\varphi(t, x) \rightarrow x_0$ quando $t \rightarrow +\infty$; $W^u(x_0)$ é definido de maneira análoga com $t \rightarrow -\infty$. Adiante estas definições serão usadas para $x \in V$, onde V é uma vizinhança de x_0 . Já tínhamos enunciado o resultado seguinte:

TEOREMA 0.8 (Hartman-Grobman). *Seja x_0 um ponto de equilíbrio hiperbólico de $v : U \rightarrow T\mathbf{R}^n$, de classe C^k com $k \geq 1$; existem vizinhanças V de x_0 e W de 0 , $V \subset U$, tais que $v|_V$ é topologicamente conjugado de $\partial v / \partial x(x_0).x|_W$.*

Assim, na vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico, o campo de vectores comporta-se topologicamente como a sua aproximação linear.

Sejam E^u e E^s os subespaços invariantes da aproximação linear de v em x_0 correspondentes a valores próprios com parte real positiva e negativa respectivamente, com $E^u \oplus E^s = \mathbf{R}^n$. A dimensão de $E^s(x)$ é o índice de estabilidade de x_0 .

Então numa vizinhança V do ponto de equilíbrio hiperbólico x_0 , os conjuntos $W^u(x_0)$ e $W^s(x_0)$ são superfícies de classe C^k , cujos espaços tangentes em x_0 são respectivamente $E^u(x_0)$ e $E^s(x_0)$. O comportamento de v sobre $E^u(x_0)$ e $E^s(x_0)$ é topologicamente conjugado ao comportamento da aproximação linear sobre E^u e E^s (figura 1).

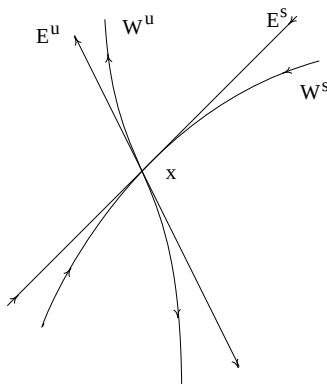


FIGURA 1

Podemos obter resultados análogos para o comportamento do fluxo na vizinhança de uma órbita fechada hiperbólica, isto é, tal que a aplicação de Poincaré só tem valores próprios diferentes de 1 em valor absoluto.

Os conjuntos $W^u(\gamma)$ e $W^s(\gamma)$ são definidos como previamente para pontos de equilíbrio; sendo $E_1(x)$ (respectivamente $E_2(x)$) o subespaço invariante da derivada da aplicação de Poincaré de γ em x correspondendo aos valores próprios de módulo maior (menor) que 1, definimos $E^u(x)$ ($E^s(x)$) como a soma directa de $E_1(x)$ ($E_2(x)$) e do subespaço gerado por $v(x)$.

A dimensão de $E^s(x)$ é o índice de estabilidade de γ . Então numa vizinhança V da órbita periódica hiperbólica γ , os conjuntos $W^u(\gamma)$ e $W^s(\gamma)$ são superfícies de classe C^k , cujos espaços tangentes em $x \in \gamma$ são respectivamente $E^u(x)$ e $E^s(x)$ (figura 2).

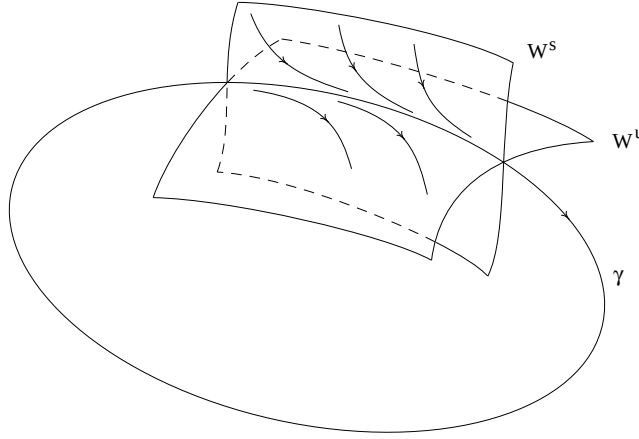


FIGURA 2

Vamos agora estudar a persistência de certas propriedades em famílias de campos de vectores $v(x, \alpha)$ dependendo de forma C^k de um parâmetro $\alpha \in \mathbf{R}^s$.

TEOREMA 0.9. *Seja v como acima e $x_0 \in U$, $\alpha_0 \in \mathbf{R}^s$ tais que $v(x_0, \alpha_0) = 0$ e $\partial v / \partial x(x_0, \alpha_0)$ não tem valores próprios nulos. Existe uma vizinhança V de α_0 em $\mathbf{R}^s$ e um aberto W de U contendo x_0 tal que, se $\alpha \in V$, $v(\cdot, \alpha)$ tem um único ponto de equilíbrio $x(\alpha)$ em W , com $x(\alpha_0) = x_0$. Se x_0 for hiperbólico, então $x(\alpha)$ tem o mesmo índice de estabilidade de x_0 .*

Demonstração:

Se todos os valores próprios são não nulos, isso quer dizer que $\partial v / \partial x(x_0, \alpha_0)$ é não singular e a primeira parte da tese resulta da aplicação do teorema da função implícita à equação $v(x, \alpha) = 0$ na vizinhança de (x_0, α_0) . Por outro lado, como a parte real dos valores próprios varia continuamente com os parâmetros, o seu sinal mantém-se. $\square$

No conjunto dos campos de vectores em U , interpretados como funções de U em $\mathbf{R}^n$, podemos definir uma norma, e consequentemente uma métrica e uma topologia, através de:

$$\|v\| = \sup_{x \in U} \left\{ |v(x)|, \left\| \frac{\partial v}{\partial x}(x) \right\| \right\}$$

Para que a norma acima esteja bem definida é preciso fazer mais hipóteses sobre v , a mais simples é que os campos de vectores em causa estão definidos num aberto $U' \subset \mathbf{R}^n$ e que o

fêcho de U é um subconjunto compacto de U' . Neste caso é possível provar uma versão mais geral do teorema 0.9:

TEOREMA 0.10. *Seja x_0 um ponto de equilíbrio hiperbólico de um campo de vectores v ; existe uma vizinhança V de v e um aberto W de U contendo x_0 tais que, se v' é um outro campo de vectores em V , v' tem um único ponto de equilíbrio em W , hiperbólico e com o mesmo índice de estabilidade de x_0 .*

Podemos obter resultados análogos para órbitas fechadas:

TEOREMA 0.11. *Seja g a aplicação de Poincaré correspondente a uma secção local de γ_0 ; se os valores próprios de $\partial g/\partial x(x_0, \alpha_0)$ são todos diferentes de 1, existe uma vizinhança V de α_0 e uma vizinhança W de γ_0 tais que para $\alpha \in V$, $v(\cdot, \alpha)$ tem uma órbita fechada $\gamma(\alpha) \subset W$ com $\gamma(\alpha_0) = \gamma_0$. Se γ_0 for hiperbólica, o índice de estabilidade de $\gamma(\alpha)$ é o mesmo de γ .*

Demonstração:

Aos pontos fixos de $g(x, \alpha)$, tomada como função de x , ou equivalentemente, às raízes de $\Psi(x, \alpha) = x - g(x, \alpha)$, corresponde uma órbita periódica do campo de vectores $v(\cdot, \alpha)$; por outro lado a condição sobre os valores próprios significa que o jacobiano de Ψ (com respeito a x) é não singular no ponto (x_0, α_0) . O teorema resulta agora da aplicação do teorema da função implícita, como na demonstração anterior. $\square$

Tal como no caso de pontos de equilíbrio, é possível provar uma versão mais forte deste teorema:

TEOREMA 0.12. *Seja g a aplicação de Poincaré correspondente a uma secção local de γ ; se os valores próprios de $\partial g/\partial x(x_0)$ têm módulo diferente de 1, existe uma vizinhança V de v e uma vizinhança W de γ tais que todos os campos de vectores $v' \in V$ têm uma órbita fechada $\gamma' \subset W$ com o mesmo índice de estabilidade de γ .*